Flervariabelanalys F1

MVE 035

TENTAKIT

Datum	Tenta	Lösning	Svar
2000-03-06	x	x	
2000-08-23	x	x	
2001-03-05	x	x	
2001-08-29	x	x	
2002-01-18	x	x	
2002-03-11	x	x	
2002-08-28	x	x	
2003-01-17	x	x	
2003-03-10	x	x	
2003-08-27	x	x	
2004-01-16	x	x	
2004-03-08	x	x	
2004-08-25	x	x	
2005-01-14	x	x	
2005-03-14	x	x	
2005-08-24	x	x	
2006-01-13	x	x	

24 februari 2006

Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del B** den 6/3 2000, kl. 14.15–18.15.

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.
Telefon: Jacob Hultén, tel 0740-45 90 22.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Bestäm alla stationära punkter till funktionen $f(x,y) = x^3 - 2xy^2 + y^4$ och ange deras karaktär. (7p)

2. Låt F vara en godtycklig deriverbar funktion på $\mathbb{R}^2$ och låt k vara en godtycklig konstant. Visa att
$$u(x,y,z) = x^k F\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{x}\right)$$
är en lösning till differentialekvationen
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = ku. \qquad \text{(8p)}$$

3. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D y\,dxdy$ över det område D i första kvadranten som begränsas av kurvorna
$$y = 2x, \quad y = \frac{x}{2}, \quad xy = 1, \quad xy = 4. \qquad \text{(8p)}$$

4. Beräkna $\iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$, då $K = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ med utåtriktad normal, och
$$\mathbf{F} = \left(e^y + xz,\ y^2 - x,\ z - 2yz\right). \qquad \text{(7p)}$$

5. Låt γ vara skärningskurvan mellan ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $x + z = 1$. Kurvans projektion på xy-planet är positivt orienterad. Beräkna $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, då
$$\mathbf{F} = \left(y^2z^2e^{xz} + z^2,\ 2yze^{xz} + zx,\ y^2(1 + xz)e^{xz} + 2xy\right). \qquad \text{(8p)}$$

6. Två kurvor C_1 och C_2 med ekvationerna $g(x,y) = 0$ och $h(x,y) = 0$, där g och h är C^1-funktioner, saknar gemensamma punkter. Antag att punkterna P_1 och P_2 på respektive kurva ger det kortaste avståndet mellan en punkt på C_1 och en punkt på C_2. Visa att linjen mellan P_1 och P_2 skär båda kurvorna vinkelrätt. (7p)

7. Formulera Greens formel för ett vektorfält (P,Q) i planet. Bevisa formeln för ett vektorfält av formen $(0,Q)$. (7p)

8. Visa att om funktionen $f(x,y)$ är kontinuerlig på den kompakta rektangeln
$$\Delta = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$
så är f integrerbar över denna. (8p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 6/3 2000

1. Sök stationära punkter för $f(x,y) = x^3 - 2xy^2 + y^4$:

$$f'_x = 3x^2 - 2y^2 = 0,$$
$$f'_y = -4xy + 4y^3 = 4y\left(y^2 - x\right).$$

Ur andra ekvationen fås att antingen är $y = 0$ eller $y^2 = x$. Första ekvationen ger sedan $x = 0$ respektive $3x^2 = 2x$. De stationära punkterna är alltså $(0,0)$ och $(\frac{2}{3}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})$. För $x = \frac{2}{3}$, $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ har vi

$$A = f''_{xx} = 6x = 4, \quad B = f''_{xy} = -4y = \mp 4\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad C = f''_{yy} = 12y^2 - 4x = 12\cdot\frac{2}{3} - 4\cdot\frac{2}{3} = \frac{16}{3}.$$

Se på den kvadratiska formen

$$Q = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = 4\Big(h^2 \mp 2\sqrt{\frac{2}{3}}hk + \frac{4}{3}k^2\Big) = 4\Big[\Big(h \mp \sqrt{\frac{2}{3}}k\Big)^2 + \frac{2}{3}k^2\Big].$$

Det är tydligt att Q är positivt definit. Alltså har f $\boxed{\text{lokala minima i } (\frac{2}{3}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})}$. I $(0,0)$ är $Q = 0$, men vi har t.ex. att $f(x,0) = x^3$, vilket antar både positiva och negativa värden i varje omgivning kring $(0,0)$. Alltså är $\boxed{(0,0) \text{ en sadelpunkt}}$.

---

2. $F = F(s,t)$ är en godtycklig C^1-funktion på $\mathbb{R}^2$. För $u(x,y,z) = x^k F(\frac{z}{x}, \frac{y}{x})$ är

$$\frac{\partial u}{\partial x} = kx^{k-1}F + x^k[F'_s\cdot(-\frac{z}{x^2}) + F'_t\cdot(-\frac{y}{x^2})] = kx^{k-1}F - x^{k-2}zF'_s - x^{k-2}yF'_t,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^k F'_t \cdot \frac{1}{x} = x^{k-1}F'_t, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = x^k F'_s\cdot\frac{1}{x} = x^{k-1}F'_s.$$

så att

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = kx^kF - x^{k-1}zF'_s - x^{k-1}yF'_t + yx^{k-1}F'_t + zx^{k-1}F'_s = kx^kF = ku.$$

---

3. Sätt $u = \frac{y}{x}$, $v = xy$. Då motsvaras området D av $D' = \{(u,v) : \frac{1}{2} \le u \le 2,\ 1 \le v \le 4\}$. Vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{y}{x} - \frac{y}{x} = -2u, \quad dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \frac{1}{2u}dudv,$$

och vidare är $uv = y^2$, så att

$$\iint_D y\,dxdy = \iint_{D'} \sqrt{uv}\frac{1}{2u}\,dudv = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{\sqrt{u}}\,du \int_1^4 \sqrt{v}\,dv$$
$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{u}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}\left[\tfrac{2}{3}v^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{3}(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}})(8-1) = \boxed{\frac{7\sqrt{2}}{3}}.$$

---

4. Vi använder Gauss' sats på kroppen K som beskrivs av olikheterna $x^2 + y^2 \le z \le 1$, $(x,y) \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$. För vektorfältet $\mathbf{F}$ är $\nabla\cdot\mathbf{F} = z + 2y + 1 - 2y = z + 1$, så att

$$\iint_{\partial K} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iint_D \left[\int_{x^2+y^2}^{1}(z+1)\,dz\right]dxdy = \iint_D \left[\frac{1}{2}z^2 + z\right]_{x^2+y^2}^{1} dxdy$$
$$= \iint_D \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 - (x^2+y^2)\right)dxdy = \text{[polära koordinater]}$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (\frac{3}{2} - \frac{1}{2}r^4 - r^2)r\,drd\theta = 2\pi\int_0^1(\frac{3}{2}r - \frac{1}{2}r^5 - r^3)\,dr$$
$$= 2\pi(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} - \frac{1}{4}) = \boxed{\frac{5\pi}{6}}.$$

---

5. γ är en cirkel i planet $x+z=1$; låt motsvarande cirkelskiva vara Y. Projektionen γ_1 på xy-planet fås ur $x^2+y^2+(1-x)^2=1$, $2x^2-2x+y^2=0$. Efter kvadratkomplettering fås ekvationen

$$\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1,$$

vilket visar att γ_1 är en ellips med halvaxlarna $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Låt D vara området innanför γ_1.

Metod 1. Enligt Stokes' sats är $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_Y(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{N}\,dS$. Vi har

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{F}&=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ y^2z^2e^{xz}+z^2 & 2yze^{xz}+xz & y^2(1+xz)e^{xz}+2xy\end{vmatrix}\\
&=(2y(1+xz)e^{xz}+2x-2ye^{xz}-2yzxe^{xz}-x)\,\mathbf{e}_1\\
&\quad+\left(2y^2ze^{xz}+y^2z^2xe^{xz}+2z-y^2ze^{xz}-y^2(1+xz)ze^{xz}-2y\right)\mathbf{e}_2\\
&\quad+\left(2yz^2e^{xz}+z-2yz^2e^{xz}\right)\mathbf{e}_3\\
&=(x,2z-2y,z),\end{aligned}$$

och $\mathbf{N}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$. Alltså är $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_Y\frac{1}{\sqrt{2}}(x+z)\,dS$. På Y är $z=1-x$, $dS=\sqrt{2}dxdy$, så att $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_D dxdy=\pi\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Metod 2. Känn igen en differential och utnyttja $z=1-x$:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}&=\int_\gamma y^2z^2e^{xz}\,dx+2yze^{xz}\,dy+y^2(1+xz)e^{xz}\,dz+\int_\gamma z^2dx+zx\,dy+2xy\,dz\\
&=\int_\gamma d(y^2ze^{xz})+\int_\gamma(1-x)^2\,dx+\int_\gamma(1-x)x\,dy+2xy(-dx)\\
&=0+\frac{1}{3}\int_\gamma d(x-1)^3+\int_{\gamma_1}(-2xy)\,dx+(x-x^2)dy=\ \text{[Greens formel]}\\
&=0+\iint_D(1-2x+2x)\,dxdy=\iint_D dxdy=\boxed{\frac{\pi\sqrt{2}}{4}}.\end{aligned}$$

---

6. Låt (x,y) och (u,v) vara koordinaterna för typiska punkter på C_1 respektive C_2. Vi skall då minimera $F(x,y,u,v)=(x-u)^2+(y-v)^2$ under bivillkoren

$$\begin{aligned}G_1(x,y,u,v)&=g(x,y)=0,\\ G_2(x,y,u,v)&=h(u,v)=0.\end{aligned}$$

Vi kan anta att $\nabla g\neq 0$ och $\nabla h\neq 0$ i P_1 resp. P_2. Enligt Lagranges multiplikatorregel finns tal λ_1 och λ_2 så att då minimum antas, gäller $\nabla F=\lambda_1\nabla G_1+\lambda_2\nabla G_2$. Om (x,y) och (u,v) är koordinaterna för P_1 resp. P_2 är alltså

$$\begin{pmatrix}2(x-u)\\2(y-v)\\-2(x-u)\\-2(y-v)\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}g'_x\\g'_y\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\0\\h'_u\\h'_v\end{pmatrix}.$$

Alltså är $\binom{x-u}{y-v}=\frac{1}{2}\lambda_1\nabla g(x,y)$ och $\binom{x-u}{y-v}=-\frac{1}{2}\lambda_2\nabla h(u,v)$. Eftersom $\binom{x-u}{y-v}=\overrightarrow{P_2P_1}$, och $\nabla g(x,y)$ och $\nabla h(u,v)$ är normalvektorer till C_1 i P_1 respektive C_2 i P_2, följer påståendet.

Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del B** den 23/8 2000, kl. 8.45–12.45.

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.
Telefon: Henrik Olsson, tel. 0740-45 90 22.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. a. Beräkna tangentplanet till ytan $xe^y - yz + 2e^z = 0$ i punkten $P = (-2, 0, 0)$. (4p)

   b. Visa att ytan lokalt kring P är en funktionsyta $z = f(x, y)$. I vilken riktning (i xy-planet) tillväxer $f(x, y)$ snabbast? (3p)

2. Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x, y) = x^3 - 2x^2y + xy$ i mängden
$$\{(x, y) : x \leq y \leq 1 + \frac{x}{2},\ y \geq 0\}. \qquad (8p)$$

3. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (x - y)\,dxdy$ över det område D i första kvadranten som begränsas av kurvorna
$$x + y = 2, \quad x + y = 3, \quad x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 4. \qquad (8p)$$

4. Beräkna $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS$, då Y är halvsfären $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ med normalriktning uppåt, och
$$\mathbf{F} = \left(xz^2 + e^z,\ 2x^2yz,\ y^2z^2 + 1\right). \qquad (8p)$$

5. Lös differentialekvationen
$$xu'_x + y^2u'_y = x^2, \quad x > 0,\ y > 0,$$
   och bestäm den lösning som uppfyller $u(x, 1) = x^2$. (7p)

6. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, då
$$\mathbf{F} = \frac{(2x - y + 1,\ x + 2y - 2)}{x^2 + y^2 - 2y + 1},$$
   och γ är ellipsbågen $x^2 + y^2/4 = 1$ i första kvadranten från $(1, 0)$ till $(0, 2)$. (7p)

7. Bevisa en formel för derivering av den sammansatta funktionen $f(\mathbf{g}(t))$ (kedjeregeln) under lämpliga förutsättningar (som skall anges). (7p)

8. a. Ange vad som menas med att ett vektorfält $\mathbf{F} = (P, Q)$ är ett potentialfält. (2p)

   b. Visa att om kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen i en sammanhängande öppen mängd Ω, så är $\mathbf{F}$ ett potentialfält i Ω. (6p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 23/8 2000

1. a. Ytan är en nivåyta till funktionen $F(x,y,z) = xe^y - yz + 2e^z$. Tangentplanet i $P = (-2,0,0)$ har normalvektorn $\nabla F(P)$. Vi har $\nabla F = (e^y, xe^y - z, -y + 2e^z)$ och $\nabla F(P) = (1,-2,2)$. Tangentplanets ekvation är $1 \cdot (x+2) - 2 \cdot (y-0) + 2 \cdot (z-0) = 0$, dvs. $\boxed{x - 2y + 2z + 2 = 0}$.

   b. Eftersom $F'_z(P) = 2 \neq 0$, säger implicita funktionssatsen att man lokalt kring P kan lösa $F(x,y,z) = 0$ på formen $z = f(x,y)$, där f är en C^1-funktion. Utgående från P tillväxer $f(x,y)$ snabbast i riktningen $\nabla f(-2,0)$. Man kan beräkna f'_x och f'_y med hjälp av implicit derivering, men det är enklast att notera att tangentplanet i a kan skrivas som $z = f(-2,0) + f'_x(-2,0)(x+2) + f'_y(-2,0)y$. Härur avläser man $f'_x(-2,0) = -\frac{1}{2}$, $f'_y(-2,0) = 1$. Alltså tillväxer f snabbast i riktningen $\boxed{(-\dfrac{1}{2}, 1)}$.

---

2. Studera $f(x,y) = x^3 - 2x^2y + xy$ för $x \le y \le 1 + \frac{x}{2}$, $y \ge 0$. Området är en triangel med hörn i $(0,0)$, $(-2,0)$ och $(2,2)$. Bestäm först ev. inre stationära punkter:

$$\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 - 4xy + y = 0, \\ f'_y &= -2x^2 + x = x(-2x+1) = 0. \end{aligned}$$

Ur andra ekvationen fås antingen $x = 0$ eller $x = \frac{1}{2}$. Ur första ekvationen fås sedan $y = 0$ resp. $y = \frac{3}{4}$. Endast $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ är en inre punkt. Funktionsvärdet är $f(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = \underline{\frac{1}{8}}$.
Undersök sedan randen. På $y = 0$, $-2 < x < 0$, är $f(x,0) = x^3$, som är strängt växande. På $y = x$, $0 < x < 2$, är $f(x,x) = -x^3 + x^2 = f_1(x)$ och $f_1'(x) = -3x^2 + 2x = x(-3x+2)$. Intressant punkt är $x = \frac{2}{3}$ (nollställe till f_1'), där vi har $f(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = f_1(\frac{2}{3}) = \underline{\frac{4}{27}}$. På $y = 1 + \frac{x}{2}$, $-2 < x < 2$, är $f(x, 1 + \frac{x}{2}) = -\frac{3}{2}x^2 + x = f_2(x)$ och $f_2'(x) = -3x + 1$. Intressant punkt är $x = \frac{1}{3}$, där vi har $f(\frac{1}{3}, \frac{7}{6}) = f_2(\frac{1}{3}) = \underline{\frac{1}{6}}$. Slutligen noterar vi funktionsvärdena i hörnpunkterna: $f(0,0) = \underline{0}$, $f(-2,0) = \underline{-8}$ och $f(2,2) = \underline{-4}$. Jämförelse mellan de intressanta funktionsvärdena visar att $\boxed{\text{minsta värde är } -8}$, och $\boxed{\text{största värde är } \frac{1}{6}}$.

---

3. Sätt $u = x^2 - y^2$, $v = x + y$. Då motsvaras området D av $D' = \{(u,v) : 1 \le u \le 4,\ 2 \le v \le 3\}$. Vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x + 2y = 2v, \quad dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \frac{1}{2v} dudv,$$

och vidare är $x - y = \frac{u}{v}$, så att

$$\begin{aligned} \iint_D (x-y)\,dxdy &= \iint_{D'} \frac{u}{v}\frac{1}{2v}\,dudv = \frac{1}{2}\int_1^4 u\,du \int_2^3 \frac{1}{v^2}\,dv \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^4 \left[-\frac{1}{v}\right]_2^3 = \frac{1}{4}(16-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \boxed{\frac{5}{8}}. \end{aligned}$$

---

4. Komplettera Y med "botten" $Y_1 = \{(x,y,0) : x^2 + y^2 \le 1\}$, så att $Y + Y_1$ blir rand till halvklotet $K = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ z \ge 0\}$. Använd Gauss' sats:

$$\begin{aligned} \iint_{Y+Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS &= \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_K (z^2 + 2x^2z + 2y^2z)\,dxdydz = [\text{rymdpolära koord.}] \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^2\cos^2\theta + 2r^2\sin^2\theta \cdot r\cos\theta) r^2 \sin\theta\,drd\theta d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^1 r^4\,dr \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta\,d\theta + 2\pi \int_0^1 2r^5\,dr \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\cos\theta\,d\theta \\ &= 2\pi\Big(\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi/2} + \frac{2}{6}\left[\frac{1}{4}\sin^4\theta\right]_0^{\pi/2}\Big) = 2\pi(\frac{1}{15} + \frac{1}{12}) = \frac{3\pi}{10}. \end{aligned}$$

Nu är $\iint_{Y+Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, och

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{Y_1} \mathbf{F}(x,y,0)\cdot(0,0,-1)\,dxdy = -\iint_{Y_1} dxdy = -\pi.$$

Alltså är $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \frac{3\pi}{10} - (-\pi) = \boxed{\dfrac{13\pi}{10}}$.

---

5. Karakteristikernas differentialekvation i xy-planet:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y^2},$$

med lösning $\ln x = -\frac{1}{y} + C_1$, $x = e^{C_1}e^{-1/y} = Ce^{-1/y}$, $xe^{1/y} = C$. Gör variabelbytet $s = xe^{1/y}$, $t = x$. Då är

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = e^{1/y}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}, \\ u'_y &= \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}e^{1/y}\frac{\partial u}{\partial s}, \end{aligned}$$

och

$$xu'_x + y^2u'_y = xe^{1/y}\frac{\partial u}{\partial s} + x\frac{\partial u}{\partial t} - xe^{1/y}\frac{\partial u}{\partial s} = t\frac{\partial u}{\partial t} = x^2 = t^2.$$

Alltså är $\frac{\partial u}{\partial t} = t$, $u = t^2/2 + g(s)$, $u(x,y) = x^2/2 + g(xe^{1/y})$. Vi vill att lösningen skall uppfylla $u(x,1) = x^2/2 + g(ex) = x^2$. Med $ex = x_1$ blir $g(x_1) = \frac{x_1^2}{2e^2}$. Alltså blir lösningen $u = \frac{x^2}{2} + \frac{(xe^{1/y})^2}{2e^2} = \boxed{\dfrac{x^2}{2}(1+e^{2/y-2})}$.

---

6. Vi har

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \frac{2x-(y-1)}{x^2+(y-1)^2}dx + \frac{x+2(y-1)}{x^2+(y-1)^2}dy \\ &= 2\frac{xdx+(y-1)dy}{x^2+(y-1)^2} + \frac{-(y-1)dx+xdy}{x^2+(y-1)^2}. \end{aligned}$$

Låt r och θ vara polära koordinater med centrum i $(0,1)$. Då är (åtminstone i första kvadranten) $r^2 = x^2+(y-1)^2$, $\theta = \arctan\frac{y-1}{x}$, och

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = d\ln r^2 + d\theta = d(\ln r^2 + \theta).$$

Alltså är

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \left[\ln r^2 + \theta\right]_{(1,0)}^{(0,2)} = \ln 1 + \frac{\pi}{2} - (\ln 2 - \frac{\pi}{4}) = \boxed{\frac{3\pi}{4} - \ln 2}.$$

Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del B** den 13/1 2001, kl. 14.15–18.15.
Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.
Telefon: Sara Ågren, tel 0740-45 90 22.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Bestäm alla stationära punkter till funktionen $f(x,y) = -x^3 + xy^2 - x^2 + y^2$ och ange deras karaktär. (8p)

2. Låt f vara en C^1-funktion på $\mathbb{R}^2$. Visa att funktionen $u(x,y,z) = xyzf(xy,yz)$ satisfierar differentialekvationen
$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u. \qquad (7p)$$

3. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (x+y)(2y+1)e^{x-y^2}\,dxdy$ över det område D i första kvadranten som begränsas av kurvorna
$$x+y=1, \quad x+y=2, \quad x-y^2=0, \quad x-y^2=1. \qquad (8p)$$

4. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, då γ är skärningskurvan mellan paraboloiden $z = x^2+2y^2$ och cylindern $x^2+y^2=1$, och
$$\mathbf{F} = (y^2ze^x + x^2y, 2yze^x + yz, y^2e^x).$$
Kurvans projektion på xy-planet är positivt orienterad. (8p)

5. Beräkna $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, då Y är ellipsoiden $x^2+2y^2+3z^2=1$ med normalriktning utåt, och
$$\mathbf{F} = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}. \qquad (7p)$$

6. Lös differentialekvationen
$$xyu'_x + (y^2+1)u'_y = (x^2+1)u, \quad x>0,\ y>0,$$
och bestäm den lösning som uppfyller $u(x,1) = x^4$. (7p)

7. Funktionen f är integrerbar över rektangeln $\{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$. Formulera och bevisa en sats om itererad integration. (7p)

8. Formulera och bevisa Stokes' sats. (8p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 13/1 2001

1. Sök stationära punkter för $f(x,y) = -x^3 + xy^2 - x^2 + y^2$:

$$f'_x = -3x^2 + y^2 - 2x = 0,$$
$$f'_y = 2xy + 2y = 2y(x+1) = 0.$$

Ur andra ekvationen fås antingen $y = 0$ eller $x = -1$. Om $y = 0$ ger första ekvationen $3x^2 + 2x = 0$, dvs. $x = 0$ eller $x = -\frac{2}{3}$. Om $x = -1$ fås $y^2 = 3x^2 + 2x = 1$. De stationära punkterna är alltså $(0,0)$, $(-\frac{2}{3}, 0)$ och $(-1, \pm 1)$. För $x = 0$, $y = 0$ har vi

$$A = f''_{xx} = -6x - 2 = -2, \quad B = f''_{xy} = 2y = 0, \quad C = f''_{yy} = 2x + 2 = 2.$$

Se på den kvadratiska formen

$$Q = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = -2h^2 + 2k^2.$$

Det är tydligt att Q är indefinit. Alltså är $\boxed{(0,0) \text{ en sadelpunkt}}$. I $(-\frac{2}{3}, 0)$ är $A = 2$, $B = 0$, $C = \frac{2}{3}$ och $Q = 2h^2 + \frac{2}{3}k^2$. Eftersom Q är positivt definit, har vi $\boxed{\text{lokalt minimum i } (-\frac{2}{3}, 0)}$. I $(-1, \pm 1)$ är $A = 4$, $B = \pm 2$, $C = 0$, och $Q = 4h^2 \pm 4hk = 4h(h \pm k)$, som är indefinit. Alltså föreligger $\boxed{\text{sadelpunkter i } (-1, \pm 1)}$.

---

2. $f = f(s,t)$ är en godtycklig C^1-funktion på $\mathbb{R}^2$. För $u(x,y,z) = xyzf(xy, yz)$ är

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yzf(xy,yz) + xy^2zf'_s(xy,yz),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = xzf(xy,yz) + x^2yzf'_s(xy,yz) + xyz^2f'_t(xy,yz),$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = xyf(xy,yz) + xy^2zf'_t(xy,yz).$$

Alltså är

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = xyzf + x^2y^2zf'_s - xyzf - x^2y^2zf'_s - xy^2z^2f'_t + xyzf + xy^2z^2f'_t = xyzf = u.$$

---

3. Sätt $u = x + y$, $v = x - y^2$. Då motsvaras området D av $D' = \{(u,v) : 1 \le u \le 2,\ 0 \le v \le 1\}$. Vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2y \end{vmatrix} = -2y - 1, \quad dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \frac{1}{2y+1} dudv,$$

så att

$$\iint_D (x+y)(2y+1)e^{x-y^2}\, dxdy = \iint_{D'} ue^v\, dudv = \int_1^2 u\, du \int_0^1 e^v\, dv$$
$$= \boxed{\frac{3}{2}(e-1)}.$$

---

4. Projektionen γ_1 på xy-planet av γ är cirkeln $x^2 + y^2 = 1$. Låt D vara området innanför γ_1. På γ är $z = 1 + y^2$. Då fås, eftersom γ är en sluten kurva,

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma y^2ze^x\, dx + x^2y\, dx + 2yze^x\, dy + yz\, dy + y^2e^x\, dz$$
$$= \int_\gamma d(y^2ze^x) + \int_\gamma x^2y\, dx + y(1+y^2)\, dy = 0 + \int_\gamma x^2y\, dx + \int_\gamma d(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}y^4)$$
$$= \int_{\gamma_1} x^2y\, dx + 0 = \text{[Greens formel]}$$
$$= -\iint_D x^2\, dxdy = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos^2\theta\, r\, dr\, d\theta = -\int_0^1 r^3\, dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta$$
$$= \boxed{-\frac{\pi}{4}}.$$

---

5. Utanför origo är $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, ty (med $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$)

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3} = \frac{r^3 \cdot 1 - x \cdot 3r^2 \frac{x}{r}}{r^6} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$$

och motsvarande för y och z, så att

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{3r^2 - 3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = 0.$$

Låt Y_1 vara sfären $x^2+y^2+z^2 = a^2$, där radien a är så liten att Y_1 ligger innanför Y. Om Y_1 har utåtriktad normal, så är $Y - Y_1$ rand till området mellan Y och Y_1, och en tillämpning av Gauss' sats ger att $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$. På Y_1 är $\mathbf{N} = (x,y,z)/a$, så att

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{Y_1} \frac{(x,y,z)}{a^3}\cdot\frac{(x,y,z)}{a}\,dS = \iint_{Y_1} \frac{a^2}{a^4}\,dS = \frac{1}{a^2}\cdot 4\pi a^2 = \boxed{4\pi}.$$

---

6. Karakteristikernas projektion på xy-planet har differentialekvationen

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y^2+1},$$

varav $\frac{dx}{x} = \frac{y}{y^2+1}dy$, $\ln x = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) - \frac{1}{2}\ln C$, $\frac{y^2+1}{x^2} = C$. Inför därför $\xi = \frac{y^2+1}{x^2}$ som ny variabel och tag (t.ex.) $\eta = y$. Då är

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{-2(y^2+1)}{x^3} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{2y}{x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 1,$$

$$xy\frac{\partial u}{\partial x} + (y^2+1)\frac{\partial u}{\partial y} = -2xy\cdot\frac{y^2+1}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi} + (y^2+1)\cdot\frac{2y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} + (y^2+1)\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

så att differentialekvationen övergår i

$$(y^2+1)\frac{\partial u}{\partial \eta} = (x^2+1)u = \Big(\frac{y^2+1}{\xi}+1\Big)u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \Big(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta^2+1}\Big)u.$$

För fixt ξ har vi en ordinär differentialekvation i η med lösning

$$u = e^{\int(\frac{1}{\xi}+\frac{1}{\eta^2+1})\,d\eta} = e^{\frac{\eta}{\xi}+\arctan\eta+g(\xi)} = h(\xi)e^{\frac{\eta}{\xi}+\arctan\eta},$$

där h är en godtycklig C^1-funktion, så att

$$u(x,y) = h\Big(\frac{y^2+1}{x^2}\Big)e^{\frac{x^2y}{y^2+1}+\arctan y}.$$

Vi vill ha

$$u(x,1) = h\big(\frac{2}{x^2}\big)e^{\frac{x^2}{2}+\frac{\pi}{4}} = x^4.$$

Med $t = \frac{2}{x^2}$ har vi $h(t)e^{\frac{\pi}{4}}e^{\frac{1}{t}} = \frac{4}{t^2}$, så att $h(t) = \frac{4}{t^2}e^{-\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{1}{t}}$ för $t > 0$. Alltså är den sökta lösningen

$$u(x,y) = 4e^{-\frac{\pi}{4}}\frac{x^4}{(y^2+1)^2}e^{-\frac{x^2}{y^2+1}}e^{\frac{x^2y}{y^2+1}+\arctan y} = \boxed{4e^{-\frac{\pi}{4}}\frac{x^4}{(y^2+1)^2}e^{\frac{x^2(y-1)}{y^2+1}+\arctan y}}.$$

Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del B** den 5/3 2001, kl. 14.15–18.15.
Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.
Telefon: Erik Svensson, tel 0740-45 90 22.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. a. Beräkna tangentplanet till ytan $z^3 - xz + xy - y^2 = 0$ i punkten $P = (1, 1, -1)$. (4p)

   b. Visa att ytan lokalt kring P är en funktionsyta $z = f(x, y)$. Beräkna $f'_x(1, 1)$ och $f'_y(1, 1)$. (3p)

2. Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x, y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^3$ i mängden
$$\{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}. \qquad (8p)$$

3. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D xe^{x+y}\,dxdy$, då D är fyrhörningen med hörn i $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$ och $(-1, 1)$. (7p)

4. Beräkna $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS$, då Y är ytan $z = 1 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$, med normalriktning uppåt, och $\mathbf{F} = (xz + y^2, yz + x^2, x^2 + y^2)$. (8p)

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, då
$$\mathbf{F} = (z^2 \sin y + yz, xz^2 \cos y, 2xz \sin y - xy^2),$$
och γ är skärningen mellan ytorna $x + y^2 + z = 1$ och $x^2 + y^2 = 1$. Kurvans projektion på xy-planet är positivt orienterad. (7p)

6. Transformera uttrycket
$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$
genom att göra variabelbytet $s = xy$, $t = x + 2y$. (7p)

7. Härled Taylors formel för en funktion av två variabler med restterm av ordning 3. (8p)

8. Formulera och bevisa Gauss' sats. (8p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 5/3 2001

1. a. Ytan är en nivåyta till funktionen $F(x,y,z) = z^3 - xz + xy - y^2$. Tangentplanet i $P = (1,1,-1)$ har normalvektorn $\nabla F(P)$. Vi har $\nabla F = (-z+y, x-2y, 3z^2-x)$ och $\nabla F(P) = (2,-1,2)$. Tangentplanets ekvation är $2\cdot(x-1) - 1\cdot(y-1) + 2\cdot(z+1) = 0$, dvs. $\boxed{2x - y + 2z + 1 = 0}$.

   b. Eftersom $F_z'(P) = 2 \neq 0$, säger implicita funktionssatsen att man lokalt kring P kan lösa $F(x,y,z) = 0$ på formen $z = f(x,y)$, där f är en C^1-funktion. Implicit derivering ger $F_x' + F_z' z_x' = 0$ och$F_y' + F_z' z_y' = 0$, varav $f_x'(1,1) = -F_x'(P)/F_z'(P) = \boxed{-1}$, och $f_y'(1,1) = -F_y'(P)/F_z'(P) = \boxed{\frac{1}{2}}$. (Detta kan också avläsas ur tangentplanets ekvation.)

---

2. Studera $f(x,y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^3$ för $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$. Bestäm först ev. inre stationära punkter:

$$f_x' = 4x^3 - 4xy^2 = 4x(x^2 - y^2) = 0,$$
$$f_y' = -4x^2y + 3y^2 = y(3y - 4x^2) = 0.$$

Eftersom vi vill ha $x > 0$ och $y > 0$, fås $y = x$ och $4x^2 = 3y = 3x$, så att $x = y = \frac{3}{4}$. Funktionsvärdet är $f(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}) = \frac{27}{256}$.
Betrakta sedan randen. Vi skall undersöka $f_1(x) = f(x,0) = x^4$, $f_2(x) = f(x,2) = x^4 - 8x^2 + 8$, $f_3(y) = f(0,y) = y^3$ och $f_4(y) = f(1,y) = 1 - 2y^2 + y^3$ för $0 \le x \le 1$ och $0 \le y \le 2$. f_1 och f_3 är strängt växande. f_2 är strängt avtagande, eftersom $f_2'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2-4) < 0$ för $0 < x < 1$. För f_4 har vi att $f_4'(y) = -4y + 3y^2 = 0$ för $y = \frac{4}{3}$. Intresssanta funktionsvärden är $f(1,\frac{4}{3}) = -\frac{5}{27}$ och värdena i hörnpunkterna $f(0,0) = 0$, $f(1,0) = 1$, $f(1,2) = 1$ och $f(0,2) = 8$. $\boxed{\text{Maximum är } f(0,2) = 8}$ och $\boxed{\text{minimum är } f(1,\frac{4}{3}) = -\frac{5}{27}}$.

---

3. Fyrhörningen är en parallellogram som begränsas av linjerna $x + y = 0$, $x + y = 3$, $2y - x = 0$ och $2y - x = 3$. Sätt $u = x + y$, $v = 2y - x$. Då motsvaras området D av $D' = \{(u,v) : 0 \le u \le 3,\ 0 \le v \le 3\}$. Vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \frac{1}{3} dudv,$$

och vidare är $x = \frac{1}{3}(2u - v)$. Alltså är

$$\iint_D xe^{x+y}\, dxdy = \iint_{D'} \frac{1}{3}(2u-v)e^u \frac{1}{3}\, dudv = \frac{1}{9}\int_0^3 \left\{\int_0^3 (2u-v)e^u\, dv\right\} du$$
$$= \frac{1}{9}\int_0^3 (6u - \frac{9}{2})e^u\, du = \frac{1}{9}\left[(6u - \frac{9}{2})e^u\right]_0^3 - \frac{1}{9}\int_0^3 6e^u\, du$$
$$= \frac{3}{2}e^3 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}(e^3 - 1) = \boxed{\frac{1}{6}(5e^3 + 7)}.$$

---

4. Komplettera Y med "botten" $Y_1 = \{(x,y,0) : x^2 + y^2 \le 1\}$, så att $Y + Y_1$ blir rand till kroppen $K = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 \le 1\}$. Använd Gauss' sats:

$$\iint_{Y+Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}\, dxdydz = \iiint_K 2z\, dxdydz$$
$$= \iint_{Y_1} \left\{\int_0^{1-x^2-y^2} 2z\, dz\right\} dxdy = \iint_{Y_1} (1 - x^2 - y^2)^2\, dxdy$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)^2 r\, dr d\varphi = 2\pi\left[-(\frac{1}{6}(1-r^2)^3\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

Nu är $\iint_{Y+Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, och

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{Y_1} \mathbf{F}(x,y,0)\cdot(0,0,-1)\,dxdy = -\iint_{Y_1}(x^2+y^2)\,dxdy$$
$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cdot r\,drd\varphi = -2\pi\cdot\frac{1}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

Alltså är $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \frac{\pi}{3}-(-\frac{\pi}{2}) = \boxed{\frac{5\pi}{6}}$.

---

5. Projektionen γ_1 på xy-planet av γ är cirkeln $x^2+y^2=1$. Låt D vara området innanför γ_1. På γ är $z=1-x-y^2$ och $dz=-dx-2y\,dy$. Då fås, eftersom γ är en sluten kurva,

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma z^2\sin y\,dx + yz\,dx + xz^2\cos y\,dy + 2xz\sin y\,dz - xy^2\,dz$$
$$= \int_\gamma d(xz^2\sin y) + \int_\gamma yz\,dx - xy^2\,dz = 0 + \int_{\gamma_1} y(1-x-y^2)\,dx + xy^2(dx+2y\,dy)$$
$$= \int_{\gamma_1}(y-xy-y^3+xy^2)\,dx + 2xy^3\,dy = [\text{Greens formel}]$$
$$= \iint_D(2y^3-1+x+3y^2-2xy)\,dxdy = \left[\text{av symmetriskäl är } \iint_D(2y^3+x-2xy)\,dxdy=0\right]$$
$$= \iint_D(3y^2-1)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1(3r^2\sin^2\varphi-1)r\,drd\varphi = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi - \pi = \frac{3\pi}{4}-\pi = \boxed{-\frac{\pi}{4}}.$$

---

6. Med substitutionen $s=xy$ och $t=x+2y$ fås

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = y\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = x\frac{\partial u}{\partial s} + 2\frac{\partial u}{\partial t},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(y\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial t}\Big) = y\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial s}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big) = y\Big(y\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}\Big) + y\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$= y^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2y\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(x\frac{\partial u}{\partial s}+2\frac{\partial u}{\partial t}\Big) = x\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial s}\Big) + 2\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big) = x\Big(x\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}\Big) + 2\Big(x\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}+2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big)$$
$$= x^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 4x\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(x\frac{\partial u}{\partial s}+2\frac{\partial u}{\partial t}\Big) = x\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial s}\Big) + \frac{\partial u}{\partial s} + 2\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big) = x\Big(y\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}\Big) + 2\Big(y\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big) + \frac{\partial u}{\partial s}$$
$$= xy\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + (x+2y)\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial s}.$$

Härav fås

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$
$$= (x^2y^2+y^2x^2-2x^2y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + (2x^2y+4xy^2-2xy(x+2y))\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} + (x^2+4y^2-4xy)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2xy\frac{\partial u}{\partial s}$$
$$= \boxed{(t^2-8s)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2s\frac{\partial u}{\partial s}}.$$

Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del B** den 29/8 2001, kl. 8.45–12.45.

Hjälpmedel: Beta, Standard Math. Tables. Typgodkänd räknedosa.
Telefon: Richards Grzibovski, tel 0740-45 90 22.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Taylorutveckla funktionen

$$f(x,y) = \sin(x-y)\sqrt{1+x+2y} - \cos(x+y)\ln(1+x-y)$$

kring origo med termer t.o.m. andra graden. Visa att har f en stationär punkt i origo och avgör dess karaktär. (7p)

2. Beräkna arean av ytan (en torus)

$$\begin{cases} x = (a+b\cos\varphi)\cos\theta, \\ y = (a+b\cos\varphi)\sin\theta, \\ z = b\sin\varphi, \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

där a och b är konstanter, $0 < b < a$. (8p)

3. Bestäm maximum av $x - 2y + 5z$, då $x^2 + 2y^2 + xz + yz + z^2 = 1$. (7p)

4. Beräkna $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, då

$$\mathbf{F} = (xy^2z^4 + xy, x^2yz^4, 2x^2y^2z^3 - yz),$$

och C är skärningen mellan ytorna $x^2 + y^2 + z = 1$ och $2x + y + z = 1$. Kurvans projektion på xy-planet är positivt orienterad. (8p)

5. Beräkna $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$, då Y är begränsningsytan till tetraedern med hörn i $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(1,2,0)$ och $(1,1,3)$ (normalriktning utåt) och $\mathbf{F} = (y^2, yz, x^2)$. (8p)

6. Lös differentialekvationen

$$3x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (x > 0,\ y > 0)$$

genom att göra variabelbytet $s = xy$, $t = x^2y^3$. (7p)

7. Hur definieras riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$? Visa hur $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$ kan uttryckas med hjälp av gradienten. (7p)

8. Låt Δ vara en axelparallell rektangel. Redogör för vad som menas med att en begränsad funktion $f(x,y)$ är (Riemann-)integrerbar över Δ. Hur definieras $\iint_\Delta f(x,y)\,dxdy$? (8p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 29/8 2001

1. Med hjälp, av envariabelutvecklingarna $\sin t = t + O(t^3)$, $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3)$, $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$, $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$, då $t \to 0$, fås

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \Big(x - y + O(r^3)\Big)\Big(1 + \frac{1}{2}(x+2y) - \frac{1}{8}(x+2y)^2 + O(r^3)\Big) \\ &\quad - \Big(1 - \frac{1}{2}(x+y)^2 + O(r^4)\Big)\Big(x - y - \frac{1}{2}(x-y)^2 + O(r^3)\Big) = x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}y^2 + O(r^3), \end{aligned}$$

då $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$. Detta är den sökta Taylorutvecklingen. Det framgår att $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, så att origo är en stationär punkt. Eftersom den kvadratiska formen $x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}y^2$ kan skrivas $(x - \frac{1}{4}y)^2 - \frac{9}{16}y^2$, är den indefinit, och origo är en sadelpunkt.

---

2. Vi har $\mathbf{r} = ((a + b\cos\varphi)\cos\theta, (a + b\cos\varphi)\sin\theta, b\sin\varphi)$, och

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\varphi &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -(a+b\cos\varphi)\sin\theta & (a+b\cos\varphi)\cos\theta & 0 \\ -b\sin\varphi\cos\theta & -b\sin\varphi\sin\theta & b\cos\varphi \end{vmatrix} \\ &= b(a+b\cos\varphi)(\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi), \end{aligned}$$

så att $\left|\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\varphi\right| = b(a+b\cos\varphi)\sqrt{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = b(a+b\cos\varphi)$. Arean är

$$\iint_Y dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\varphi\right| d\theta d\varphi = b\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(a + b\cos\varphi)\,d\theta d\varphi = 2\pi b\int_0^{2\pi}(a+b\cos\varphi)\,d\varphi = \boxed{4\pi^2 ab}.$$

---

3. Sök maximum av $f(x,y,z) = x - 2y + 5z$ under bivillkoret $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + xz + yz + z^2 - 1 = 0$. Eftersom $g(x,y,z) = (x + \frac{1}{2}z)^2 + 2(y + \frac{1}{4}z)^2 + \frac{5}{8}z^2 - 1$, är mängden $\{(x,y,z) : g(x,y,z) = 0\}$ kompakt. Alltså antas maximum. Enligt Lagranges multiplikatorregel finns ett tal λ så att $\nabla f(x,y,z) = \lambda\nabla g(x,y,z)$ där maximum antas (såvida inte $\nabla g(x,y,z) = \mathbf{0}$, vilket vi kan utesluta eftersom det skulle ge $2x + z = 4y + z = x + y + 2z = 0$, $x = y = z = 0$, vilket är oförenligt med $g(x,y,z) = 0$). Vi får då

$$\begin{cases} 1 = \lambda(2x+z), \\ -2 = \lambda(4y+z), \\ 5 = \lambda(x+y+2z), \end{cases}$$

så att $\frac{1}{\lambda} = 2x + z = -\frac{1}{2}(4y+z) = \frac{1}{5}(x+y+2z)$, vilket ger $y = x$, $z = -\frac{8x}{3}$. Tillsammans med villkoret $g(x,y,z) = 0$ fås $(1+2-\frac{8}{3}-\frac{8}{3}+\frac{64}{9})x^2 = \frac{43}{9}x^2 = 1$, $x = \pm\frac{3}{\sqrt{43}}$. Vi får punkterna $(x,y,z) = \pm\frac{1}{\sqrt{43}}(3,3,-8)$ med $f(x,y,z) = \pm\frac{1}{\sqrt{43}}(3 - 6 - 40) = \mp\frac{43}{\sqrt{43}} = \mp\sqrt{43}$. Alltså är max.värdet $\boxed{\sqrt{43}}$.

---

4. Projektionen C_1 på xy-planet av kurvan C fås av $(z =)\, 1 - x^2 - y^2 = 1 - 2x - y$, dvs. $(x-1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$. Låt D vara området innanför C_1. På C är $dz = -2dx - dy$, så att

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C (xy^2z^4 + xy)\,dx + x^2yz^4\,dy + (2x^2y^2z^3 - yz)\,dz = \int_C d(\frac{1}{2}x^2y^2z^4) + xy\,dx - yz\,dz \\ &= \int_C xy\,dx - y(1 - 2x - y)(-2dx - dy) = \int_{C_1}(2y - 3xy - 2y^2)\,dx + (y - 2xy - y^2)\,dy \\ &= [\text{Greens formel}] = \iint_D (-2y - 2 + 3x + 4y)\,dxdy = \iint_D (3x + 2y)\,dxdy - 2\mu(D) \\ &= [\text{polära koord.}, x = 1 + r\cos\theta,\ y = \frac{1}{2} + r\sin\theta,\ 0 \le r \le \frac{\sqrt{5}}{2},\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ dxdy = r\,drd\theta] \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}/2}(3 + 3r\cos\theta + 1 + 2r\sin\theta)r\,drd\theta - 2\pi\Big(\frac{\sqrt{5}}{2}\Big)^2 \\ &= 2\pi\int_0^{\sqrt{5}/2} 4r\,dr - \frac{5\pi}{2} = 4\pi\left[r^2\right]_0^{\sqrt{5}/2} - \frac{5\pi}{2} = 5\pi - \frac{5\pi}{2} = \boxed{\frac{5\pi}{2}}. \end{aligned}$$

---

5. Om T är tetraedern, så är enligt Gauss' sats

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_T \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_T z\,dxdydz\,.$$

T har hörn i $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(1,2,0)$ och $(1,1,3)$. De tre sidor som går genom origo har ekvationerna $6x-3y-z=0$, $3y-z=0$ och $z=0$. Gör med ledning av detta variabelbytet $u=6x-3y-z$, $v=3y-z$, $w=z$. Då övergår T i en tetraeder T' med hörn i $(0,0,0)$, $(12,0,0)$, $(0,6,0)$ och $(0,0,3)$, alltså begränsad av koordinatplanen och planet $u+2v+4w=12$. Funktionaldeterminanten är

$$\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 18,$$

varför

$$\begin{aligned}
&\iiint_T z\,dxdydz = \iiint_{T'} w\,\frac{1}{18}\,dudvdw = \frac{1}{18}\int_0^{12} du \int_0^{(12-u)/2} dv \int_0^{(12-u-2v)/4} w\,dw \\
&= \frac{1}{18}\int_0^{12} du \int_0^{(12-u)/2} dv \left[\frac{1}{2}w^2\right]_0^{(12-u-2v)/4} = \frac{1}{2^2 3^2}\int_0^{12} du \int_0^{(12-u)/2} \frac{1}{2^4}(12-u-2v)^2\,dv \\
&= \frac{1}{2^6 3^2}\int_0^{12}\left[-\frac{1}{6}(12-u-2v)^3\right]_0^{(12-u)/2} du = \frac{1}{2^7 3^3}\int_0^{12}(12-u)^3\,du \\
&= \frac{1}{2^7 3^3}\left[-\frac{1}{4}(12-u)^4\right]_0^{12} = \frac{1}{2^9 3^3}\cdot 12^4 = \frac{2^8 3^4}{2^9 3^3} = \boxed{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

---

6. Med $s=xy$, $t=x^2y^3$ har vi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = yu'_s + 2xy^3u'_t, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = xu'_s + 3x^2y^2u'_t,$$

och vidare

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(yu'_s + 2xy^3u'_t\right) = y\frac{\partial}{\partial x}u'_s + 2xy^3\frac{\partial}{\partial x}u'_t + 2y^3u'_t \\
&= y\left(yu''_{ss} + 2xy^3u''_{st}\right) + 2xy^3\left(yu''_{ts} + 2xy^3u''_{tt}\right) + 2y^3u'_t \\
&= y^2u''_{ss} + 4xy^4u''_{st} + 4x^2y^6u''_{tt} + 2y^3u'_t, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(xu'_s + 3x^2y^2u'_t\right) = x\frac{\partial}{\partial x}u'_s + u'_s + 3x^2y^2\frac{\partial}{\partial x}u'_t + 6xy^2u'_t \\
&= x\left(yu''_{ss} + 2xy^3u''_{st}\right) + 3x^2y^2\left(yu''_{ts} + 2xy^3u''_{tt}\right) + u'_s + 6xy^2u'_t \\
&= xyu''_{ss} + 5x^2y^3u''_{st} + 6x^3y^5u''_{tt} + u'_s + 6xy^2u'_t, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(xu'_s + 3x^2y^2u'_t\right) = x\frac{\partial}{\partial y}u'_s + 3x^2y^2\frac{\partial}{\partial y}u'_t + 6x^2yu'_t \\
&= x\left(xu''_{ss} + 3x^2y^2u''_{st}\right) + 3x^2y^2\left(xu''_{ts} + 3x^2y^2u''_{tt}\right) + 6x^2yu'_t \\
&= x^2u''_{ss} + 6x^3y^2u''_{st} + 9x^4y^4u''_{tt} + 6x^2yu'_t.
\end{aligned}$$

Insatt i differentialekvationen fås

$$\begin{aligned}
&3x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} \\
&= 3x^2\left(y^2u''_{ss} + 4xy^4u''_{st} + 4x^2y^6u''_{tt} + 2y^3u'_t\right) - 5xy\left(xyu''_{ss} + 5x^2y^3u''_{st} + 6x^3y^5u''_{tt} + u'_s + 6xy^2u'_t\right) \\
&\quad + 2y^2\left(x^2u''_{ss} + 6x^3y^2u''_{st} + 9x^4y^4u''_{tt} + 6x^2yu'_t\right) + 3x\left(yu'_s + 2xy^3u'_t\right) + 2y\left(xu'_s + 3x^2y^2u'_t\right) \\
&= \left(3x^2y^2 - 5x^2y^2 + 2x^2y^2\right)u''_{ss} + \left(12x^3y^4 - 25x^3y^4 + 12x^3y^4\right)u''_{st} + \left(12x^4y^6 - 30x^4y^6 + 18x^4y^6\right)u''_{tt} \\
&\quad + \left(-5xy + 3xy + 2xy\right)u'_s + \left(6x^2y^3 - 30x^2y^3 + 12x^2y^3 + 6x^2y^3 + 6x^2y^3\right)u'_t \\
&= -x^3y^4u''_{st} = 0.
\end{aligned}$$

Alltså reduceras differentialekvationen till $u''_{st}=0$. Av $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial s})=0$ fås $\frac{\partial u}{\partial s}=F_1(s)$, $u=\int F_1(s)\,ds + G(t) = F(s)+G(t)$, där $F(s)$ och $G(t)$ är godtyckliga C^1-funktioner. Lösningen till den givna ekvationen är alltså $\boxed{u(x,y)=F(xy)+G(x^2y^3)}$.

Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del B** den 18/1 2002, kl. 14.15–18.15.

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.
Telefon: Hanna Martinsson, tel 0740-45 90 22.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Taylorutveckla funktionen

$$f(x,y) = \sin(x+y^2)\ln(1+2x-3y) - \frac{1}{1+x^2+y^2}$$

kring origo med termer t.o.m. tredje graden. Visa att har f en stationär punkt i origo och avgör dess karaktär. (8p)

2. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D y\sin(3y-2x)\,dxdy$, då D är fyrhörningen med hörn i $(0,0)$, $(3,2)$, $(0,3)$ och $(-3,1)$. (8p)

3. Bestäm maximum av $x+y-2z$, då $x^2+y^2+3z^2-xy+2xz=5$. (7p)

4. Beräkna $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, då Y är halvsfären $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0\}$ med normalriktning uppåt, och

$$\mathbf{F} = \left(xy^2z,\ x^2yz, e^z\right). \qquad (8p)$$

5. Lös differentialekvationen

$$ye^x u'_x + (y^2+1)u'_y = y, \quad y>0,$$

och bestäm en lösning som uppfyller $u(0,y)=y^2$. (7p)

6. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, då

$$\mathbf{F} = \frac{(2x-y^2,\ 4y^3+2xy)}{x^2+y^4},$$

och γ är cirkelbågen $x^2+y^2=1$ i första kvadranten från $(1,0)$ till $(0,1)$. (7p)

7. Bevisa kedjeregeln för derivering av den sammansatta funktionen $f(\mathbf{g}(t))$. (7p)

8. a. Ange vad som menas med att ett vektorfält $\mathbf{F}=(P,Q)$ är ett potentialfält. (2p)

   b. Låt $\mathbf{F}=(P,Q)$ vara ett potentialfält med potential U. Visa hur $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ kan beräknas med hjälp av U. (6p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 18/1 2002

1. Med hjälp, av envariabelutvecklingarna $\sin t = t + O(t^3)$, $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$, $\frac{1}{1+t} = 1 - t + O(t^2)$, då $t \to 0$, fås

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \Big(x + y^2 + O(r^3)\Big)\Big(2x - 3y - \frac{1}{2}(2x-3y)^2 + O(r^3)\Big) - \Big(1 - (x^2+y^2) + O(r^4)\Big) \\ &= -1 + 3x^2 - 3xy + y^2 - 2x^3 + 6x^2y - \frac{5}{2}xy^2 - 3y^3 + O(r^4), \end{aligned}$$

då $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$. Detta är den sökta Taylorutvecklingen. Det framgår att $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, så att origo är en stationär punkt. Eftersom den kvadratiska formen $3x^2 - 3xy + y^2$ kan skrivas $(y - \frac{3}{2}x)^2 + \frac{3}{4}x^2$, är den positivt definit, och origo är en minimipunkt.

---

2. Fyrhörningen är en parallellogram som begränsas av linjerna $3y - 2x = 0$, $3y - 2x = 9$, $x + 3y = 0$ och $x + 3y = 9$. Sätt $u = 3y - 2x$, $v = x + 3y$. Då motsvaras D av $D' = \{(u,v) : 0 \le u \le 9,\ 0 \le v \le 9\}$. Vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -9, \quad dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \frac{1}{9}dudv,$$

och vidare är $y = \frac{1}{9}(u+2v)$. Alltså är

$$\begin{aligned} \iint_D y\sin(3y-2x)\ dxdy &= \iint_{D'} \frac{1}{9}(u+2v)\sin u\,\frac{1}{9}\,dudv = \frac{1}{81}\int_0^9 \left\{\int_0^9 (u+2v)\sin u\,du\right\} dv \\ &= \frac{1}{81}\int_0^9 \left\{[-(u+2v)\cos u]_0^9 + \int_0^9 \cos u\,du\right\} dv = \frac{1}{81}\int_0^9 (2v(1-\cos 9) - 9\cos 9 + \sin 9)\ dv \\ &= \boxed{1 - 2\cos 9 + \frac{1}{9}\sin 9}. \end{aligned}$$

---

3. Sök maximum av $f(x,y,z) = x + y - 2z$ under bivillkoret $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy + 2xz = 5$. Eftersom $g(x,y,z) = (y - \frac{1}{2}x)^2 + 3(z + \frac{1}{3}x)^2 + \frac{5}{12}x^2$, är mängden $\{(x,y,z) : g(x,y,z) = 5\}$ kompakt. Alltså antas maximum. Enligt Lagranges multiplikatorregel finns ett tal λ så att $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$ där maximum antas (såvida inte $\nabla g(x,y,z) = \mathbf{0}$, vilket vi kan utesluta eftersom det skulle ge $2x - y + 2z = 2y - x = 6z + 2x = 0$, $x = y = z = 0$, vilket är oförenligt med $g(x,y,z) = 5$). Vi får då

$$\begin{cases} 1 = \lambda(2x - y + 2z), \\ 1 = \lambda(2y - x), \\ -2 = \lambda(6z + 2x), \end{cases}$$

så att

$$\frac{1}{\lambda} = 2x - y + 2z = 2y - x = -3z - x, \qquad y = -\frac{3z}{2}, x = y - \frac{2z}{3} = -\frac{13z}{6}.$$

Tillsammans med villkoret $g(x,y,z) = 5$ fås $(\frac{169}{36} + \frac{9}{4} + 3 - \frac{13}{4} - \frac{13}{3})z^2 = \frac{85}{36}z^2 = 5$, $z = \pm\frac{6}{\sqrt{17}}$. Vi får punkterna $(x,y,z) = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}(-13,-9,6)$ med $f(x,y,z) = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}(-13-9-12) = \mp\frac{34}{\sqrt{17}} = \mp 2\sqrt{17}$. Alltså är max.värdet $\boxed{2\sqrt{17}}$.

---

4. Komplettera Y med "botten" $Y_1 = \{(x,y,0) : x^2+y^2 \le 1\}$, så att $Y+Y_1$ blir rand till halvklotet $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0\}$. Använd Gauss' sats:

$$\begin{aligned}
\iint_{Y+Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_K ((x^2+y^2)z + e^z)\,dxdydz \\
&= [\text{rymdpolära koord.}] = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^3\sin^2\theta\cos\theta + e^{r\cos\theta})r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi \\
&= 2\pi\int_0^1 r^5\,dr \int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\,d\theta + 2\pi\int_0^1 r\left\{\int_0^{\pi/2} e^{r\cos\theta} r\sin\theta\,d\theta\right\}dr \\
&= 2\pi\frac{1}{6}\left[\frac{1}{4}\sin^4\theta\right]_0^{\pi/2} + 2\pi\int_0^1 r\left[-e^{r\cos\theta}\right]_0^{\pi/2} dr = \frac{\pi}{12} + 2\pi\int_0^1 (re^r - r)\,dr \\
&= \frac{\pi}{12} + 2\pi\left[(r-1)e^r - \frac{1}{2}r^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12}.
\end{aligned}$$

Nu är $\iint_{Y+Y_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_{Y_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, och

$$\iint_{Y_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{Y_1}\mathbf{F}(x,y,0)\cdot(0,0,-1)\,dxdy = -\iint_{Y_1} dxdy = -\pi.$$

Alltså är $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \frac{13\pi}{12} + \pi = \boxed{\frac{25\pi}{12}}$.

---

5. Karakteristikernas differentialekvation i xy-planet:

$$\frac{dx}{ye^x} = \frac{dy}{y^2+1},$$

med lösning $-e^{-x} = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) - C$, $e^{-x} + \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = C$. Gör variabelbytet $s = e^{-x} + \frac{1}{2}\ln(y^2+1)$, $t = x$. Då är

$$\begin{aligned}
u'_x &= \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = -e^{-x}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}, \\
u'_y &= \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{y}{y^2+1}\frac{\partial u}{\partial s},
\end{aligned}$$

och

$$ye^x u'_x + (y^2+1)u'_y = -y\frac{\partial u}{\partial s} + ye^x\frac{\partial u}{\partial t} + y\frac{\partial u}{\partial s} = ye^x\frac{\partial u}{\partial t} = y,$$

dvs. $\frac{\partial u}{\partial t} = e^{-x} = e^{-t}$. Alltså är $u = -e^{-t} + f(s)$, $u(x,y) = -e^{-x} + f(e^{-x} + \frac{1}{2}\ln(y^2+1))$. Lösningen skall uppfylla $u(0,y) = -1 + f(1 + \frac{1}{2}\ln(y^2+1)) = y^2$. Med $s = 1 + \frac{1}{2}\ln(y^2+1)$ blir $y^2+1 = e^{2(s-1)}$, och vi får $f(s) = e^{2(s-1)}$. Alltså blir lösningen

$$u(x,y) = -e^{-x} + e^{2(e^{-x}+\frac{1}{2}\ln(y^2+1)-1)} = \boxed{(y^2+1)e^{2(e^{-x}-1)} - e^{-x}}.$$

---

6. Med $y^2 = y_1$ är

$$I = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \frac{(2x-y^2)dx + (4y^3+2xy)dy}{x^2+y^4} = \int_{\gamma_1}\frac{(2x-y_1)dx + (2y_1+x)dy_1}{x^2+y_1^2},$$

där γ_1 är en parabelbåge i första kvadranten (i (x,y_1)-planet) från $(1,0)$ till $(0,1)$. Med polära koordinater i (x,y_1)-planet är

$$\frac{(2x-y_1)dx + (2y_1+x)dy_1}{x^2+y_1^2} = 2\frac{xdx + y_1dy_1}{x^2+y_1^2} + \frac{-y_1dx + xdy_1}{x^2+y_1^2} = d\ln r^2 + d\theta,$$

så att

$$I = \int_{\gamma_1} d(\ln r^2 + \theta) = \left[\ln r^2 + \theta\right]_{(1,0)}^{(0,1)} = \ln 1 + \frac{\pi}{2} - \ln 1 - 0 = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del B** den 11/3 2002, kl. 8.45–12.45.

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa. Observera dock ”Några Maclaurinutvecklingar” på baksidan.
Telefon: Johan Hoffman, tel 0740-45 90 22.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. a. Taylorutveckla funktionen

$$f(x,y) = \ln(1+x-2y) + 2\sqrt{\cos(2x+y)}$$

kring origo och tag med termer t.o.m. andra graden (plus restterm). (4p)

b. Det finns konstanter a och b så att

$$\frac{f(x,y) - 2 + ax + by}{x^2+y^2}$$

har ett gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$. Bestäm a och b och gränsvärdet. (3p)

2. a. Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen $f(x,y) = (y^2 - 2x)e^{x-2y}$ och avgör deras karaktär. (4p)

b. Bestäm största och minsta värde av av $f(x,y)$ i mängden

$$\{(x,y) : 0 \le x \le \frac{y^2}{2},\ 0 \le y \le 3\}. \qquad (4p)$$

3. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D xy^2\,dxdy$, då D är det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna

$$y = x, \quad y = 3x, \quad y = \frac{1}{x^2}, \quad y = \frac{2}{x^2}. \qquad (8p)$$

4. Beräkna $\iint_{\partial K} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, då K är kroppen

$$K = \{(x,y,z) : x^2 \le z \le 2 - x^2 - y^2\}$$

med utåtriktad normal, och

$$\mathbf{F} = (xy,\ xyz,\ z - yz)\,. \qquad (8p)$$

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, då

$$\mathbf{F} = \frac{(2x-3y,\ 3x+2y)}{x^2+y^2},$$

och γ är kurvan $x + 2y^2 = 1$ $(y \ge 0)$ från $(1,0)$ till $(-1,1)$. (7p)

6. Lös differentialekvationen

$$xe^{xy}u'_x - (1 + ye^{xy})u'_y = xu, \quad x > 0,$$

och bestäm en lösning som uppfyller $u(1,y) = y$. (7p)

7. Formulera och bevisa Greens formel. (8p)

8. Betrakta problemet att maximera eller minimera $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y) = 0$, där f och g är C^1-funktioner. Antag att punkten (a,b) ger optimum. Visa att $\operatorname{grad} f(a,b)$ och $\operatorname{grad} g(a,b)$ är parallella (linjärt beroende). (7p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 11/3 2002

1. a. Med hjälp av envariabelutvecklingarna $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$, $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$, $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + O(t^2)$, då $t \to 0$, fås

$$\ln(1+x-2y) = x - 2y - \frac{1}{2}(x-2y)^2 + O(r^3) = x - 2y - \frac{1}{2}x^2 + 2xy - 2y^2 + O(r^3),$$
$$\cos(2x+y) = 1 - \frac{1}{2}(2x+y)^2 + O(r^4) = 1 + v,\; v = -2x^2 - 2xy - \frac{1}{2}y^2 + O(r^4),$$
$$\sqrt{\cos(2x+y)} = \sqrt{1+v} = 1 + \frac{1}{2}v + O(v^2) = 1 - x^2 - xy - \frac{1}{4}y^2 + O(r^4),$$

där $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$. Alltså är

$$f(x,y) = \ln(1+x-2y) + 2\sqrt{\cos(2x+y)} = \boxed{2 + x - 2y - \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{2}y^2 + O(r^3)}.$$

b. $\frac{f(x,y)-2-x+2y}{x^2+y^2} = -\frac{5}{2} + O(r) \to \boxed{-\frac{5}{2}}$ då $(x,y) \to (0,0)$, dvs. $\boxed{a=-1,\; b=2}$.

---

2. a. För $f(x,y) = (y^2-2x)e^{x-2y}$ är

$$f'_x(x,y) = (y^2-2x-2)e^{x-2y},$$
$$f'_y(x,y) = (-2y^2+4x+2y)e^{x-2y},$$

så de stationära punkterna satisfierar $y^2 - 2x = 2 = y$. Vi får den stationära punkten $(1,2)$.

$$f''_{xx}(x,y) = (y^2-2x-2-2)e^{x-2y},$$
$$f''_{xy}(x,y) = (-2(y^2-2x-2)+2y)e^{x-2y},$$
$$f''_{yy}(x,y) = (-2(-2y^2+4x+2y)-4y+2)e^{x-2y}.$$

I $(1,2)$ är $A = f''_{xx}(1,2) = -2e^{-3}$, $B = f''_{xy}(1,2) = 4e^{-3}$, $C = f''_{yy}(1,2) = -6e^{-3}$. Se på den kvadratiska formen $Q = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = (-2h^2 + 8hk - 6k^2)e^{-3} = -2[(h-2k)^2 - k^2]e^{-3}$. Då den är indefinit, så är den stationära punkten $\underline{(1,2)\text{ en sadelpunkt}}$.

b. I mängden $D = \{(x,y) : 0 \le x \le \frac{y^2}{2},\; 0 \le y \le 3\}$ är $f(x,y) \ge 0$, och $\underline{\text{minimivärdet } 0}$ antas längs kurvan $x = \frac{y^2}{2}$. Maximum antas också på randen, eftersom den enda stationära punkten är en sadelpunkt. Längs $x = 0$, $0 \le y \le 3$ är $f(0,y) = y^2e^{-2y}$, vars derivata $(2y-2y^2)e^{-2y}$ är 0 för $y = 1$, så längs den delen av randen är maximivärdet e^{-2}. Längs $y = 3$, $0 \le x \le \frac{9}{2}$ är $f(x,3) = (9-2x)e^{x-6}$, vars derivata $(7-2x)e^{x-6}$ är 0 för $x = \frac{7}{2}$, och maximum längs den delen av randen är $2e^{-5/2}$. Nu är $2e^{-5/2} > e^{-2}$ (följer av att $e < 4$), så $\underline{\text{maximivärdet}}$ över D är $\underline{2e^{-5/2}}$.

---

3. Sätt $u = \frac{y}{x}$, $v = x^2y$. Då blir integrationsområdet i uv-planet $D' = \{(u,v) : 1 \le u \le 3,\; 1 \le v \le 2\}$. Vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 2xy & x^2 \end{vmatrix} = -y - 2y = -3y, \quad dxdy = \frac{1}{\left|\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right|}dudv = \frac{1}{3y}dudv,$$

och vidare är $x = \frac{y}{u}$, $v = \frac{y^3}{u^2}$, så att $y = u^{2/3}v^{1/3}$, $x = u^{-1/3}v^{1/3}$. Alltså är

$$\iint_D xy^2\,dxdy = \frac{1}{3}\iint_{D'} xy\,dudv = \frac{1}{3}\iint_{D'} u^{1/3}v^{2/3}\,dudv = \frac{1}{3}\int_1^3 u^{1/3}\,du \cdot \int_1^2 v^{2/3}\,dv$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{3}{4}u^{4/3}\right]_1^3 \left[\frac{3}{5}v^{5/3}\right]_1^2 = \boxed{\frac{3}{20}(3^{4/3}-1)(2^{5/3}-1)}.$$

---

4. Kroppens projektion på xy-planet fås av $x^2 \le 2 - x^2 - y^2$, dvs. $2x^2 + y^2 \le 2$; en ellips D. Gauss' sats ger

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz = \iiint_K (y + xz + 1 - y)\, dxdydz \\ &= \iiint_K xz\, dxdydz + \iiint_K dxdydz. \end{aligned}$$

Den första integralen i sista ledet är 0, eftersom kroppen är symmetrisk m.a.p. yz-planet och integranden är udda i x. Alltså är

$$I = \iint_D (2 - x^2 - y^2 - x^2)\, dxdy = \iint_D (2 - 2x^2 - y^2)\, dxdy.$$

Med elliptiskt-polära koordinater $x = \frac{1}{\sqrt{2}} r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ dxdy = \frac{1}{\sqrt{2}} r\, drd\varphi$ blir

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2) \frac{1}{\sqrt{2}} r\, drd\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2r - r^3)\, dr = \sqrt{2}\pi \left[r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = \boxed{\pi\sqrt{2}}.$$

5.

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \frac{(2x - 3y)dx + (3x + 2y)dy}{x^2 + y^2} = \int_\gamma \frac{2x\, dx + 2y\, dy}{x^2 + y^2} + 3 \int_\gamma \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2 + y^2}.$$

Med polära koordinater r och φ blir

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma d(\ln r^2) + 3 \int_\gamma d\varphi = \left[\ln r^2 + 3\varphi \right]_{(1,0)}^{(-1,1)} = \ln 2 + 3 \cdot \frac{3\pi}{4} - \ln 1 - 0 = \boxed{\ln 2 + \frac{9\pi}{4}}.$$

---

6. Karakteristikernas differentialekvation (i xy-planet) är

$$\frac{dx}{xe^{xy}} = -\frac{dy}{1 + ye^{xy}}, \qquad (1 + ye^{xy})dx + xe^{xy} dy = 0, \qquad d(x + e^{xy}) = 0.$$

Detta är alltså en exakt differentialekvation med lösning $x + e^{xy} = C$. Sätt $s = x + e^{xy}$, $t = x$. Då är

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = (1 + ye^{xy})\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}, \\ u'_y &= \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = xe^{xy}\frac{\partial u}{\partial s}, \end{aligned}$$

och

$$xe^{xy}u'_x - (1 + ye^{xy})u'_y = xe^{xy}(1 + ye^{xy})\frac{\partial u}{\partial s} + xe^{xy}\frac{\partial u}{\partial t} - (1 + ye^{xy})xe^{xy}\frac{\partial u}{\partial s} = xe^{xy}\frac{\partial u}{\partial t} = xu,$$

dvs. (eftersom $e^{xy} = s - t$)

$$(s - t)\frac{\partial u}{\partial t} = u, \qquad \frac{\partial}{\partial t}((s - t)u) = 0, \qquad (s - t)u = g(s),$$

där g är en godtycklig (deriverbar) funktion av en variabel. Alltså är differentialekvationens allmänna lösning

$$u(x, y) = e^{-xy} g(x + e^{xy}).$$

Bestäm g så att $u(1, y) = e^{-y} g(1 + e^y) = y$. Med $s = 1 + e^y$ blir $y = \ln(s - 1)$, och $g(s) = ye^y = (s - 1)\ln(s - 1)$. Då blir differentialekvationens lösning $\boxed{u(x, y) = e^{-xy}(x + e^{xy} - 1)\ln(x + e^{xy} - 1)}$.

Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del B** den 28/8 2002, kl. 8.45–12.45.
Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.
Telefon: Anton Evgrafov, tel 0740-45 90 22.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Bestäm alla stationära punkter till funktionen $f(x, y) = x^2y + y^3 - x^2 - 2y^2$ och ange deras karaktär. (8p)

2. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \left(\frac{x+y}{x}\right)^2 dxdy$, då D är fyrhörningen med hörn i $(2, 0)$, $(4, 0)$, $(2, 2)$ och $(1, 1)$. (7p)

3. Minimera $x^2 + y^2 + z^2$ då $4x^2 - 3xy + 6z = 9$, dvs. bestäm den eller de punkter på ytan $4x^2 - 3xy + 6z = 9$ som ligger närmast origo. (7p)

4. Beräkna $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$, då
$$\mathbf{F} = (xz^2 - yz, x^2 - z^2, z^3 + y^2),$$
och Y är ytan $z = 1 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$, med normalriktning uppåt. (8p)

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, då
$$\mathbf{F} = (2xye^{yz} + yz^2, x^2e^{yz} + x^2yze^{yz}, x^2y^2e^{yz} - yz),$$
och γ är skärningen mellan ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, och $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Kurvans projektion på xy-planet är positivt orienterad. (7p)

6. Visa att variabelbytet $s = x^2 - y^2$, $t = 2xy$ lämnar differentialekvationen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ invariant, dvs. att den transformeras till $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. (7p)

7. Härled Taylors formel för en funktion av två variabler med restterm av ordning 3. (8p)

8. Visa att om funktionen $f(x, y)$ är kontinuerlig på den kompakta rektangeln
$$\Delta = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$
så är f integrerbar över denna. (8p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 28/8 2002

1. Sök stationära punkter för $f(x,y) = x^2y + y^3 - x^2 - 2y^2$:

$$f'_x = 2xy - 2x = 2x(y-1) = 0,$$
$$f'_y = x^2 + 3y^2 - 4y = 0.$$

Ur första ekvationen fås antingen $x = 0$ eller $y = 1$. Om $x = 0$ ger andra ekvationen $3y^2 - 4y = 0$, dvs. $y = 0$ eller $y = \frac{4}{3}$. Om $y = 1$ fås $x^2 = 4y - 3y^2 = 1$. De stationära punkterna är alltså $(0,0)$, $(0, \frac{4}{3})$ och $(\pm 1, 1)$. För $x = 0$, $y = 0$ har vi

$$A = f''_{xx} = 2y - 2 = -2, \quad B = f''_{xy} = 2x = 0, \quad C = f''_{yy} = 6y - 4 = -4.$$

Se på den kvadratiska formen

$$Q = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = -2h^2 - 4k^2.$$

Det är tydligt att Q är negativt definit. Alltså har f <u>lokalt maximum i $(0,0)$</u>. I $(0, \frac{4}{3})$ är $A = \frac{2}{3}$, $B = 0$, $C = 4$ och $Q = \frac{2}{3}h^2 + 4k^2$. Eftersom Q är positivt definit, har f <u>lokalt minimum i $(0, \frac{4}{3})$</u>. I $(\pm 1, 1)$ är $A = 0$, $B = \pm 2$, $C = 2$, och $Q = \pm 4hk + 2k^2 = 2k(k \pm 2h)$, som är indefinit. Alltså föreligger <u>sadelpunkter i $(\pm 1, 1)$</u>.

---

2. Området D begränsas av linjerna $y = 0$, $y = x$, $x + y = 2$ och $x + y = 4$. Sätt $u = x + y$, $v = \frac{y}{x}$. Då motsvaras D av $D' = \{(u,v) : 2 \leq u \leq 4,\ 0 \leq v \leq 1\}$. Vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{x+y}{x^2}, \qquad dxdy = \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| dudv = \frac{x^2}{x+y} dudv,$$

så att

$$\iint_D \left(\frac{x+y}{x} \right)^2 dxdy = \iint_{D'} (x+y)\, dudv = \iint_{D'} u\, dudv = \int_0^1 \left\{ \int_2^4 u\, du \right\} dv = \left[\frac{u^2}{2} \right]_2^4 = \boxed{6}.$$

---

3. Vi söker minimum av $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, då $g(x,y,z) = 4x^2 - 3xy + 6z = 9$. Enligt Lagranges multiplikatorregel finns ett tal λ så att $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$ där minimum antas (eftersom $\nabla g(x,y,z) \neq \mathbf{0}$). Vi får då

$$\begin{cases} 2x = \lambda(8x - 3y), \\ 2y = -\lambda \cdot 3x, \\ 2z = \lambda \cdot 6, \end{cases}$$

så att $z = 3\lambda$, $y = -\frac{3\lambda}{2}x$, och $2x = \lambda x(8 + \frac{9\lambda}{2})$. En lösning är $x = 0$, vilket ger $y = 0$, $z = \frac{3}{2}$ (ur $g(x,y,z) = 9$) och $f(x,y,z) = \frac{9}{4}$. Om $x \neq 0$, fås $2 = \lambda(8 + \frac{9\lambda}{2})$ med lösningar $\lambda = \frac{2}{9}$ och $\lambda = -2$. För $\lambda = \frac{2}{9}$ fås $y = -\frac{1}{3}x$, $z = \frac{2}{3}$ och $g(x,y,z) = 4x^2 + x^2 + 4 = 9$, $x^2 = 1$, $f(x,y,z) = \frac{14}{9}$. För $\lambda = -2$ fås $y = 3x$, $z = -6$ och $g(x,y,z) = 4x^2 - 9x^2 - 36 = 9$, $x^2 = -9$, dvs. lösning saknas. Eftersom $\frac{14}{9} < \frac{9}{4}$, fås <u>minimum i punkterna $(\pm 1, \mp\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$</u>, och <u>minimivärdet är $\frac{14}{9}$</u>.

---

4. Komplettera Y med "botten" $Y_1 = \{(x,y,0) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, så att $Y + Y_1$ blir rand till kroppen $K = \{(x,y,z) : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Använd Gauss' sats:

$$\iint_{Y+Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz = \iiint_K 4z^2\, dxdydz = \iint_{Y_1} \left\{ \int_0^{1-x^2-y^2} 4z^2\, dz \right\} dxdy$$
$$= \iint_{Y_1} \frac{4}{3}(1 - x^2 - y^2)^3\, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{4}{3}(1 - r^2)^3 r\, dr d\varphi$$
$$= 2\pi \left[-\frac{1}{6}(1 - r^2)^4 \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

Nu är $\iint_{Y+Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, och

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{Y_1} \mathbf{F}(x,y,0)\cdot(0,0,-1)\,dxdy = -\iint_{Y_1} y^2\,dxdy = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\sin^2\varphi\, r\,drd\varphi$$
$$= -\int_0^1 r^3\,dr\cdot\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = -\frac{\pi}{4}.$$

Alltså är $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{4}) = \boxed{\dfrac{7\pi}{12}}$.

---

5. Ytan $x^2+y^2-2x=0$ är den cirkulära cylindern $(x-1)^2+y^2=1$, $-\infty<z<\infty$; där är $0\le x\le 2$. På γ är $z=\sqrt{4-2x}$, och dess projektion γ_1 på xy-planet är därmed hela cirkeln $(x-1)^2+y^2=1$.

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma 2xye^{yz}\,dx + yz^2\,dx + x^2e^{yz}\,dy + x^2yze^{yz}\,dy + x^2y^2e^{yz}\,dz - yz\,dz$$
$$= \int_\gamma d(x^2ye^{yz}) + yz^2\,dx - yz\,dz = \int_\gamma yz^2\,dx - yz\,dz\,.$$

På γ är $z^2=4-2x$, $2z\,dz=-2\,dx$, så att

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma y(4-2x)\,dx + y\,dx = \int_{\gamma_1}(5y-2xy)\,dx = [\text{Greens formel}]$$
$$= \iint_{(x-1)^2+y^2\le 1}(2x-5)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 [2(1+r\cos\varphi)-5]\,r\,drd\varphi$$
$$= -3\cdot 2\pi\int_0^1 r\,dr + \int_0^1 2r^2\,dr\cdot\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = -6\pi\cdot\frac{1}{2} = \boxed{-3\pi}.$$

---

6. Med $s=x^2-y^2$, $t=2xy$, har vi $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 2x\frac{\partial u}{\partial s} + 2y\frac{\partial u}{\partial t}$ och $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y\frac{\partial u}{\partial s} + 2x\frac{\partial u}{\partial t}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(2x\frac{\partial u}{\partial s} + 2y\frac{\partial u}{\partial t}) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y\frac{\partial u}{\partial s} + 2x\frac{\partial u}{\partial t})$$
$$= 2x\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial s}) + 2\frac{\partial u}{\partial s} + 2y\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial t}) - 2y\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial s}) - 2\frac{\partial u}{\partial s} + 2x\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial t})$$
$$= 2x[2x\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial u}{\partial s}) + 2y\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial s})] + 2y[2x\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial u}{\partial t}) + 2y\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial t})]$$
$$- 2y[-2y\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial u}{\partial s}) + 2x\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial s})] + 2x[-2y\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial u}{\partial t}) + 2x\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial t})]$$
$$= 4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 4xy\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s} + 4xy\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} + 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$+ 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - 4xy\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s} - 4xy\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} + 4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$= 4(x^2+y^2)(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}),$$

så att $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ medför $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$.

Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del B** den 17/1 2003, kl. 8.45–12.45.
Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.
Telefon: Tobias Gebäck, tel 0740-45 90 22.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. a. Beräkna tangentplanet till ytan $e^z + (x+y)z - x^3 + y = 2$ i punkten $P = (1,2,0)$. (4p)

   b. Motivera att ytan lokalt kring P är en funktionsyta $z = f(x,y)$. Beräkna $f_x'(1,2)$ och $f_y'(1,2)$. (3p)

2. Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x,y) = 2x^3y - xy^2 - 5x$ i mängden $\{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$. (8p)

3. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \frac{1}{x^2} e^{\frac{y}{x}}\, dxdy$, då D är det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna
$$y = x, \quad y = 2x, \quad x + y = 1, \quad x + y = 3.$$ (7p)

4. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, då
$$\mathbf{F} = (zy^2 e^{xy^2}, 2xyze^{xy^2} + xy^2, e^{xy^2}),$$
och γ är spiralen $\mathbf{r} = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \le t \le 4\pi$. (7p)

5. Beräkna ytintegralen $\iint_Y (x^2 - 3y)\, dS$, då Y är triangelytan med hörnen $(1,0,0)$, $(2,1,0)$ och $(3,1,1)$. (8p)

6. Transformera differentialekvationen
$$2x^2 f''_{xx} - y^2 f''_{yy} - xy f''_{xy} + 4x f'_x = 0$$
genom att göra variabelbytet $s = xy$, $t = \frac{x}{y^2}$ $(x > 0,\ y > 0)$. Lös därefter ekvationen. (7p)

7. Visa att under lämpliga förutsättningar på funktionen $f(x,y)$ gäller att $f''_{xy} = f''_{yx}$. (8p)

8. Låt $f(x,y)$ vara kontinuerlig på ett kompakt område D. Dela in D i delområden. Vad menas med en Riemannsumma hörande till en viss indelning? Visa att Riemannsummorna konvergerar mot $\iint_D f(x,y)\, dxdy$ då indelningens finhet går mot noll. (8p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 17/1 2003

1. a. Ytan är en nivåyta till funktionen $F(x,y,z) = e^z + (x+y)z - x^3 + y$. Tangentplanet i $P = (1,2,0)$ har normalvektorn $\nabla F(P)$. Vi har $\nabla F = (z - 3x^2, z+1, e^z + x + y)$ och $\nabla F(P) = (-3,1,4)$. Tangentplanets ekvation är $-3 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-2) + 4 \cdot (z-0) = 0$, dvs. $\boxed{-3x + y + 4z + 1 = 0}$.

   b. Eftersom $F'_z(P) = 4 \neq 0$, säger implicita funktionssatsen att man lokalt kring P kan lösa $F(x,y,z) = 2$ på formen $z = f(x,y)$, där f är en C^1-funktion. Implicit derivering ger $F'_x + F'_z z'_x = 0$ och $F'_y + F'_z z'_y = 0$, varav $f'_x(1,2) = -F'_x(P)/F'_z(P) = \boxed{\frac{3}{4}}$, och $f'_y(1,2) = -F'_y(P)/F'_z(P) = \boxed{-\frac{1}{4}}$. (Detta kan också avläsas ur tangentplanets ekvation.)

---

2. Studera $f(x,y) = 2x^3y - xy^2 - 5x$ för $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$. Bestäm först ev. inre stationära punkter:

$$f'_x = 6x^2y - y^2 - 5 = 0,$$
$$f'_y = 2x^3 - 2xy = 2x(x^2 - y) = 0.$$

Eftersom vi vill ha $x > 0$ fås ur andra ekvationen $y = x^2$, och sedan ger första ekvationen $6x^4 - x^4 - 5 = 5x^4 - 5 = 0$, så att $x^4 = 1$, $x = 1$, $y = 1$.
Betrakta sedan randen. Vi skall undersöka $f_1(x) = f(x,0) = -5x$, $f_2(x) = f(x,2) = 4x^3 - 9x$, $f_3(y) = f(0,y) = 0$ och $f_4(y) = f(2,y) = 16y - 2y^2 - 10$ för $0 \leq x \leq 2$ och $0 \leq y \leq 2$. f_1 är strängt avtagande, och f_3 är konstant. Vidare är $f'_2(x) = 12x^2 - 9 = 0$ för $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, och $f'_4(y) = 16 - 4y > 0$ för $0 \leq y \leq 2$. Intresssanta funktionsvärden är $f(1,1) = -4$, $f(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2) = -3\sqrt{3}$ och värdena i hörnpunkterna $f(0,0) = f(0,2) = 0$, $f(2,0) = -10$, $f(2,2) = 14$. $\boxed{\text{Maximum är } f(2,2) = 14}$ och $\boxed{\text{minimum är } f(2,0) = -10}$.

---

3. Sätt $u = \frac{y}{x}$, $v = x + y$. Då blir integrationsområdet i uv-planet $D' = \{(u,v) : 1 \leq u \leq 2,\ 1 \leq v \leq 3\}$. Vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x} = -\frac{x+y}{x^2}, \quad dxdy = \frac{1}{\left|\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right|} dudv = \frac{x^2}{x+y} dudv.$$

Alltså är

$$\iint_D \frac{1}{x^2} e^{\frac{y}{x}}\, dxdy = \iint_{D'} \frac{1}{v} e^u\, dudv = \int_1^2 e^u\, du \int_1^3 \frac{1}{v}\, dv = \boxed{(e^2 - e)\ln 3}.$$

---

4. Vi har $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, där $\mathbf{F}_1 = (zy^2e^{xy^2}, 2xyze^{xy^2}, e^{xy^2})$ och $\mathbf{F}_2 = (0, xy^2, 0)$.

$$\int_\gamma \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma zy^2e^{xy^2}dx + 2xyze^{xy^2}dy + e^{xy^2}dz = \int_\gamma d(ze^{xy^2})$$
$$= \left[ze^{xy^2}\right]_{(1,0,0)}^{(1,0,4\pi)} = 4\pi.$$

Kurvans projektion på xy-planet är enhetscirkeln C genomlöpt två varv i positiv led. Om D är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$, ger Greens formel

$$\int_\gamma \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma xy^2 dy = 2\int_C xy^2 dy = 2\iint_D y^2\, dxdy = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^1 r^3 dr = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Alltså är $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 4\pi + \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{9\pi}{2}}$.

---

5. Det plan som går genom punkterna $(1,0,0)$, $(2,1,0)$ och $(3,1,1)$ spänns upp av vektorerna $(1,1,0)$ och $(2,1,1)$. Därför är planets (och Y:s) normalriktning $(1,1,0)\times(2,1,1)=(1,-1,-1)$. Den uppåtriktade enhetsnormalen är $\mathbf{n}=(-1,1,1)/\sqrt{3}$. Vi ser Y som en funktionsyta och använder x och y som parametrar. Då har vi $dS=\frac{1}{\cos\theta}\,dxdy$, där θ är vinkeln mellan $\mathbf{n}$ och $\hat{z}$, dvs. $\cos\theta=1/\sqrt{3}$. Integrationsområdet D i xy-planet är ytans projektion på xy-planet, dvs. triangeln med hörn i $(1,0)$, $(2,1)$ och $(3,1)$. Triangeln begränsas av linjerna $y=x-1$, $y=\frac{1}{2}(x-1)$ och $y=1$. Alltså är

$$\begin{aligned}
\iint_Y (x^2-3y)\,dS &= \iint_D (x^2-3y)\sqrt{3}\,dxdy=\sqrt{3}\int_0^1\left\{\int_{y+1}^{2y+1}(x^2-3y)\,dx\right\}dy\\
=\sqrt{3}\int_0^1\left[\frac{x^3}{3}-3xy\right]_{x=y+1}^{x=2y+1}dy &= \sqrt{3}\int_0^1\left\{\frac{1}{3}(2y+1)^3-3y(2y+1)-\frac{1}{3}(y+1)^3+3y(y+1)\right\}dy\\
&= \sqrt{3}\int_0^1(\frac{7}{3}y^3+y)\,dy=\sqrt{3}\left[\frac{7}{12}y^4+\frac{1}{2}y^2\right]_0^1=\sqrt{3}(\frac{7}{12}+\frac{1}{2})=\boxed{\frac{13}{12}\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

---

6. Med $s=xy$, $t=\frac{x}{y^2}$ har vi $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{2x}{y^3}\frac{\partial f}{\partial t}$, och

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(y\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial f}{\partial t})=y\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial s})+\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial t})\\
&= y(y\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s})+\frac{1}{y^2}(y\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2})=y^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}+\frac{1}{y^4}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\frac{2}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(x\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{2x}{y^3}\frac{\partial f}{\partial t})=x\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial s})-\frac{2x}{y^3}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial t})+\frac{6x}{y^4}\frac{\partial f}{\partial t}\\
&= x(x\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}-\frac{2x}{y^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s})-\frac{2x}{y^3}(x\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}-\frac{2x}{y^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2})+\frac{6x}{y^4}\frac{\partial f}{\partial t}\\
&= x^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}+\frac{4x^2}{y^6}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\frac{4x^2}{y^3}\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+\frac{6x}{y^4}\frac{\partial f}{\partial t},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}(y\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial f}{\partial t})=y\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial s})+\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial t})-\frac{2}{y^3}\frac{\partial f}{\partial t}\\
&= y(x\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}-\frac{2x}{y^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s})+\frac{1}{y^2}(x\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}-\frac{2x}{y^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2})+\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{2}{y^3}\frac{\partial f}{\partial t}\\
&= xy\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}-\frac{2x}{y^5}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{2}{y^3}\frac{\partial f}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Då får vi

$$\begin{aligned}
&2x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-xy\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+4x\frac{\partial f}{\partial x}\\
&=2x^2(y^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}+\frac{1}{y^4}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\frac{2}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t})-y^2(x^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}+\frac{4x^2}{y^6}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\frac{4x^2}{y^3}\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+\frac{6x}{y^4}\frac{\partial f}{\partial t})\\
&-xy(xy\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}-\frac{2x}{y^5}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{2}{y^3}\frac{\partial f}{\partial t})+4x(y\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial f}{\partial t})\\
&=\frac{9x^2}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+3xy\frac{\partial f}{\partial s}=0,
\end{aligned}$$

så att $\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+\frac{y^2}{3x}\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+\frac{1}{3t}\frac{\partial f}{\partial s}=0$. Med $g=\frac{\partial f}{\partial s}$ har vi alltså $\frac{\partial g}{\partial t}+\frac{1}{3t}g=0$. Integrerande faktor är $e^{\int\frac{1}{3t}dt}=t^{1/3}$, så att $\frac{\partial}{\partial t}(t^{1/3}g)=0$, $t^{1/3}g=\varphi_1(s)$, där φ_1 är en godtycklig C^1-funktion. Vi får $\frac{\partial f}{\partial s}=t^{-1/3}\varphi_1(s)$, och $f=t^{-1/3}\int\varphi_1(s)\,ds+\psi(t)=t^{-1/3}\varphi(s)+\psi(t)$. Alltså är

$$\boxed{f(x,y)=x^{-1/3}y^{2/3}\varphi(xy)+\psi(\frac{x}{y^2})}$$

där φ och ψ är godtyckliga C^2-funktioner.

Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del B** den 10/3 2003, kl. 8.45–12.45.
Hjälpmedel: ”Användarhandledning för MATLAB” av Pärt-Enander–Sjöberg.
Telefon: Niclas Andréasson, tel. 0740-45 90 22.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Betrakta funktionen $f(x, y, z) = xye^{2x+z^2}$.

   a. Vilka av följande uttryck är definierade: $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{div} f$, $\operatorname{rot} f$, $\operatorname{grad}\operatorname{grad} f$, $\operatorname{div}\operatorname{grad} f$, $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f$? Beräkna de uttryck som existerar. (3p)

   b. Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(-2, 1, 2)$ i riktningen $(1, 2, 3)$. (2p)

   c. Beräkna tangentplanet till ytan $f(x, y, z) = -2$ i punkten $(-2, 1, 2)$. (2p)

2. Beräkna $\iiint_K (x + y + z)\,dxdydz$, då K är kroppen som definieras av olikheterna

$$\begin{cases} 1 \le x - y \le 2, \\ 1 \le 2x - 3z \le 3, \\ 0 \le x - y + z \le 1. \end{cases} \qquad (8p)$$

3. a. Sök minimum av $x^2 + y^2 + z^2$, då $4x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 3$. (4p)

   b. Skriv en MATLAB-kod för att plotta ytan $4x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 3$. (4p)

4. Beräkna ytintegralen $\iint_Y x^2y^2\,dS$, då Y är sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (7p)

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, då

$$\mathbf{F} = (2xyz + y,\ x^2z - \frac{z}{y^2 + z^2},\ x^2y + \frac{y}{y^2 + z^2}),$$

   och γ är skärningen mellan ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ och planet $x = z$. Kurvan genomlöps i positiv led sedd ”uppifrån” (från positiva z-axeln). (8p)

6. Studera ekvationen $ze^{z-x} - xy = 0$ i närheten av punkten $(1, 1, 1)$. Motivera att ekvationen kan lösas på formen $z = f(x, y)$ i närheten av $(x, y) = (1, 1)$. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till $f(x, y)$ i punkten $(1, 1)$. (7p)

7. Funktionen f är integrerbar över rektangeln $\{(x, y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$. Formulera och bevisa en sats om upprepad integration. (7p)

8. Formulera och bevisa Gauss' sats. (8p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 10/3 2003

1. a. grad är definierad för skalära funktioner, div för vektorfunktioner och rot för vektorfunktioner med tre komponenter. För $f(x,y,z) = xye^{2x+z^2}$ är

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left((y+2xy)e^{2x+z^2}, xe^{2x+z^2}, 2xyze^{2x+z^2}\right) = \underline{e^{2x+z^2}(2xy+y, x, 2xyz)}.$$

div f, rot f och grad grad f är odefinierade, medan

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{grad} f &= \nabla\cdot\nabla f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (2y + 2(y+2xy))e^{2x+z^2} + 0 + 2xy(1+2z^2)e^{2x+z^2} \\ &= \underline{2y\left(2+3x+2xz^2\right)e^{2x+z^2}},\end{aligned}$$

och rot grad $f = \nabla\times\nabla f = \underline{\mathbf{0}}$ generellt.

b. Riktningsderivatan är $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{v}$. Här är $\mathbf{a} = (-2,1,2)$ och $\mathbf{v} = \frac{(1,2,3)}{\sqrt{14}}$ så att $\nabla f(\mathbf{a}) = (-3,-2,-8)$ och $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{14}}(-3-4-24) = \underline{-\frac{31}{\sqrt{14}}}$.

c. Punkten $\mathbf{a} = (-2,1,2)$ ligger på ytan $f(x,y,z) = -2$, och en normalvektor är $\nabla f(\mathbf{a}) = (-3,-2,-8)$. Allltså är tangentplanets ekvation $-3(x+2) - 2(y-1) - 8(z-2) = 0$, eller $\underline{3x+2y+8z-12=0}$.

---

2. Sätt $u = x-y$, $v = 2x-3z$, $w = x-y+z$. Då beskrivs området av $1 \le u \le 2$, $1 \le v \le 3$, $0 \le w \le 1$. Vi har

$$\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

och $z = w-u$, $x = \frac{1}{2}(v+3z) = \frac{1}{2}(v+3w-3u)$, $y = x-u = \frac{1}{2}(v+3w-5u)$. Vid variabelbytet har vi alltså $dxdydz = \frac{1}{2}dudvdw$, så att

$$\begin{aligned}\iiint_K (x+y+z)\,dxdydz &= \int_0^1\int_1^3\int_1^2 (v+4w-5u)\frac{1}{2}dudvdw \\ &= \frac{1}{2}\Big(1\cdot 1\cdot\int_1^3 v\,dv + 1\cdot 2\cdot 4\int_0^1 w\,dw - 1\cdot 2\cdot 5\int_1^2 u\,du\Big) \\ &= \frac{1}{2}(4+4-15) = \underline{-\frac{7}{2}}.\end{aligned}$$

---

3. a. Sök minimum av $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ då $g(x,y,z) = 4x^2+y^2+z^2-2z-3 = 0$. Där minimum antas är $\nabla f = \lambda\nabla g$ för något tal λ, dvs.

$$2x = 8\lambda x,\ 2y = 2\lambda y,\ 2z = 2\lambda(z-1).$$

Det gäller nämligen att $\nabla g \neq \mathbf{0}$, ty $\nabla g = \mathbf{0}$ endast för $x=y=0$, $z=1$, villket inte uppfyller bivillkoret. Alltså har vi ekvationerna $(1-4\lambda)x = 0$, $(1-\lambda)y = 0$, $(\lambda-1)z = \lambda$. Den sista av dessa visar att $\lambda \neq 1$, varför den andra ger $y = 0$. Första ekvationen ger oss två möjligheter: $x = 0$ eller $\lambda = \frac{1}{4}$. I det första fallet ger bivillkoret $z^2-2z-3=0$ med lösningar $z=3$ och $z=-1$, och motsvarande värden på f blir då 9 resp. 1. I fallet $\lambda = \frac{1}{4}$ blir $z = \frac{\lambda}{\lambda-1} = -\frac{1}{3}$, och bivillkoret ger oss nu $4x^2 = 3 - \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{20}{9}$, $x^2 = \frac{5}{9}$ med tillhörande f-värde $\frac{5}{9}+\frac{1}{9} = \frac{2}{3}$. Minimum är alltså $\underline{f(\pm\frac{\sqrt{5}}{3}, 0, -\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}}$.

b. Det bästa är nog att skriva ytans ekvation som $(2x)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$ (en ellipsoid) och använda modifierade rymdpolära koordinater.

```
[fi,theta]=meshgrid(0:2*pi/25:2*pi);
x=cos(fi).*sin(theta);
y=2*sin(fi).*sin(theta);
z=1+2*cos(theta);
mesh(x,y,z)
```

---

4. *Metod 1.* Skriv x^2y^2 som $\mathbf{u}\cdot\mathbf{N}$ för något $\mathbf{u}$, där $\mathbf{N}=(x,y,z)$ är den utåtriktade enhetsnormalen på Y, och använd Gauss' sats. Tag t.ex. $\mathbf{u}=(xy^2,0,0)$ och låt K vara klotet $x^2+y^2+z^2\le 1$.

$$\begin{aligned}\iint_Y x^2y^2\,dS &= \iint_Y \mathbf{u}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{u}\,dxdydz = \iiint_K y^2\,dxdydz = [\text{symmetri}]\\ &= \frac{1}{3}\iiint_K (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^2r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi\\ &= \frac{4\pi}{3}\int_0^1 r^4\,dr = \underline{\frac{4\pi}{15}}.\end{aligned}$$

Metod 2. Direkt beräkning med sfäriska koordinater.

$$\begin{aligned}\iint_Y x^2y^2\,dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin^2\theta\cdot\sin^2\varphi\sin^2\theta\cdot\sin\theta\,d\theta d\varphi\\ &= \int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)^2\sin\theta\,d\theta\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^2dt\cdot\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\,d\varphi\\ &= 2\int_0^1(t^4-2t^2+1)\,dt\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right) = \underline{\frac{4\pi}{15}}.\end{aligned}$$

---

5. $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma(2xyz+y)dx+\int_\gamma(x^2z-\frac{z}{y^2+z^2})dy+\int_\gamma(x^2y+\frac{y}{y^2+z^2})dz = \int_\gamma(2xyz\,dx+x^2z\,dy+x^2y\,dz)+\int_\gamma y\,dx+\int_\gamma\frac{-z\,dy+y\,dz}{y^2+z^2} = I_1+I_2+I_3$. Här är $I_1=\int_\gamma d(x^2yz)=0$, eftersom kurvan är sluten. Kurvans projektion γ_1 på xy-planet är ellipsen $4x^2+2y^2=1$ genomlöpt i positiv led. Om D_1 är området innanför γ_1, ger Greens formel, eftersom ellipsens halvaxlar är $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$I_2=\int_{\gamma_1} y\,dx = \iint_{D_1}(-1)dydx = -\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Om γ_2 är kurvans projektion på yz-planet, är γ_2 ellipsen $2y^2+4z^2=1$ genomlöpt i *negativ* led. Då är $I_3=\int_{\gamma_2}\frac{-z\,dy+y\,dz}{y^2+z^2}$. Vektorfältet $(\frac{-z}{y^2+z^2},\frac{y}{y^2+z^2})$ känner man igen som det magnetiska fältet härrörande från en strömgenomfluten ledare längs x-axeln. Om φ är den polära vinkeln i yz-planet, är $I_3=\int_{\gamma_2}d\varphi=-2\pi$ (nettoökningen i φ då man går runt γ_2). Alltså är $\int_\gamma\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}-2\pi = \underline{-(2+\frac{\sqrt{2}}{4})\pi}$.

---

6. Sätt $F(x,y,z)=ze^{z-x}-xy$. Då $F_z'(1,1,1)=(z+1)e^{z-x}|_{(1,1,1)}=2\neq 0$, följer av implicita funktionssatsen att ekvationen $F(x,y,z)=0$ kan lösas på formen $z=f(x,y)$ i någon omgivning av $(1,1,1)$, där f har kontinuerliga derivator av alla ordningar. Taylorpolynomet av andra graden kring $(1,1)$ är $P(x,y)=f(1,1)+f_x'(1,1)(x-1)+f_y'(1,1)(y-1)+\frac{1}{2}\big(f_{xx}''(1,1)(x-1)^2+2f_{xy}''(1,1)(x-1)(y-1)+f_{yy}''(1,1)(y-1)^2\big)$. Här är $f(1,1)=1$ och derivatorna av f fås genom implicit derivering av identiteten $F(x,y,f(x,y))=0$. Vi skriver $z=f(x,y)$ och får ur $ze^{z-x}-xy=0$

$$-ze^{z-x}+(z+1)e^{z-x}z_x'-y=0,\quad (z+1)e^{z-x}z_y'-x=0.$$

För $x=1$, $y=1$ och $z=1$ fås $z_x'=f_x'(1,1)=1$ och $z_y'=f_y'(1,1)=\frac{1}{2}$. Fortsatt derivering ger

$$\begin{aligned}ze^{z-x}-2(z+1)e^{z-x}z_x'+(z+2)e^{z-x}(z_x')^2+(z+1)e^{z-x}z_{xx}''&=0,\\ -(z+1)e^{z-x}z_y'+(z+2)e^{z-x}z_y'z_x'+(z+1)e^{z-x}z_{xy}''-1&=0,\\ (z+2)e^{z-x}(z_y')^2+(z+1)e^{z-x}z_{yy}''&=0.\end{aligned}$$

För $x=1$, $y=1$ och $z=1$, $z_x'=1$, $z_y'=\frac{1}{2}$ fås $1-4+3+2z_{xx}''=0$, $-1+\frac{3}{2}+2z_{xy}''-1=0$, $\frac{3}{4}+2z_{yy}''=0$, dvs. $z_{xx}''=f_{xx}''(1,1)=0$, $z_{xy}''=f_{xy}''(1,1)=\frac{1}{4}$, $z_{yy}''=f_{yy}''(1,1)=-\frac{3}{8}$. Alltså är

$$P(x,y)=\underline{1+(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)+\frac{1}{4}(x-1)(y-1)-\frac{3}{16}(y-1)^2}.$$

Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del B** den 27/8 2003, kl. 14.15–18.15.
Hjälpmedel: "Användarhandledning för MATLAB" av Pärt-Enander–Sjöberg.
Telefon: Georgios Foufas, tel. 0702-74 09 02.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Taylorutveckla funktionen

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x+y^2}e^{x+2y} - 4\sqrt{1+\sin(x+y)}$$

kring origo med termer t.o.m. andra graden (plus restterm). Visa att har f en stationär punkt i origo och avgör dess karaktär. (7p)

2. Beräkna $\iiint_K (x^2+yz)\,dxdydz$, då K är kroppen som definieras av olikheterna

$$\begin{cases} 0 \le x+y+2z \le 3, \\ 0 \le z-y \le 2, \\ 0 \le 2x-y+z \le 3. \end{cases} \qquad (8p)$$

3. Bestäm maximum av $x+2y+3z$, då $x^2+y^2+2z^2+xy+2yz=2$. (7p)

4. a. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, då Y är ytan $z^2 = x^2+y^2-1$, $0 \le z \le 1$, med normalriktning bort från origo, och

$$\mathbf{F} = (zx^3, zy^3, x^2+y^2). \qquad (6p)$$

b. Skriv en MATLAB-kod för att plotta ytan Y. Visa ytan med ett rutnät med en likformig indelning i z-led. (3p)

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, då

$$\mathbf{F} = \big(yz\cos x + y^2,\ z\sin x,\ y\sin x + x^2\big),$$

och γ är skärningen mellan $z = 1-\sqrt{x^2+y^2}$ och planet $y+2z=0$. Kurvan genomlöps i positiv led sedd "uppifrån" (från positiva z-axeln). (7p)

6. Lös differentialekvationen

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genom att göra variabelbytet $s = x+2y$, $t = x^2$ $(x>0)$. (7p)

7. Hur definieras riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$? Visa hur $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$ kan uttryckas med hjälp av gradienten. Vad säger detta om gradientens fysikaliska betydelse? (7p)

8. a. Ange vad som menas med att ett vektorfält $\mathbf{F} = (P,Q)$ är ett potentialfält. (2p)

b. Visa att om kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen i en sammanhängande öppen mängd Ω, så är $\mathbf{F}$ ett potentialfält i Ω. (6p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 27/8 2003

1. Med hjälp, av envariabelutvecklingarna $\frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+O(t^3)$, $e^t = 1+t+\frac{1}{2}t^2+O(t^3)$, $\sin t = t+O(t^3)$, $\sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3)$, då $t \to 0$, fås

$$f(x,y) = \Big(1+x-y^2+x^2+O(r^3)\Big)\Big(1+(x+2y)+\frac{1}{2}(x+2y)^2+O(r^3)\Big)$$
$$-4\Big(1+\frac{1}{2}(x+y)-\frac{1}{8}(x+y)^2+O(r^3)\Big) = -3+3x^2+5xy+\frac{3}{2}y^2+O(r^3),$$

då $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$. Detta är den sökta Taylorutvecklingen. Det framgår att $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, så att origo är en stationär punkt. Eftersom den kvadratiska formen $3x^2+5xy+\frac{3}{2}y^2$ kan skrivas $\frac{3}{2}(y+\frac{5}{3}x)^2 - \frac{7}{6}x^2$, är den indefinit, och origo är en <u>sadelpunkt</u>.

---

2. Sätt $u = x+y+2z$, $v = -y+z$, $w = 2x-y+z$. Då beskrivs området av $0 \le u \le 3$, $0 \le v \le 2$, $0 \le w \le 3$. Vi har

$$\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6,$$

och $x = \frac{1}{2}(w-v)$, $y = \frac{1}{6}(2u-3v-w)$, $z = \frac{1}{6}(2u+3v-w)$. Vid variabelbytet har vi alltså $dxdydz = \frac{1}{6}dudvdw$, så att

$$\iiint_K (x^2+yz)\,dxdydz = \int_0^3\int_0^2\int_0^3 \left[\frac{1}{4}(w-v)^2 + \frac{1}{36}\big((2u-w)^2-9v^2\big)\right]\frac{1}{6}\,dudvdw$$
$$= \frac{1}{6}\int_0^3\int_0^2\int_0^3 (\frac{1}{9}u^2 - \frac{1}{9}uw - \frac{1}{2}vw + \frac{5}{18}w^2)dudvdw = \frac{1}{6}\int_0^3\int_0^2 (1-\frac{1}{2}w - \frac{3}{2}vw + \frac{5}{6}w^2)dvdw$$
$$= \frac{1}{6}\int_0^3 (2-w-3w+\frac{5}{3}w^2)dw = \frac{1}{6}(6-18+15) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

---

3. Sök maximum av $f(x,y,z) = x+2y+3z$ under bivillkoret $g(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2+xy+2yz = 2$. Eftersom $g(x,y,z) = (x+\frac{1}{2}y)^2+2(z+\frac{1}{2}y)^2+\frac{1}{4}y^2$, är mängden $\{(x,y,z) : g(x,y,z) = 2\}$ kompakt. Alltså antas maximum. Enligt Lagranges multiplikatorregel finns ett tal λ så att $\nabla f(x,y,z) = \lambda\nabla g(x,y,z)$ där maximum antas (såvida inte $\nabla g(x,y,z) = \mathbf{0}$, vilket vi kan utesluta eftersom det skulle ge $2x+y = 2y+x+2z = 4z+2y = 0$, $x = y = z = 0$, vilket är oförenligt med $g(x,y,z) = 2$). Vi får då

$$\begin{cases} 1 = \lambda(2x+y), \\ 2 = \lambda(2y+x+2z), \\ 3 = \lambda(4z+2y), \end{cases}$$

så att
$$\frac{1}{\lambda} = 2x+y = \frac{1}{2}x+y+z = \frac{2}{3}y+\frac{4}{3}z, \qquad z = \frac{3}{2}x,\ 2x+\frac{1}{3}y = \frac{4}{3}z = 2x,$$

dvs. $y = 0$, $z = \frac{3}{2}x$. Villkoret $g(x,y,z) = 2$ ger $(1+\frac{9}{2})x^2 = \frac{11}{2}x^2 = 2$, $x = \pm\frac{2}{\sqrt{11}}$. Vi får punkterna $(x,y,z) = \pm\frac{1}{\sqrt{11}}(2,0,3)$ med $f(x,y,z) = \pm\frac{1}{\sqrt{11}}(2+0+9) = \pm\sqrt{11}$. Alltså är max.värdet $\boxed{\sqrt{11}}$.

---

4. a. Om man kompletterar Y med $Y_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 2,\ z = 1\}$ och $Y_2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1,\ z = 0\}$, så blir $Y+Y_1+Y_2$ rand till kroppen $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1+z^2,\ 0 \le z \le 1\}$. Använd Gauss' sats:

$$\iint_{Y+Y_1+Y_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_K 3(x^2+y^2)z\,dxdydz$$
$$= 3\int_0^1 z\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1+z^2}} r^2 r\,dr d\varphi\right\}dz = 3\int_0^1 z\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}(1+z^2)^2\,dz$$
$$= \frac{3\pi}{2}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(1+z^2)^3\right]_{z=0}^1 = \frac{\pi}{4}(8-1) = \frac{7\pi}{4}.$$

Nu är $\iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{x^2+y^2\le 2} \mathbf{F}(x,y,1)\cdot(0,0,1)\,dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 2}(x^2+y^2)dxdy$ och $\iint_{Y_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{x^2+y^2\le 1} \mathbf{F}(x,y,0)\cdot(0,0,-1)\,dxdy = -\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy$, så att

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \frac{7\pi}{4} - \iint_{1\le x^2+y^2\le 2}(x^2+y^2)dxdy = \frac{7\pi}{4} - \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} r^2 r\,drd\varphi$$
$$= \frac{7\pi}{4} - 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{7\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

b. Ett exempel på MATLAB-kod:

```
[z,v]=meshgrid(0:0.1:1,0:2*pi/25:2*pi);
r=sqrt(z.^2+1);
x=r.*cos(v);
y=r.*sin(v);
mesh(x,y,z)
```

---

5. Ekvationen för γ: $z = 1-\sqrt{x^2+y^2}$, $y+2z=0$. Eliminera z för att få projektionen γ_1 på xy-planet: $\sqrt{x^2+y^2} = 1+\frac{y}{2}$, $x^2+y^2 = 1+\frac{1}{4}y^2+y$, $x^2+\frac{3}{4}y^2-y=1$, vilket ger ellipsen $\frac{x^2}{\frac{4}{3}}+\frac{(y-\frac{2}{3})^2}{(\frac{4}{3})^2}=1$ (observera att $y\ge -\frac{2}{3}$ så att $1+\frac{y}{2}>0$). Vi har

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = yz\cos x\,dx + z\sin x\,dy + y\sin x\,dz + y^2\,dx + x^2\,dz = d(yz\sin x) + y^2\,dx + x^2\,dz.$$

Eftersom γ är sluten, och $z=-\frac{y}{2}$ på γ, är

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma (y^2\,dx + x^2\,dz) = \int_\gamma (y^2\,dx - \frac{1}{2}x^2\,dy) = \int_{\gamma_1}(y^2\,dx - \frac{1}{2}x^2\,dy).$$

Om D är området innanför γ_1, ger Greens formel

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D (-x-2y)\,dxdy = \left[x = \frac{2}{\sqrt{3}}r\cos\varphi,\ y = \frac{2}{3}+\frac{4}{3}r\sin\varphi,\ dxdy = \frac{8}{3\sqrt{3}}r\,drd\varphi\right]$$
$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{2}{\sqrt{3}}r\cos\varphi + \frac{4}{3} + \frac{8}{3}r\sin\varphi\right)\frac{8}{3\sqrt{3}}r\,drd\varphi = \left[\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = 0\right]$$
$$= -\frac{32}{9\sqrt{3}}2\pi\int_0^1 r\,dr = \boxed{-\frac{32\pi}{9\sqrt{3}}}.$$

---

6. Med $s = x+2y$, $t = x^2$ blir $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}\cdot 2x$ och $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s}\cdot 2$. Vidare fås

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial s}) + 2x\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial t}) + 2\frac{\partial u}{\partial t} = (\frac{\partial}{\partial s} + 2x\frac{\partial}{\partial t})(\frac{\partial u}{\partial s}) + 2x(\frac{\partial}{\partial s} + 2x\frac{\partial}{\partial t})(\frac{\partial u}{\partial t}) + 2\frac{\partial u}{\partial t}$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 4x\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} + 4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial s}) = 2(\frac{\partial}{\partial s} + 2x\frac{\partial}{\partial t})(\frac{\partial u}{\partial s}) = 2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 4x\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial s}) = 4\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial u}{\partial s}) = 4\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}.$$

Ekvationen $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ övergår i $16x^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 8\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ eller $2t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Vi får en första ordningens ekvation för $v = \frac{\partial u}{\partial t}$. Med hjälp av en integrerande faktor blir den $\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{t}v) = 0$, så att $\sqrt{t}v = c_1(s)$, och $\frac{\partial u}{\partial t} = v = \frac{1}{\sqrt{t}}c_1(s)$, $u = 2\sqrt{t}c_1(s) + c_2(s)$. Allmänna lösningen till den givna ekvationen blir då $\underline{u = x\varphi(x+2y) + \psi(x+2y)}$, där φ och ψ är två godtyckliga C^2-funktioner i en variabel.

Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del B** den 16/1 2004, kl. 8.45–12.45.
Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.
Telefon: Micke Persson, tel. 0740-45 90 22, eller Jonas Hartwig, tel. 0740-35 06 46.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Bestäm alla stationära punkter för $f(x,y) = x^2y - xy^3 + x^2$ och bestäm deras karaktär. (8p)

2. Beräkna $\iint_D xe^{2x-y}\,dxdy$, då D är fyrhörningen med hörn i $(1,1)$, $(2,0)$, $(3,2)$ och $(2,3)$. (7p)

3. Taylorutveckla funktionen
$$f(x,y) = \ln\cos(x-2y) - 2\big(\sqrt{1+(x+y)^2} - 1\big)$$
kring origo med termer t.o.m. tredje graden (plus restterm). Det finns en konstant a så att gränsvärdet
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)+ay^2}{x^2+y^2}$$
existerar. Bestäm a och gränsvärdet. (8p)

4. Beräkna $\iint_{\partial K} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, då K är kroppen
$$K = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2\},$$
och $\mathbf{F} = (x^2y, ye^z, z^2)$. (7p)

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, då
$$\mathbf{F} = \big(yz\cos(xy) + (z-1)y,\ xz\cos(xy) + xy^2,\ \sin(xy)\big),$$
och γ är skärningen mellan $x^2+y^2+z^2 = 1$ och planet $2x+z = 1$. Kurvan genomlöps i positiv led sedd "uppifrån" (från positiva z-axeln). (8p)

6. Lös differentialekvationen
$$\frac{y^2}{2}u'_x - \frac{x}{3}u'_y = y^5.$$
Bestäm en lösning som uppfyller $u(x,0) = x^2$ för $x > 0$. (7p)

7. Vad menas med att en funktion $f(x,y)$ är differentierbar i en punkt (x_0,y_0)? Visa att om f är av klassen C^1 i en omgivning av (x_0,y_0), så är f differentierbar i (x_0,y_0). (7p)

8. a. Formulera implicita funktionssatsen. (2p)

   b. Betrakta problemet att maximera eller minimera $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y) = 0$, där f och g är C^1-funktioner. Antag att punkten (a,b) ger optimum. Visa att $\operatorname{grad} f(a,b)$ och $\operatorname{grad} g(a,b)$ är parallella (linjärt beroende). (6p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 16/1 2004

1. Sök stationära punkter till $f(x,y) = x^2y - xy^3 + x^2$.

$$f'_x = 2xy - y^3 + 2x = 0,$$
$$f'_y = x^2 - 3xy^2 = x(x - 3y^2) = 0.$$

Enligt den andra ekvationen är antingen $x = 0$ eller $x = 3y^2$. Om $x = 0$, ger den första ekvationen $-y^3 = 0$, dvs. $(0,0)$ är en stationär punkt. Om $x \neq 0$, är $x = 3y^2$, $y \neq 0$, och första ekvationen ger $6y^3 - y^3 + 6y^2 = 0$, $5y + 6 = 0$. Vi får den stationära punkten $(\frac{108}{25}, -\frac{6}{5})$. I denna punkt är $A = f''_{xx} = 2y + 2 = -\frac{2}{5}$, $B = f''_{xy} = 2x - 3y^2 = x = \frac{108}{25}$, $C = f''_{yy} = -6xy = \frac{36\cdot 108}{125}$. Se på den kvadratiska formen $Q = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$. Då A och C har olika tecken, är den indefinit, och $(\frac{108}{25}, -\frac{6}{5})$ är en sadelpunkt. I $(0,0)$ är $A = 2$, $B = C = 0$, och $Q = 2h^2$ är pos. semidefinit. Detta ger ingen upplysning, men eftersom (t.ex.) $f(y^4, y) = y^4(y^5 - y^3 + y^4) = y^7(-1 + y^2 + y)$, vilket antar både positiva och negativa värden för små $|y|$, så är även $(0,0)$ en sadelpunkt.

---

2. Fyrhörningen är en parallellogram som begränsas av linjerna $x + y = 2$, $x + y = 5$, $2x - y = 1$ och $2x - y = 4$. Sätt $u = 2x - y$, $v = x + y$. Då motsvaras D av $D' = \{(u,v) : 1 \leq u \leq 4,\ 2 \leq v \leq 5\}$. Vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \frac{1}{3} dudv,$$

och vidare är $x = \frac{1}{3}(u+v)$. Alltså är

$$\begin{aligned}
\iint_D xe^{2x-y}\,dxdy &= \frac{1}{3}\iint_{D'} \frac{1}{3}(u+v)e^u\,dudv = \frac{1}{9}\int_2^5 \left\{\int_1^4 (u+v)e^u\,du\right\} dv \\
&= \frac{1}{9}\int_2^5 \left\{[(u+v)e^u]_{u=1}^4 - \int_1^4 e^u\,du\right\} dv = \frac{1}{9}\int_2^5 \{(4+v)e^4 - (1+v)e - e^4 + e\}\,dv \\
&= \frac{1}{9}\int_2^5 \{3e^4 + (e^4 - e)v\}\,dv = \frac{1}{9}[9e^4 + (e^4 - e)\frac{1}{2}(25-4)] = \boxed{\frac{1}{6}(13e^4 - 7e)}.
\end{aligned}$$

---

3. Med hjälp av envariabelutvecklingarna $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$, $\ln(1+t) = t + O(t^2)$, $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + O(t^2)$, då $t \to 0$, fås

$$\begin{aligned}
\cos(x-2y) &= 1 - \frac{1}{2}(x-2y)^2 + O(r^4) = 1 + v, \text{ där } v = -\frac{1}{2}(x-2y)^2 + O(r^4) = O(r^2), \\
\ln\cos(x-2y) &= \ln(1+v) = v + O(v^2) = -\frac{1}{2}(x-2y)^2 + O(r^4), \\
\sqrt{1+(x+y)^2} &= 1 + \frac{1}{2}(x+y)^2 + O(r^4),
\end{aligned}$$

där $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$. Alltså är

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \ln\cos(x-2y) - 2\big(\sqrt{1+(x+y)^2} - 1\big) = -\frac{1}{2}x^2 - 2y^2 + 2xy - x^2 - y^2 - 2xy + O(r^4) \\
&= -\frac{3}{2}x^2 - 3y^2 + O(r^4).
\end{aligned}$$

Nu har

$$\frac{f(x,y) + ay^2}{x^2+y^2} = \frac{-\frac{3}{2}x^2 + (a-3)y^2}{x^2+y^2} + O(r^2)$$

gränsvärde då $x^2 + y^2 \to 0$ om och endast om $a - 3 = -\frac{3}{2}$, dvs. $\boxed{a = \frac{3}{2}}$, och gränsvärdet är då $\boxed{-\frac{3}{2}}$.

---

4. Kroppens projektion på xy-planet fås av $x^2+y^2 \le 2-x^2-y^2$, dvs. $x^2+y^2 \le 1$; en cirkel D. Gauss' sats ger

$$\iint_{\partial K} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_K (2xy+e^z+2z)\,dxdydz = [\text{symmetri}]$$
$$= \iiint_K (e^z+2z)\,dxdydz = \iint_D \left\{\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (e^z+2z)\,dz\right\} dxdy = \iint_D \left[e^z+z^2\right]_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} dxdy$$
$$= [\text{polära koord.}] = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (e^{2-r^2}+(2-r^2)^2-e^{r^2}-r^4)\,r\,dr\,d\varphi = \ [t=r^2]$$
$$= 2\pi\int_0^1 (e^{2-t}+(2-t)^2-e^t-t^2)\frac{1}{2}dt = \pi\left[-e^{2-t}-\frac{1}{3}(2-t)^3-e^t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$
$$= \pi(-e-\frac{1}{3}-e-\frac{1}{3}+e^2+\frac{8}{3}+1) = \boxed{\pi(e^2-2e+3)}.$$

---

5. Ekvationen för γ: $x^2+y^2+z^2=1$, $2x+z=1$. Eliminera z för att få projektionen γ_1 på xy -planet: $x^2+y^2+(1-2x)^2=1$ eller $5(x-\frac{2}{5})^2-\frac{4}{5}+y^2=0$, vilket ger ellipsen $\frac{(x-\frac{2}{5})^2}{(\frac{2}{5})^2}+\frac{y^2}{(\frac{2}{\sqrt{5}})^2}=1$. Vi har

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= yz\cos(xy)\,dx+(z-1)y\,dx+xz\cos(xy)\,dy+xy^2\,dy+\sin(xy)\,dz\\ &= d(z\sin(xy))+(z-1)y\,dx+xy^2\,dy.\end{aligned}$$

Eftersom γ är sluten, och $z=1-2x$ på γ, är

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma ((z-1)y\,dx+xy^2)\,dy = \int_{\gamma_1} ((-2xy)\,dx+xy^2\,dy).$$

Om D är området innanför γ_1, ger Greens formel

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D (2x+y^2)\,dxdy = \left[x=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}r\cos\varphi,\ y=\frac{2}{\sqrt{5}}r\sin\varphi,\ dxdy=\frac{4}{5\sqrt{5}}r\,dr\,d\varphi\right]$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(2(\frac{2}{5}+\frac{2}{5}r\cos\varphi)+\frac{4}{5}r^2\sin^2\varphi\right)\frac{4}{5\sqrt{5}}r\,dr\,d\varphi$$
$$= \frac{4}{5\sqrt{5}}\left[\frac{4}{5}\cdot 2\pi\int_0^1 r\,dr+0+\frac{4}{5}\int_0^1 r^3\,dr\cdot\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\right] = \frac{4}{5\sqrt{5}}(\frac{4}{5}\pi+\frac{1}{5}\pi) = \boxed{\frac{4\pi}{5\sqrt{5}}}.$$

---

6. Karakteristikernas differentialekvation (i xy-planet) är (för $x>0$ och $y\neq 0$)

$$\frac{2dx}{y^2} = -\frac{3dy}{x}, \qquad 2x\,dx+3y^2dy=0, \qquad d(x^2+y^3)=0.$$

Detta är alltså en exakt differentialekvation med lösning $x^2+y^3=C$. Sätt $s=x^2+y^3$, $t=x$. Då är

$$\begin{aligned}u'_x &= \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 2x\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial t},\\ u'_y &= \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = 3y^2\frac{\partial u}{\partial s},\end{aligned}$$

och

$$\frac{y^2}{2}u'_x-\frac{x}{3}u'_y = \frac{y^2}{2}2x\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{y^2}{2}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{x}{3}3y^2\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{y^2}{2}\frac{\partial u}{\partial t} = y^5,$$

dvs. $\frac{\partial u}{\partial t}=2y^3=2(s-t^2)$, $u=2st-\frac{2}{3}t^3+g(s)$, där g är en godtycklig (deriverbar) funktion av en variabel. Alltså är differentialekvationens allmänna lösning $u=2x(x^2+y^3)-\frac{2}{3}x^3+g(x^2+y^3)$. Bestäm g så att $u(x,0)=2x^3-\frac{2}{3}x^3+g(x^2)=x^2$. Med $s=x^2$, $x=\sqrt{s}$, blir $g(s)=s-\frac{4}{3}s^{3/2}$. Då fås lösningen

$$\boxed{u(x,y)=\frac{4}{3}x^3+2xy^3+x^2+y^3-\frac{4}{3}(x^2+y^3)^{3/2}}.$$

Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell Matematisk analys F, del B** den 8/3 2004, kl. 08.45–12.45.

Hjälpmedel: ”Användarhandledning för MATLAB” av Pärt-Enander–Sjöberg.
Telefon: Anton Evgrafov, tel. 0740-45 90 22.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Taylorutveckla funktionen

$$f(x,y) = e^{x+y}\sin(x+2y) + \frac{2+3x}{1+2x+y}$$

kring origo med termer t.o.m. andra graden (plus restterm). Visa att origo är en stationär punkt och avgör dess karaktär. (7p)

2. Bestäm största och minsta värde av $f(x,y) = x^2y - 2xy^3 + 5y$, då $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le \frac{3}{2}$. I vilka punkter antas max resp. min? (8p)

3. Beräkna $\iint_D xye^{-(x^2+xy+y^2)}\,dxdy$, där $D = \{(x,y) : y \ge 0\}$. (7p)

4. a. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, då

$$\mathbf{F} = \big(yz^2 + z,\ xz^2,\ 2xyz + x^2z^2\big),$$

och γ är skärningen mellan $x^2+y^2+4z^2 = 4$ och planet $z = y+1$ (kurvans projektion i xy-planet genomlöps i positiv led). (6p)

b. Skriv en MATLAB-kod för att plotta ytan $x^2+y^2+4z^2 = 4$ och kurvan γ i samma figur. (3p)

5. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, då Y är ytan $x^2+y^2+z^2 = 4$, $z \ge 1$, med normalriktning bort från origo, och

$$\mathbf{F} = (y^2 + x^3z,\ x^2 + y^3z,\ z^2 + xy). \quad (7p)$$

6. Transformera differentialekvationen

$$x^2u''_{xx} + y^2u''_{yy} + 2xyu''_{xy} = 0$$

genom att göra variabelbytet $s = \frac{y}{x}$, $t = xy^2$ $(x > 0)$. Lös därefter ekvationen. (7p)

7. Bevisa kedjeregeln för derivering av den sammansatta funktionen $f(\mathbf{g}(t))$ (ange förutsättningar). (7p)

8. Formulera och bevisa Stokes' sats. (8p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 8/3 2004

1. Använd envariabelutvecklingarna $e^t = 1 + t + O(t^2)$, $\sin t = t + O(t^3)$, $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + O(t^3)$ då $t \to 0$. Då fås (då $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= [1 + x + y + O(r^2)][x + 2y + O(r^3)] + (2 + 3x)[1 - 2x - y + 4x^2 + y^2 + 4xy + O(r^3)] \\ &= x + 2y + x^2 + 2y^2 + 3xy + O(r^3) + 2 - x - 2y + 2x^2 + 2y^2 + 5xy + O(r^3) \\ &= 2 + 3x^2 + 8xy + 4y^2 + O(r^3). \end{aligned}$$

Ur detta avläser vi att $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, dvs. origo är en stationär punkt. Tillhörande kvadratisk form är $Q = 2(3x^2 + 8xy + 4y^2) = 6[(x + \frac{4}{3}y)^2 - \frac{4}{9}y^2]$, som är indefinit, varför origo är en sadelpunkt.

---

2. $f(x, y) = x^2y - 2xy^3 + 5y$, $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le \frac{3}{2}$. Sök först inre stationära punkter.

$$f'_x = 2xy - 2y^3 = 2y(x - y^2) = 0, \quad f'_y = x^2 - 6xy^2 + 5 = 0.$$

$y = 0$ skulle ge $x^2 + 5 = 0$, vilket inte går. Alltså är $x = y^2$ och $x^2 - 6x^2 + 5 = 0$, $x^2 = 1$, $x = 1$, $y = \pm 1$.
Inre stationär punkt: $(1, 1)$.
Undersök ran den: a) $x = 0$: $f(0, y) = 5y$ som är strängt växande; b) $y = 0$: $f(x, 0) = 0$, konstant; c) $x = 3$: $f(3, y) = 14y - 6y^3 = f_1(y)$, $f_1'(y) = 14 - 18y^2 = 0$ för $y = \frac{\sqrt{7}}{3}$ (som är $< \frac{3}{2}$); d) $y = \frac{3}{2}$: $f(x, \frac{3}{2}) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{27}{4}x + \frac{15}{2} = f_2(x)$, $f_2'(x) = 3x - \frac{27}{4} = 0$ för $x = \frac{9}{4}$.
Intressanta funktionsvärden: $f(1, 1) = 4$, $f(x, 0) = 0$, $f(0, \frac{3}{2}) = \frac{15}{2}$, $f(3, \frac{\sqrt{7}}{3}) = \frac{28\sqrt{7}}{9} > 3 \cdot 2,5 = 7,5$, $f(\frac{9}{4}, \frac{3}{2}) = -\frac{3}{32}$, $f(3, \frac{3}{2}) = \frac{3}{4}$.
Alltså: max. är $f(3, \frac{\sqrt{7}}{3}) = \frac{28\sqrt{7}}{9}$, min. är $f(\frac{9}{4}, \frac{3}{2}) = -\frac{3}{32}$.

---

3. $I = \iint_{y \ge 0} xye^{-(x^2+xy+y^2)}\,dxdy = \iint_{y\ge 0} xye^{-[(x+\frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2]}\,dxdy$.
Integralen är absolutkonvergent (ty $\iint_{y\ge 0} |xy|e^{-(x^2+xy+y^2)}\,dxdy \le \int_0^\pi [\int_0^\infty r^2 e^{-\frac{1}{2}r^2} r\,dr]d\varphi < \infty$), och då får man utföra upprepad integration och variabelbyte "som vanligt". Sätt $u = x + \frac{y}{2}$, $v = \frac{\sqrt{3}}{2}y$. Då är $y \ge 0 \Leftrightarrow v \ge 0$, och $\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $dxdy = \frac{2}{\sqrt{3}}dudv$. Sätt sedan $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$.

$$\begin{aligned} I &= \iint_{v\ge 0} (u - \frac{1}{\sqrt{3}}v)\frac{2}{\sqrt{3}}ve^{-(u^2+v^2)}\frac{2}{\sqrt{3}}\,dudv = \frac{4}{3}\int_0^\pi \int_0^\infty r\sin\varphi(r\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}r\sin\varphi)e^{-r^2} r\,drd\varphi \\ &= \frac{4}{3}\left(\int_0^\infty r^3e^{-r^2}dr\right)\left(\int_0^\pi (\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin^2\varphi)d\varphi\right) = \frac{4}{3}(0 - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2})\int_0^\infty r^3 e^{-r^2}dr \\ &= [r^2 = t,\ r\,dr = \frac{1}{2}dt] = -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\frac{1}{2}\int_0^\infty te^{-t}\,dt = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left([-te^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}\,dt\right) = \boxed{-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}. \end{aligned}$$

Alternativ lösning: $I = \int_0^\infty ye^{-\frac{3}{4}y^2}\left(\int_{-\infty}^\infty xe^{-(x+\frac{y}{2})^2}dx\right)dy$. För fixt y är $\int_{-\infty}^\infty xe^{-(x+\frac{y}{2})^2}dx = [x + \frac{y}{2} = u] = \int_{-\infty}^\infty (u - \frac{y}{2})e^{-u^2}du = \int_{-\infty}^\infty ue^{-u^2}du - \frac{y}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}du = 0 - \frac{y}{2}\sqrt{\pi} = -\frac{y}{2}\sqrt{\pi}$, så att $I = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty y^2e^{-\frac{3}{4}y^2}dy = [\frac{\sqrt{3}}{2}y = v] = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{4}{3}\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^\infty v^2e^{-v^2}dv = -\frac{4\sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}}\left(\left[-\frac{1}{2}ve^{-v^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-v^2}dv\right) = -\frac{4\sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}}(0 + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}) = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

---

4. a) $I = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, $\gamma : x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$, $z = y + 1$. Projektionen γ_1 av γ på xy-planet: $x^2 + y^2 + 4(y+1)^2 = 4$, $x^2 + 5y^2 + 8y = 0$, $x^2 + 5(y + \frac{4}{5})^2 = \frac{16}{5}$; en ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y+\frac{4}{5})^2}{b^2} = 1$ med $a = \frac{4}{\sqrt{5}}$, $b = \frac{4}{5}$.

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = yz^2\,dx + z\,dx + xz^2\,dy + 2xyz\,dz + x^2z^2\,dz = d(xyz^2) + z\,dx + x^2z^2\,dz.$$

Då γ är sluten, är $\int_\gamma d(xyz^2) = 0$. På γ är $z = y + 1$, $dz = dy$. Alltså är

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma z\,dx + x^2z^2\,dz = \int_{\gamma_1} (y+1)dx + x^2(y+1)^2dy = [\text{Greens formel; } D \text{ är området innanför } \gamma_1] \\ &= \iint_D [2x(y+1)^2 - 1]dxdy = [\text{symmetri}] = 0 - \iint_D dxdy = -\pi ab = -\pi\frac{4}{\sqrt{5}}\frac{4}{5} = \boxed{-\frac{16\pi}{5\sqrt{5}}}. \end{aligned}$$

b) Exempel på MATLAB-kod:

```
th=[0:pi/20:pi]; fi=[0:pi/20:2*pi]; [Th,Fi]=meshgrid(th,fi);
x=2*cos(Fi).*sin(Th); y=2*sin(Fi).*sin(Th); z=cos(Th);
mesh(x,y,z), axis equal, hold on
t=linspace(0,2*pi);
xc=4/sqrt(5)*cos(t); yc=-0.8+0.8*sin(t); zc=yc+1;
plot3(xc,yc,zc)
```

---

5. Komplettera med den plana ytan $Y_1 : z = 1,\ x^2 + y^2 \le 3$, så att $Y + Y_1$ blir randen till en kropp K på vilken vi kan använda Gauss' sats.

$$\begin{aligned}
\iint_{Y+Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_K (3x^2z + 3y^2z + 2z)\,dxdydz \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 3} (3x^2+3y^2+2)\left\{\int_1^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} z\,dz\right\} dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 3} (3x^2+3y^2+2)\frac{1}{2}[4-(x^2+y^2)-1]dxdy = [\text{polära koord.}] \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} (3r^2+2)(3-r^2)\,rdrd\varphi = [r^2=t] = \frac{1}{4}\cdot 2\pi\int_0^3 (3t+2)(3-t)dt \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^3 (6+7t-3t^2)dt = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{45}{2} = \frac{45\pi}{4}.
\end{aligned}$$

På Y_1 är $z = 1$, $\mathbf{N} = (0, 0, -1)$, $dS = dxdy$ så att $\iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = -\iint_{x^2+y^2\le 3}(1+xy)dxdy =$ [symmetri] $= -\iint_{x^2+y^2\le 3} dxdy = -\pi\cdot 3$. Alltså är $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS - 3\pi = \frac{45\pi}{4}$, och $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \boxed{\frac{57\pi}{4}}$.

---

6. Variabelbytet $s = \frac{y}{x}$, $t = xy^2$, ger $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}u'_s + y^2u'_t$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{x}u'_s + 2xyu'_t$.

$$\begin{aligned}
u''_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{y}{x^2}u'_s + y^2u'_t) = \frac{2y}{x^3}u'_s - \frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}u'_s + y^2\frac{\partial}{\partial x}u'_t = \frac{2y}{x^3}u'_s - \frac{y}{x^2}(-\frac{y}{x^2}u''_{ss} + y^2u''_{st}) \\
&\quad + y^2(-\frac{y}{x^2}u''_{ts} + y^2u''_{tt}) = \frac{2y}{x^3}u'_s + \frac{y^2}{x^4}u''_{ss} + y^4u''_{tt} - \frac{2y^3}{x^2}u''_{st}, \\
u''_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{x}u'_s + 2xyu'_t) = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y}u'_s + 2xu'_t + 2xy\frac{\partial}{\partial y}u'_t = 2xu'_t + \frac{1}{x}(\frac{1}{x}u''_{ss} + 2xyu''_{st}) \\
&\quad + 2xy(\frac{1}{x}u''_{ts} + 2xyu''_{tt}) = 2xu'_t + \frac{1}{x^2}u''_{ss} + 4x^2y^2u''_{tt} + 4yu''_{st}, \\
u''_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{x}u'_s + 2xyu'_t) = -\frac{1}{x^2}u'_s + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}u'_s + 2yu'_t + 2xy\frac{\partial}{\partial x}u'_t = -\frac{1}{x^2}u'_s + 2yu'_t + \frac{1}{x}(-\frac{y}{x^2}u''_{ss} + y^2u''_{st}) \\
&\quad + 2xy(-\frac{y}{x^2}u''_{ts} + y^2u''_{tt}) = -\frac{1}{x^2}u'_s + 2yu'_t - \frac{y}{x^3}u''_{ss} + 2xy^3u''_{tt} - \frac{y^2}{x}u''_{st}.
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
x^2u''_{xx} + y^2u''_{yy} + 2xyu''_{xy} = \frac{2y}{x}u'_s + \frac{y^2}{x^2}u''_{ss} + x^2y^4u''_{tt} - 2y^3u''_{st} \\
+2xy^2u'_t + \frac{y^2}{x^2}u''_{ss} + 4x^2y^4u''_{tt} + 4y^3u''_{st} - \frac{2y}{x}u'_s + 4xy^2u'_t - \frac{2y^2}{x^2}u''_{ss} + 4x^2y^4u''_{tt} - 2y^3u''_{st} \\
= 9x^2y^4u''_{tt} + 6xy^2u'_t = 9t^2u''_{tt} + 6tu'_t = 3t(3tu''_{tt} + 2u'_t).
\end{gathered}$$

Differentialekvationen övergår i $3tu''_{tt} + 2u'_t = 0$. $u'_t = v$ ger $v'_t + \frac{2}{3t}v = 0$. Multiplicera med integrerande faktorn $e^{\int\frac{2}{3t}dt} = e^{\frac{2}{3}\ln t} = t^{2/3}$: $t^{2/3}v'_t + \frac{2}{3}t^{-1/3}v = \frac{d}{dt}(t^{2/3}v) = 0$, $t^{2/3}v = g_1(s)$, $u'_t = t^{-2/3}g_1(s)$, $u = 3t^{1/3}g_1(s) + h(s) = t^{1/3}g(s) + h(s) = \underline{x^{1/3}y^{2/3}g(\frac{y}{x}) + h(\frac{y}{x})}$, där g och h är godtyckliga C^2-funktioner i en variabel.

Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell Matematisk analys F, del B** den 25/8 2004, kl. 14.15–18.15.

Hjälpmedel: "Användarhandledning för MATLAB" av Pärt-Enander–Sjöberg.
Telefon: Fredrik Bengzon, tel. 073-977 92 68.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Betrakta funktionen $f(x, y, z) = xz^2 + ye^{xy}$.

   a. Vilka av följande uttryck är definierade: $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{div} f$, $\operatorname{rot} f$, $\operatorname{grad}\operatorname{grad} f$, $\operatorname{div}\operatorname{grad} f$, $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f$? Beräkna de uttryck som existerar. (3p)

   b. Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(1, 0, -1)$ i riktningen $(-1, 2, 1)$. (2p)

   c. Beräkna tangentplanet till ytan $f(x, y, z) = 1$ i punkten $(1, 0, -1)$. (2p)

2. Taylorutveckla funktionen

$$f(x, y) = \sin(e^{x-2y} - 1 + 4y) - 2\ln\sqrt{1 + x + 2y}$$

   kring origo med termer t.o.m. andra graden (plus restterm). Det finns en konstant a så att gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) + ax^2}{x^2 + y^2}$$

   existerar. Bestäm a och gränsvärdet. (8p)

3. Beräkna $\iint_D x^3 e^{y+x^2}\, dxdy$, där D är det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna

$$y = x^2, \quad y = x^2 + 1, \quad y = 2 - x^2, \quad y = 4 - x^2. \qquad (7p)$$

4. Låt Y vara ytan $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = 2uv$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$.

   a. Beräkna arean av Y. (4p)

   b. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$, då $\mathbf{F} = (x, 0, z)$. (3p)

   c. Skriv en MATLAB-kod för att plotta Y. (2p)

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, då

$$\mathbf{F} = \frac{(x^2y + y^3 - x,\ -x^3 - xy^2 - y)}{(x^2 + y^2)^2},$$

   och γ är ellipsbågen $4x^2 + y^2 = 1$ i första kvadranten från $(\frac{1}{2}, 0)$ till $(0, 1)$. (7p)

6. Lös differentialekvationen

$$x^2 u'_x + e^y u'_y = u + 1, \quad x > 0.$$

   Bestäm en lösning som uppfyller $u(x, 0) = x^2$. (7p)

7. Härled Taylors formel för en funktion av två variabler med restterm av ordning 3. (7p)

8. Formulera och bevisa Greens formel. (8p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 25/8 2004

1. a. grad är definierad för skalära funktioner, div för vektorfunktioner och rot för vektorfunktioner med tre komponenter. För $f(x,y,z) = xz^2 + ye^{xy}$ ä r

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\big) = \big(z^2 + y^2 e^{xy}, (1+xy)e^{xy}, 2xz\big).$$

div f, rot f och grad grad f är odefinierade, medan

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{grad} f &= \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = y^3 e^{xy} + (1+xy)xe^{xy} + xe^{xy} + 2x \\ &= \big(y^3 + 2x + x^2 y\big)\, e^{xy} + 2x,\end{aligned}$$

och rot grad $f = \nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$ generellt.

b. Riktningsderivatan är $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$. Här är $\mathbf{a} = (1,0,-1)$ och $\mathbf{v} = \frac{(-1,2,1)}{\sqrt{6}}$ så att $\nabla f(\mathbf{a}) = (1,1,-2)$ och $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1+2-2) = \underline{-\frac{1}{\sqrt{6}}}$.

c. Punkten $\mathbf{a} = (1,0,-1)$ ligger på ytan $f(x,y,z) = 1$, och en normalvektor är $\nabla f(\mathbf{a}) = (1,1,-2)$. Allltså är tangentplanets ekvation $1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-0) - 2(z+1) = 0$, eller $\underline{x + y - 2z - 3 = 0}$.

---

2. Använd envariabelutvecklingarna $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$, $\sin t = t + O(t^3)$, $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ då $t \to 0$. Då fås (då $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$)

$$\begin{aligned} e^{x-2y} - 1 + 4y &= 1 + x - 2y + \frac{1}{2}(x-2y)^2 + O(r^3) - 1 + 4y = x + 2y + \frac{1}{2}(x-2y)^2 + O(r^3), \\ \sin(e^{x-2y} - 1 + 4y) &= x + 2y + \frac{1}{2}(x-2y)^2 + O(r^3) = x + 2y + \frac{1}{2}x^2 - 2xy + 2y^2 + O(r^3), \\ 2\ln\sqrt{1+x+2y} &= \ln(1+x+2y) = x + 2y - \frac{1}{2}(x+2y)^2 + O(r^3) = x + 2y - \frac{1}{2}x^2 - 2xy - 2y^2 + O(r^3), \\ f(x,y) &= \sin(e^{x-2y} - 1 + 4y) - 2\ln\sqrt{1+x+2y} = x^2 + 4y^2 + O(r^3). \end{aligned}$$

Då är

$$\frac{f(x,y) + ax^2}{x^2+y^2} = \frac{(1+a)x^2 + 4y^2}{x^2+y^2} + O(r),$$

som har gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$ om och endast om $\underline{a = 3}$, och gränsvärdet är i så fall $\underline{4}$.

---

3. Sätt $u = y + x^2$, $v = y - x^2$. Då motsvaras området D av $D' = \{(u,v) : 2 \le u \le 4,\ 0 \le v \le 1\}$ i uv-planet. Vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ -2x & 1 \end{vmatrix} = 4x, \quad dxdy = \frac{1}{\left|\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right|} dudv = \frac{1}{4x} dudv,$$

och $x^2 = \frac{1}{2}(u-v)$, så att

$$\begin{aligned} \iint_D x^3 e^{y+x^2}\, dxdy &= \iint_{D'} \frac{1}{2}(u-v)e^u \frac{1}{4} dudv = \frac{1}{8}\int_2^4 \left\{ \int_0^1 (u-v)e^u\, dv \right\} du \\ &= \frac{1}{8}\int_2^4 (u - \frac{1}{2})e^u\, du = \frac{1}{8}\left\{ \left[(u-\frac{1}{2})e^u\right]_2^4 - \int_2^4 e^u\, du \right\} \\ &= \frac{1}{8}\left\{ \frac{7}{2}e^4 - \frac{3}{2}e^2 - (e^4 - e^2) \right\} = \underline{\frac{1}{16}(5e^4 - e^2)}. \end{aligned}$$

---

4. $\mathbf{r}=(u^2+v^2,u^2-v^2,2uv)$, $\mathbf{r}'_u=(2u,2u,2v)$, $\mathbf{r}'_v=(2v,-2v,2u)$. En normalvektor ä r

$$\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v=4\begin{vmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\u&u&v\\v&-v&u\end{vmatrix}=4(u^2+v^2,v^2-u^2,-2uv),$$

och ytelementet är $dS=|\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v|dudv$, där

$$|\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v|=4\sqrt{(u^2+v^2)^2+(v^2-u^2)^2+4u^2v^2}=4\sqrt{2}\sqrt{u^4+v^4+2u^2v^2}=4\sqrt{2}(u^2+v^2).$$

a. Arean är $\iint_Y dS=\int_0^1\int_0^1 4\sqrt{2}(u^2+v^2)dudv=4\sqrt{2}(\frac{1}{3}\cdot 1+1\cdot\frac{1}{3})=\underline{\frac{8\sqrt{2}}{3}}$.

b. Vi har

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\int_0^1\int_0^1\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v\,dudv=\int_0^1\int_0^1 4[(u^2+v^2)^2-4u^2v^2]dudv$$
$$=4\int_0^1\int_0^1(u^4+v^4-2u^2v^2)dudv=4(\frac{1}{5}\cdot 1+1\cdot\frac{1}{5}-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3})=\underline{\frac{32}{45}}.$$

c. Exempel på en MATLAB-kod:

```
[u,v]=meshgrid(0:0.05:1);
x=u.^2+v.^2; y=u.^2-v.^2; z=2*u.*v;
mesh(x,y,z)
```

---

5. $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\frac{(x^2y+y^3-x)dx-(x^3+xy^2+y)dy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(x^2+y^2)dx-xdx-x(x^2+y^2)dy-ydy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}-\frac{xdx+ydy}{(x^2+y^2)^2}$. För de polära koordinaterna r och φ är $rdr=xdx+ydy$, och $d\varphi=\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ (”det magnetiska fältet”). Alltså är $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=-d\varphi-\frac{dr}{r^3}=-d\varphi+\frac{1}{2}d(\frac{1}{r^2})$, och

$$\int_\gamma\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_\gamma d(-\varphi+\frac{1}{2r^2})=\Big[-\varphi+\frac{1}{2r^2}\Big]_{(\frac{1}{2},0)}^{(0,1)}=-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}+0-2=\underline{-\frac{1}{2}(3+\pi)}.$$

---

6. $x^2u'_x+e^yu'_y=u+1$. Karakteristikernas diferentialekvation (i xy-planet) är $\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{e^y}$ med lösning $-\frac{1}{x}=-e^{-y}-C$, $\frac{1}{x}-e^{-y}=C$. Sätt $s=\frac{1}{x}-e^{-y}$, $t=x$. Då är

$$u'_x=u'_s\cdot(-\frac{1}{x^2})+u'_t\cdot 1,\qquad u'_y=u'_s\cdot e^{-y}+u'_t\cdot 0,$$

och

$$x^2u'_x+e^yu'_y=-u'_s+x^2u'_t+u'_s=t^2u'_t=u+1.$$

Vi får $u'_t-\frac{1}{t^2}u=\frac{1}{t^2}$. Integrerande faktor $e^{1/t}$: $\frac{\partial}{\partial t}(e^{1/t}u)=\frac{1}{t^2}e^{1/t}$, $e^{1/t}u=-e^{1/t}+g(s)$,

$$u=g(s)e^{-1/t}-1=g(\frac{1}{x}-e^{-y})e^{-1/x}-1,$$

där g är en godtycklig C^1-funktion i en variabel. Vi vill ha $u(x,0)=g(\frac{1}{x}-1)e^{-1/x}-1=x^2$, $g(\frac{1}{x}-1)=(x^2+1)e^{1/x}$. Med $s=\frac{1}{x}-1$ har vi $x=\frac{1}{s+1}$ och $g(s)=(\frac{1}{(s+1)^2}+1)e^{s+1}$ (för $s>-1$). Alltså får vi lösningen

$$u(x,y)=\Big(\frac{1}{(\frac{1}{x}-e^{-y}+1)^2}+1\Big)e^{1/x-e^{-y}+1}e^{-1/x}-1=\underline{\Big(\frac{1}{(\frac{1}{x}-e^{-y}+1)^2}+1\Big)e^{1-e^{-y}}-1}.$$

Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell Matematisk analys F, del B** den 14/1 2005, kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Karin Kraft, 073-977 92 68
För godkänt krävs minst 24 poäng.
Lösningar anslås i Matematiskt Centrum efter tentamen.
Resultatet anslås i Matematiskt Centrum senast tre veckor efter tentamen.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Bestäm alla stationära punkter för funktionen $f(x,y,z) = (xy+z)e^{x+2y+3z}$ och bestäm deras karaktär. (8p)

2. Låt f vara en C^1-funktion på $\mathbb{R}^2$. Visa att funktionen $u(x,y,z) = \frac{z}{y} f(\frac{xy}{z^2}, \frac{y}{x})$ satisfierar differentialekvationen
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \qquad (7p)$$

3. Beräkna $\iiint_K (xz^2 + y^2)\, dxdydz$, där K är det område som definieras av olikheterna
$$x^2+y^2+z^2 \le 1, \quad z \le \sqrt{x^2+y^2}, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0. \qquad (8p)$$

4. Bestäm minimum av $x^2+y^2+z^2$ då $x^2+2y^2+2z = 10$. (7p)

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, då
$$\mathbf{F} = \big(yz\cos(xy) + y,\, xz\cos(xy) + z,\, \sin(xy) + x\big)$$
och γ är kurvan $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $z = \sin^2 2t$, $0 \le t \le 2\pi$. (8p)

6. Beräkna $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS$, då Y är ellipsoiden $4x^2+y^2+3z^2 = 4$ med normalriktning utåt, och
$$\mathbf{F} = \frac{(x, y-1, z)}{(x^2+(y-1)^2+z^2)^{3/2}}. \qquad (7p)$$

7. a. Ange vad som menas med att ett vektorfält $\mathbf{F} = (P, Q)$ är ett potentialfält. (2p)

   b. Låt $\mathbf{F} = (P, Q)$ vara ett potentialfält med potential U. Visa hur $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ kan beräknas med hjälp av U. (6p)

8. Låt $f(x,y)$ vara kontinuerlig på ett kompakt område D. Dela in D i delområden. Vad menas med en Riemannsumma hörande till en viss indelning? Visa att Riemannsummorna konvergerar mot $\iint_D f(x,y)\, dxdy$ då indelningens finhet går mot noll. (7p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 14/1 2005

1. Bestäm stationära punkter till $f(x, y, z) = (xy + z)e^{x+2y+3z}$. Sätt $g = e^{x+2y+3z}$. Vi har

$$
\begin{gathered}
f'_x = (y + xy + z)g, \quad f'_y = (x + 2(xy + z))g, \quad f'_z = (1 + 3(xy + z))g, \\
f''_{xx} = (y + y + xy + z)g, \quad f''_{xy} = (1 + x + 2(y + xy + z))g, \quad f''_{xz} = (1 + 3(y + xy + z))g, \\
f''_{yy} = (2x + 2(x + 2xy + 2z))g, \quad f''_{yz} = (2 + 3(x + 2xy + 2z))g, \quad f''_{zz} = (3 + 3(1 + 3xy + 3z))g.
\end{gathered}
$$

$f'_x = f'_y = f'_z = 0$ ger $xy + z = -y = -\frac{x}{2} = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = -\frac{1}{3} - xy = -\frac{5}{9}$. Det finns alltså endast en stationär punkt, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{9})$. Med derivator i denna punkt skall vi titta på den kvadratiska formen

$$
\begin{aligned}
Q &= f''_{xx}h^2 + f''_{yy}k^2 + f''_{zz}l^2 + 2f''_{xy}hk + 2f''_{xz}hl + 2f''_{yz}kl \\
&= (\frac{1}{3}h^2 + \frac{4}{3}k^2 + 3l^2 + \frac{10}{3}hk + 2hl + 4kl)e^{-1/3}.
\end{aligned}
$$

Kvadratkomplettering ger

$$
\begin{aligned}
e^{1/3}Q &= \frac{1}{3}(h^2 + 10hk + 6hl) + \frac{4}{3}k^2 + 3l^2 + 4kl \\
&= \frac{1}{3}[(h + 5k + 3l)^2 - 25k^2 - 9l^2 - 30kl] + \frac{4}{3}k^2 + 3l^2 + 4kl \\
&= \frac{1}{3}(h + 5k + 3l)^2 - 7k^2 - 6kl = \frac{1}{3}(h + 5k + 3l)^2 - 7(k + \frac{3}{7}l)^2 + \frac{9}{7}l^2.
\end{aligned}
$$

Av detta framgår att Q är indefinit, så att $\underline{(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{9}) \text{ är en sadelpunkt.}}$

---

2. $f(s, t)$ är en C^1-funktion. För $u(x, y, z) = \frac{z}{y} f(\frac{xy}{z^2}, \frac{y}{x})$ är

$$
\begin{aligned}
u'_x &= \frac{z}{y}(f'_s \cdot \frac{y}{z^2} + f'_t \cdot \frac{-y}{x^2}) = \frac{1}{z}f'_s - \frac{z}{x^2}f'_t, \\
u'_y &= -\frac{z}{y^2}f + \frac{z}{y}(f'_s \cdot \frac{x}{z^2} + f'_t \cdot \frac{1}{x}) = -\frac{z}{y^2}f + \frac{x}{yz}f'_s + \frac{z}{xy}f'_t, \\
u'_z &= \frac{1}{y}f + \frac{z}{y}(f'_s \cdot \frac{-2xy}{z^3}) = \frac{1}{y}f - \frac{2x}{z^2}f'_s.
\end{aligned}
$$

Alltså är

$$
xu'_x + yu'_y + zu'_z = \frac{x}{z}f'_s - \frac{z}{x}f'_t - \frac{z}{y}f + \frac{x}{z}f'_s + \frac{z}{x}f'_t + \frac{z}{y}f - \frac{2x}{z}f'_s = 0.
$$

---

3. I rymdpolära koordinater, $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = r \cos\theta$, beskrivs K av $0 \le r \le 1$, $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Då är

$$
\begin{aligned}
\iiint_K (xz^2 + y^2)\, dxdydz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r^3 \sin\theta \cos^2\theta \cos\varphi + r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi) r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi \\
&= \int_0^1 r^5\, dr \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi + \int_0^1 r^4 \, dr \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \, d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \, d\varphi \\
&= \frac{1}{6} \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2\theta \, d\theta \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2\theta)\sin\theta \, d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)\, d\varphi \\
&= \frac{1}{6} \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8}(1 - \cos 4\theta)\, d\theta + \frac{1}{5} \cdot [-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta]_{\pi/4}^{\pi/2} \cdot \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{1}{48}\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{20}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{2\sqrt{2}}) = \underline{\pi(\frac{1}{192} + \frac{\sqrt{2}}{48})}.
\end{aligned}
$$

---

4. Sök minimum av $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ då $g(x,y,z) = x^2+2y^2+2z = 10$. Då minimum antas är $\nabla f = \lambda \nabla g$ för något tal λ, dvs.

$$2x = \lambda \cdot 2x,\ 2y = \lambda \cdot 4y,\ 2z = \lambda \cdot 2,$$

eftersom $\nabla g \neq \mathbf{0}$. Vi har alltså

$$x(\lambda - 1) = 0,\ y(2\lambda - 1) = 0,\ z = \lambda.$$

Den första ekvationen säger att $x = 0$ eller $\lambda = 1$. Antag $x = 0$. Om $y = 0$ är $g = 2z = 10$, $z = 5$, $f = 25$. Om $y \neq 0$ är $z = \lambda = \frac{1}{2}$, $g = 2y^2 + 1 = 10$, $y^2 = \frac{9}{2}$, $f = \frac{9}{2} + \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$. Antag $x \neq 0$. Då är $z = \lambda = 1$, $2\lambda - 1 \neq 0$, $y = 0$, $g = x^2 + 2 = 10$, $x^2 = 8$, $f = 8 + 1 = 9$. En jämförelse av f-värdena ger att $\underline{\text{minimum är } f(0, \pm\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}) = \frac{19}{4}}$.

---

5. $\gamma : x = 2\cos t,\ y = \sin t,\ z = \sin^2 2t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$. På γ är $z = 4\sin^2 t \cos^2 t = x^2y^2$ och $dz = 2xy^2\,dx + 2x^2y\,dy$.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= yz\cos(xy)\,dx + y\,dx + xz\cos(xy)\,dy + z\,dy + \sin(xy)\,dz + x\,dz\\ &= d(z\sin(xy)) + y\,dx + z\,dy + x\,dz.\end{aligned}$$

Då γ är sluten, är $\int_\gamma d(z\sin(xy)) = 0$. Projektionen γ_1 av γ på xy-planet är ellipsen $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ genomlöpt ett varv i positiv led. Om D är området innanför γ_1, ger Greens formel

$$\begin{aligned}\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz &= \int_\gamma y\,dx + x^2y^2\,dy + x(2xy^2\,dx + 2x^2y\,dy)\\ &= \int_{\gamma_1} (y + 2x^2y^2)dx + (x^2y^2 + 2x^3y)dy = \iint_D [2xy^2 + 6x^2y - (1 + 4x^2y)]dxdy\\ &= \iint_D (2xy^2 + 2x^2y - 1)dxdy = -\iint_D dxdy = -\mu(D) = -\pi\cdot 2\cdot 1 = -2\pi,\end{aligned}$$

ty $\iint_D xy^2\,dxdy = \iint_D x^2y\,dxdy = 0$ p.g.a. symmetri. Alltså är $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \underline{-2\pi}$.

---

6. Med $\mathbf{r} = (x, y-1, z)$ och $r = |\mathbf{r}| = (x^2 + (y-1)^2 + z^2)^{1/2}$ är $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$. För $\mathbf{r} \neq (0,1,0)$ är

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3} = \frac{r^3\cdot 1 - x\cdot 3r^2\frac{x}{r}}{r^6} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$$

och analogt $\frac{\partial}{\partial y}\frac{y-1}{r^3} = \frac{r^2 - 3(y-1)^2}{r^5}$, $\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{r^3} = \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$, så att

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{3r^2 - 3(x^2 + (y-1)^2 + z^2)}{r^5} = 0.$$

Punkten $(0,1,0)$ ligger innanför Y. Låt Y_1 vara sfären $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = a^2$, där radien a är så liten att Y_1 ligger innanför Y. Om Y_1 har utåtriktad normal, så är $Y - Y_1$ rand till området D mellan Y och Y_1, och en tillämpning av Gauss' sats ger att $\iint_{Y-Y_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = 0$, så att $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{Y_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$. På Y_1 är $r = |\mathbf{r}| = a$ och $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}}{a}$. Alltså är

$$\iint_{Y_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{Y_1}\frac{\mathbf{r}}{a^3}\cdot\frac{\mathbf{r}}{a}\,dS = \iint_{Y_1}\frac{a^2}{a^4}\,dS = \frac{1}{a^2}\cdot 4\pi a^2 = \underline{4\pi}.$$

Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell Matematisk analys F, del B** den 14/3 2005, kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: "Användarhandledning för MATLAB" av Pärt-Enander–Sjöberg.
Telefon: Niclas Andréasson, 0739-77 92 68
För godkänt krävs minst 24 poäng.
Lösningar anslås i Matematiskt Centrum efter tentamen.
Resultatet anslås i Matematiskt Centrum senast tre veckor efter tentamen.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Funktionen $f(x, y)$ satisfierar differentialekvationen

$$2xf'_x(x, y) + 3yf'_y(x, y) = 0 \text{ för } x > 0,\ y > 0.$$

Visa att kurvan $x = t^2$, $y = t^3$, $t > 0$, är en nivåkurva till f. (8p)

2. Beräkna $\iint_D \frac{(2x^4+3x^2+1)y^2}{x^3}\,dxdy$, då D är det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna

$$y = \frac{1}{1+x^2}, \quad y = \frac{3}{1+x^2}, \quad y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{2}.$$ (8p)

3. Låt $d_1 = d_1(x, y)$ och $d_2 = d_2(x, y)$ vara avstånden från (x, y) till $(2, 0)$ resp. $(-2, 2)$. Minimera $d_1^2 + d_2^2$ då (x, y) uppfyller $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. (8p)

4. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, då

$$\mathbf{F} = \Big(\frac{xz}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + xz,\ \frac{yz}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - xy,\ \sqrt{1+x^2+y^2} + xy\Big)$$

och γ är skärningen mellan ytorna $x^2 + y^2 + z = 1$ och $x - 2y + z = 1$. Kurvans projektion på xy-planet är positivt orienterad. (8p)

5. a. Låt K vara kroppen som definieras av olikheterna $y^2 + z^2 \le 1$ och $z \ge x^2$. Beräkna $\iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$ (normalriktning utåt), då $\mathbf{F} = (0,\ yz\sqrt{1-x^4},\ \sqrt{1-x^4})$. (8p)

   b. Skriv en MATLAB-kod för att rita ∂K. (4p)

6. Vad menas med att en funktion $f(x, y)$ är differentierbar i en punkt (x_0, y_0)? Visa att om f är av klassen C^1 i en omgivning av (x_0, y_0), så är f differentierbar i (x_0, y_0). (8p)

7. Formulera och bevisa Gauss' sats. (8p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 14/3 2005

1. Man vet att $2xf'_x(x,y) + 3yf'_y(x,y) = 0$ för $x > 0$, $y > 0$. Enligt kedjeregeln är

$$\frac{d}{dt}f(t^2,t^3) = f'_x(t^2,t^3)\cdot 2t + f'_y(t^2,t^3)\cdot 3t^2 = \frac{1}{t}[2t^2f'_x(t^2,t^3) + 3t^3f'_y(t^2,t^3)] = 0.$$

Alltså är $f(t^2,t^3)$ konstant, dvs. kurvan $(x,y) = (t^2,t^3)$ är en nivåkurva till f.

---

2. Sätt $u = y(1+x^2)$, $v = \frac{y}{x^2}$. Då blir integrationsområdet $D' = \{(u,v) : 1 \le u \le 3, \frac{1}{2} \le v \le 1\}$ i uv-planet. Vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 2xy & 1+x^2 \\ -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x} + \frac{2y}{x^3}(1+x^2) = \frac{2y}{x^3}(2x^2+1),$$

$$dxdy = \frac{1}{\left|\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right|}dudv = \frac{x^3}{2y(2x^2+1)}dudv.$$

Alltså är

$$\iint_D \frac{(2x^4+3x^2+1)y^2}{x^3}\,dxdy = \iint_{D'} \frac{(2x^2+1)(x^2+1)y^2}{x^3}\frac{x^3}{2y(2x^2+1)}\,dudv$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{D'} y(x^2+1)\,dudv = \frac{1}{2}\iint_{D'} u\,dudv = \frac{1}{2}\int_1^3 u\,du\int_{\frac{1}{2}}^1 dv = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^3\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}(9-1) = \underline{\underline{1}}.$$

---

3. Minimera $f(x,y) = d_1(x,y)^2 + d_2(x,y)^2 = (x-2)^2 + y^2 + (x+2)^2 + (y-2)^2 = 2x^2 + 8 + y^2 + (y-2)^2$ under bivillkoret $g(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. I punkter där minimum antas finns ett tal λ så att $\nabla f = \lambda\nabla g$ (eftersom $\nabla g = (2x, \frac{y}{2}) \ne (0,0)$ då $g = 1$). Alltså gäller

$$\begin{cases} 4x = \lambda 2x, \\ 2y + 2(y-2) = \lambda\frac{y}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x(2-\lambda) = 0, \\ y(4-\frac{\lambda}{2}) = 4. \end{cases}$$

Ur första ekvationen fås $x = 0$ eller $\lambda = 2$. Om $x = 0$ fås $g(0,y) = \frac{y^2}{4} = 1$, $y = \pm 2$, med funktionsvärden $f(0,2) = 12$, $f(0,-2) = 28$. Om $\lambda = 2$ ger andra ekvationen $3y = 4$, $y = \frac{4}{3}$, och vi får $g(x,\frac{4}{3}) = x^2 + \frac{16}{4\cdot 9} = x^2 + \frac{4}{9} = 1$, $x^2 = \frac{5}{9}$, $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ med $f(\pm\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{4}{3}) = 2\cdot\frac{5}{9} + 8 + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} = 8 + \frac{30}{9} = 8 + \frac{10}{3} = \frac{34}{3} < 12$. Alltså fås <u>minimivärdet $\frac{34}{3}$ i punkterna $(\pm\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{4}{3})$</u>.

---

4. Projektionen γ_1 på xy-planet av kurvan γ fås av $(z =)\ 1 - x^2 - y^2 = 1 - x + 2y$, dvs. $(x-\frac{1}{2})^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{4}$. Låt D vara området innanför γ_1. På γ är $dz = -dx + 2dy$, så att

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma (\frac{xz}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + xz)\,dx + (\frac{yz}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - xy)\,dy + (\sqrt{1+x^2+y^2} + xy)\,dz$$

$$= \int_\gamma d(z\sqrt{1+x^2+y^2}) + \int_\gamma xz\,dx - xy\,dy + xy\,dz$$

$$= 0 + \int_{\gamma_1} x(1-x+2y)\,dx - xy\,dy + xy(-dx+2dy) = \int_{\gamma_1}(x - x^2 + xy)\,dx + xy\,dy$$

$$= [\text{Greens formel}] = \iint_D (y-x)\,dxdy$$

$$= [\text{polära koord.}, x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi,\ y = -1 + r\sin\varphi,\ 0 \le r \le \frac{\sqrt{5}}{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ dxdy = r\,drd\varphi]$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}/2}(-1 + r\sin\varphi - \frac{1}{2} - r\cos\varphi)r\,drd\varphi = -\frac{3}{2}\cdot 2\pi\int_0^{\sqrt{5}/2} r\,dr = -3\pi\cdot\frac{1}{2}\left[r^2\right]_0^{\sqrt{5}/2}$$

$$= -\frac{3\pi}{2}\frac{5}{4} = \underline{-\frac{15\pi}{8}}.$$

---

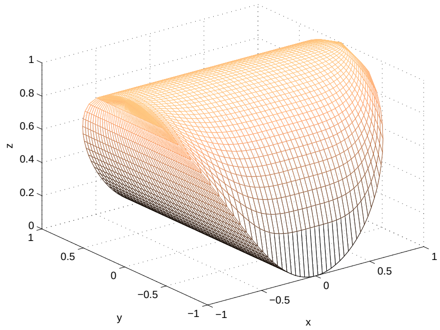
5. Kroppen K ges av $y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq x^2$ eller $x^2 \leq z \leq \sqrt{1-y^2}$ för $(x,y) \in D = \{(x,y) : x^4 + y^2 \leq 1\}$.

a. Enligt Gauss' sats är

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial K} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_K z\sqrt{1-x^4}\,dxdydz \\
&= \iint_D \left\{\int_{x^2}^{\sqrt{1-y^2}} z\sqrt{1-x^4}\,dz\right\} dxdy = \iint_D \sqrt{1-x^4}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{1-y^2}} dxdy \\
&= \frac{1}{2}\iint_D (1-y^2-x^4)\sqrt{1-x^4}\,dxdy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^4}\left\{\int_{-\sqrt{1-x^4}}^{\sqrt{1-x^4}}(1-x^4-y^2)\,dy\right\} dx \\
&= 2\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\left[(1-x^4)y - \frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{1-x^4}} dx = 2\int_0^1 (1-x^4)(1-x^4-\frac{1}{3}(1-x^4))\,dx \\
&= 2\int_0^1 \frac{2}{3}(1-x^4)^2\,dx = \frac{4}{3}\int_0^1 (1-2x^4+x^8)\,dx = \frac{4}{3}(1-\frac{2}{5}+\frac{1}{9}) = \underline{\underline{\frac{128}{135}}}.
\end{aligned}$$

b. Ett exempel på en MATLAB-kod:

```
x=linspace(-1,1,50);
[X,Y]=meshgrid(x);
Y=sqrt(1-X.^4).*Y;
Z1=X.^2;
Z2=sqrt(1-Y.^2);
mesh(X,Y,Z1)
hold on
mesh(X,Y,Z2)
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');
```



Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell Matematisk analys F, del B** den 24/8 2005, kl. 14.00–18.00.

Hjälpmedel: "Användarhandledning för MATLAB" av Pärt-Enander–Sjöberg.
Telefon:
För godkänt krävs minst 24 poäng.
Lösningar anslås i Matematiskt Centrum efter tentamen.
Resultatet anslås i Matematiskt Centrum senast tre veckor efter tentamen.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Låt f vara en C^1-funktion på $\mathbb{R}^2$. Visa att funktionen $u(x,y,z) = \frac{1}{z} f(\frac{yz}{x^2}, \frac{xz}{y^2})$ satisfierar differentialekvationen
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} + u = 0. \qquad \text{(8p)}$$

2. Låt γ vara den positivt orienterade randen till fyrhörningen med hörn i $(0,0)$, $(2,1)$, $(3,3)$ och $(1,2)$. Beräkna $\int_\gamma e^{2x-y} dx + xy\, dy$. (8p)

3. Låt P vara en punkt i första oktanten på ytan $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$. Tangentplanet i P till ytan skär koordinataxlarna i punkterna A, B och C. Dessa punkter tillsammans med origo bildar hörn i en tetraeder. Bestäm den punkt P som minimerar volymen av denna tetraeder. (8p)

4. a. Beräkna arean av ytan $\mathbf{r} = (u^2, v^2, \sqrt{2}uv)$, $u^2 + v^2 \leq 1$, $u \geq 0$, $v \geq 0$. (8p)

   b. Skriv en MATLAB-kod för att rita ytan. (4p)

5. Låt Y vara ytan $z = 1 - 2x^2 - y^2$, $z \geq 0$. Beräkna $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$ (normalriktning uppåt), då $\mathbf{F} = (xy,\, y^2 + z,\, z^2 - x^2)$. (8p)

6. Visa att under lämpliga förutsättningar på en funktion $f(x,y)$ gäller att $f''_{xy} = f''_{yx}$. (8p)

7. Visa att om kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen i en sammanhängande öppen mängd Ω, så är $\mathbf{F}$ ett potentialfält i Ω. (8p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 24/8 2005

1. $f(s,t)$ är en C^1-funktion. För $u(x,y,z) = \frac{1}{z} f(\frac{yz}{x^2}, \frac{xz}{y^2})$ är

$$u'_x = \frac{1}{z}(f'_s \cdot \frac{-2yz}{x^3} + f'_t \cdot \frac{z}{y^2}) = -\frac{2y}{x^3} f'_s + \frac{1}{y^2} f'_t,$$
$$u'_y = \frac{1}{z}(f'_s \cdot \frac{z}{x^2} + f'_t \cdot \frac{-2xz}{y^3}) = \frac{1}{x^2} f'_s - \frac{2x}{y^3} f'_t,$$
$$u'_z = \frac{1}{z}(f'_s \cdot \frac{y}{x^2} + f'_t \cdot \frac{x}{y^2}) - \frac{1}{z^2} f = \frac{y}{zx^2} f'_s + \frac{x}{zy^2} f'_t - \frac{1}{z^2} f.$$

Alltså är

$$xu'_x + yu'_y + zu'_z + u = -\frac{2y}{x^2} f'_s + \frac{x}{y^2} f'_t + \frac{y}{x^2} f'_s - \frac{2x}{y^2} f'_t + \frac{y}{x^2} f'_s + \frac{x}{y^2} f'_t - \frac{1}{z} f + \frac{1}{z} f = 0.$$

---

2. Om D är området innanför γ ger Greens formel

$$\int_\gamma e^{2x-y} dx + xy\, dy = \iint_D (y - e^{2x-y}(-1))\, dxdy.$$

Fyrhörningens sidor har ekvationerna $2y - x = 0$, $2x - y = 3$, $2y - x = 3$ och $2x - y = 0$. Gör därför variabelbytet $u = 2x - y$, $v = 2y - x$. D motsvaras av $D' = \{(u,v) : 0 \le u \le 3,\ 0 \le v \le 3\}$, och vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3, \qquad dxdy = \frac{1}{3} dudv.$$

Vidare är $y = \frac{1}{3}(u + 2v)$, och

$$\int_\gamma e^{2x-y} dx + xy\, dy = \iint_{D'} (\frac{1}{3}(u+2v) + e^u)\frac{1}{3} dudv = \frac{1}{3}\int_0^3 \int_0^3 (\frac{1}{3}u + e^u + \frac{2}{3}v) dudv$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^3 [(\frac{1}{3}u + e^u) \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 9] du = \left[\frac{1}{6}u^2 + e^u + u\right]_0^3 = \underline{e^3 + \frac{7}{2}}.$$

---

3. Ytan är $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$. Vi har $\nabla g = (2x, 2y, 8z)$. Tangentplanet i punkten (x_0, y_0, z_0), $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, $z_0 > 0$, på ytan har normalvektorn $(x_0, y_0, 4z_0)$, och alltså är planets ekvation

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + 4z_0(z - z_0) = 0,$$

dvs.

$$x_0 x + y_0 y + 4z_0 z = x_0^2 + y_0^2 + 4z_0^2 = 1.$$

$y = z = 0$ ger $x = \frac{1}{x_0}$, $x = z = 0$ ger $y = \frac{1}{y_0}$, $x = y = 0$ ger $z = \frac{1}{4z_0}$. Tetraederns volym blir då $V = \frac{1}{6}\frac{1}{x_0}\frac{1}{y_0}\frac{1}{4z_0}$. Slopa index 0, och maximera $f(x,y,z) = xyz$ under bivillkoret $g(x,y,z) = 1$. Eftersom $\nabla g \ne \mathbf{0}$, gäller att då maximum antas finns ett tal λ så att $\nabla f = \lambda \nabla g$, dvs.

$$\begin{cases} yz = 2\lambda x, \\ xz = 2\lambda y, \\ xy = 8\lambda z. \end{cases}$$

Då är $xyz/(2\lambda) = x^2 = y^2 = 4z^2$. Vidare är $x^2 + y^2 + 4z^2 = 3x^2 = 1$, så att $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $z = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Den minsta volymen fås alltså i punkten $P = \underline{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}})}$, och minimum av V blir $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

---

4. $\mathbf{r} = (u^2, v^2, \sqrt{2}uv)$, $(u,v) \in D = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 1, u \geq 0,\ v \geq 0\}$. $\mathbf{r}'_u = (2u, 0, \sqrt{2}v)$, $\mathbf{r}'_v = (0, 2v, \sqrt{2}u)$. En normalvektor är

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 2u & 0 & \sqrt{2}v \\ 0 & 2v & \sqrt{2}u \end{vmatrix} = (-2\sqrt{2}v^2, -2\sqrt{2}u^2, 4uv) = 2\sqrt{2}(-v^2, -u^2, \sqrt{2}uv),$$

och ytelementet är $dS = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| dudv$, där

$$|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| = 2\sqrt{2}\sqrt{v^4+u^4+2u^2v^2} = 2\sqrt{2}(u^2+v^2).$$

a. Arean är $\iint\limits_Y dS = \iint_D 2\sqrt{2}(u^2+v^2)dudv = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2 r\, dr d\varphi = 2\sqrt{2}\frac{\pi}{2}\int_0^1 r^3\, dr = \underline{\frac{\pi\sqrt{2}}{4}}$.

b. Exempel på en MATLAB-kod:

```
[r,fi]=meshgrid(0:0.05:1,0:pi/40:pi/2);
u=r.*cos(fi); v=r.*sin(fi);
x=u.^2; y=v.^2; z=sqrt(2)*u.*v;
mesh(x,y,z)
```

---

5. $Y : z = 1-2x^2-y^2$, $z \geq 0$. Lägg till "botten" $Y_1 : 2x^2+y^2 \leq 1$, $z = 0$, med normalriktning nedåt, så att $Y + Y_1$ blir rand till en kropp K. Gauss sats ger

$$\begin{aligned}
\iint_{Y+Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS &= \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}\, dxdydz = \iiint_K (y+2y+2z)\, dxdydz \\
&= \iint_{2x^2+y^2\leq 1} \left[3yz+z^2\right]_{z=0}^{1-2x^2-y^2} dxdy \\
&= \iint_{2x^2+y^2\leq 1} [3y(1-2x^2-y^2)+(1-2x^2-y^2)^2]\, dxdy \\
&= [x = \frac{1}{\sqrt{2}}r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ dxdy = \frac{1}{\sqrt{2}}r\, drd\varphi] \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 [3r\sin\varphi(1-r^2)+(1-r^2)^2]\frac{1}{\sqrt{2}}r\, drd\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1 (1-r^2)^2 r\, dr \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\left[-\frac{1}{6}(1-r^2)^3\right]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

På Y_1 är $z = 0$, $\mathbf{N} = (0,0,-1)$, $dS = dxdy$, så att

$$\begin{aligned}
\iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS &= \iint_{2x^2+y^2\leq 1} x^2\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{2}r^2\cos^2\varphi\,\frac{1}{\sqrt{2}}r\, drd\varphi \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 r^3\, dr\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Alltså är $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8\sqrt{2}} = \underline{\frac{5\pi}{24\sqrt{2}}}$.

Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell Matematisk analys F, del B** den 13/1 2006, kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: "Användarhandledning för MATLAB" av Pärt-Enander–Sjöberg.
Telefon: 076-272 18 60.
För godkänt krävs minst 24 poäng.
Resultatet anslås senast tre veckor efter tentamen.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Taylorutveckla funktionen

$$f(x,y) = \sqrt{1+2x-2y}\; e^{2x+y^2} - \frac{\ln(1+3x-y)}{1-x+2y}$$

kring origo med termer t.o.m. andra graden (plus restterm). Visa att origo är en stationär punkt och avgör dess karaktär. (8p)

2. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y) = x^3y$ i området $x^2+2y^2 \leq 1$. (8p)

3. Det finns en kontinuerligt deriverbar funktion g av en variabel sådan att vektorfältet $\mathbf{F} = g(xy)(2x + x^2y, x^3)$ är ett potentialfält. Bestäm g och en potential till $\mathbf{F}$. (8p)

4. a. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, då $\mathbf{F} = \left(x^3, y^2, xz\right)$, och γ är skärningen mellan sfären $x^2+y^2+z^2=1$ och cylindern $(x-1)^2+y^2=1$ genomlöpt från $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ till $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ med positiva z-värden. (8p)

   b. Skriv en MATLAB-kod för att plotta ytorna $x^2+y^2+z^2=1$ och $(x-1)^2+y^2=1$, $-1 \leq z \leq 1$, i samma figur. (4p)

5. Beräkna ytintegralen $\iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$, då $K = \left\{(x,y,z) : x^2+4y^2 \leq z \leq 2x+4y+2\right\}$ (utåtriktad normal), och

$$\mathbf{F} = (xy^2,\, x^3y,\, z). \qquad (8p)$$

6. Hur definieras riktningsderivatan $f'_\mathbf{v}(\mathbf{a})$? Visa hur $f'_\mathbf{v}(\mathbf{a})$ kan uttryckas med hjälp av gradienten. Vad säger detta om gradientens fysikaliska betydelse? (8p)

7. Visa att om funktionen $f(x,y)$ är kontinuerlig på den kompakta rektangeln

$$\Delta = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$

så är f integrerbar över denna. (8p)

KH

Lösning till tentamen i Reell matematisk analys, del B, för F1 den 13/1 2006

1. Använd envariabelutvecklingarna $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3)$, $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$, $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$, $\frac{1}{1-t} = 1 + t + O(t^2)$ då $t \to 0$. Då fås (då $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$)

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \sqrt{1+2x-2y}\; e^{2x+y^2} - \frac{\ln(1+3x-y)}{1-x+2y} \\
&= [1 + \frac{1}{2}(2x-2y) - \frac{1}{8}(2x-2y)^2 + O(r^3)][1 + 2x + y^2 + \frac{1}{2}(2x+y^2)^2 + O(r^3)] \\
&- [3x - y - \frac{1}{2}(3x-y)^2 + O(r^3)][1 + (x-2y) + O(r^2)] \\
&= [1 + x - y - \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + O(r^3)][1 + 2x + y^2 + 2x^2 + O(r^3)] \\
&- [3x - y - \frac{9}{2}x^2 + 3xy - \frac{1}{2}y^2 + O(r^3)][1 + x - 2y + O(r^2)] \\
&= 1 + 3x - y + \frac{7}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + O(r^3) - [3x - y - \frac{3}{2}x^2 - 4xy + \frac{3}{2}y^2 + O(r^3)] \\
&= 1 + 5x^2 + 3xy - y^2 + O(r^3).
\end{aligned}$$

Ur detta avläser vi att $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, dvs. origo är en stationär punkt. Tillhörande kvadratisk form är $Q = 2(5x^2 + 3xy - y^2) = -2(y - \frac{3x}{2})^2 + \frac{29}{2}x^2$, som är indefinit, varför origo är en sadelpunkt.

---

2. $f(x,y) = x^3y$, $x^2 + 2y^2 \le 1$. Vi har att $\nabla f = (3x^2y, x^3) = \mathbf{0}$ då $x = 0$. Men $f(0,y) = 0$ kan varken vara max. eller min. (ty f antar både positiva och negativa värden). Max. och min. över området antas alltså på randen $x^2+2y^2 = 1$. Vi har att söka max. och min. av $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y) = x^2+2y^2 = 1$. I punkter där max. och min. antas (sådana punkter finns, eftersom f är kontinuerlig, och randen är kompakt) är ∇f och $\nabla g = (2x, 4y)$ parallella. Vi måste ha

$$\begin{vmatrix} 3x^2y & x^3 \\ 2x & 4y \end{vmatrix} = 12x^2y^2 - 2x^4 = 2x^2(6y^2 - x^2) = 0.$$

Eftersom $x \ne 0$ enligt ovan, får vi $6y^2 - x^2 = 0$. $x^2 = 6y^2$, $x^2 + 2y^2 = 8y^2 = 1$, $y = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $x^2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (alla teckenkombinationer). Motsvarande funktionsvärden är $\pm\frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{1}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{3\sqrt{6}}{32}$. Max.värde: $\frac{3\sqrt{6}}{32}$, min.värde: $-\frac{3\sqrt{6}}{32}$.

---

3. $\mathbf{F} = (P, Q)$, där $P = g(xy)(2x + x^2y)$ och $Q = g(xy)x^3$. Villkoret för att $\mathbf{F}$ skall vara ett potentialfält är $P'_y = Q'_x$. Vi har $P'_y = g(xy)x^2 + g'(xy)x(2x + x^2y)$, $Q'_x = g(xy)3x^2 + g'(xy)y \cdot x^3$, varför

$$g(xy)x^2 + 2g'(xy)x^2 + g'(xy)x^3y = 3g(xy)x^2 + g'(xy)x^3y, \qquad 2g'(xy)x^2 = 2g(xy)x^2.$$

Funktionen $g(t)$ satisfierar alltså differentialekvationen $g'(t) = g(t)$, så att $g(t) = Ce^t$. Vi kan ta $g(t) = e^t$, och då blir $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = P dx + Q dy = (2x + x^2y)e^{xy}dx + x^3e^{xy}dy = d(x^2e^{xy})$. Alltså är en potential x^2e^{xy}.

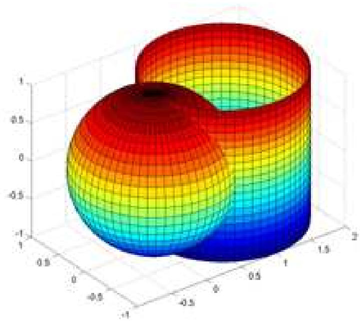
---

4. a. γ: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(x-1)^2 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$. Alltså är $(x^2 + y^2 =)\, 1 - z^2 = 2x$ och $-2z\,dz = 2\,dx$, dvs. $z\,dz = -dx$ på γ. Projektionen γ_1 av γ på xy-planet är en del av cirkeln $(x-1)^2 + y^2 = 1$ genomlöpt från $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ till $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ i positiv led.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_\gamma x^3dx + y^2dy + xz\,dz = \int_{\gamma_1} x^3dx + y^2dy - x\,dx \\
&= \int_{\gamma_1} d\Big(\frac{x^4}{4} + \frac{y^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big) = \Big[\frac{x^4}{4} + \frac{y^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big]_{(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})}^{(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})} \\
&= \Big[\frac{y^3}{3}\Big]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^3 - \frac{1}{3}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^3 = -\frac{2}{3}\frac{3\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

b. En MATLAB-kod:

```
fi=-pi:pi/30:pi;
th=0:pi/25:pi;
[Th,Fi]=meshgrid(th,fi);
x1=sin(Th).*cos(Fi);
y1=sin(Th).*sin(Fi);
z1=cos(Th);
surf(x1,y1,z1), hold on
[Fi,Z]=meshgrid(fi,-1:1/10:1);
x2=1+cos(Fi);
y2=sin(Fi);
z2=Z;
surf(x2,y2,z2)
axis([-1 2 -1 1]), axis equal
```



---

5. Projektionen D av K på xy-planet fås av $x^2+4y^2 \le 2x+4y+2$, $(x-1)^2+4(y-\frac{1}{2})^2 \le 4$, så att D är en ellips med centrum i $(1, \frac{1}{2})$ och halvaxlar 2 och 1. Enligt Gauss' sats är

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial K} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_K (y^2+x^3+1)dxdydz \\
&= \iint_D \left\{\int_{x^2+4y^2}^{2x+4y+2} (y^2+x^3+1)dz\right\} dxdy \\
&= \iint_D (y^2+x^3+1)\big(2x+4y+2-(x^2+4y^2)\big)dxdy \\
&= \iint_D (y^2+x^3+1)\big(4-(x-1)^2-4(y-\frac{1}{2})^2\big)dxdy \\
&= \left[x = 1+2r\cos\varphi,\ y = \frac{1}{2}+r\sin\varphi,\ dxdy = 2r\,drd\varphi\right] \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \big[(\frac{1}{2}+r\sin\varphi)^2+(1+2r\cos\varphi)^3+1\big](4-4r^2)2r\,drd\varphi \\
&= 8\int_0^{2\pi}\int_0^1 \big(\frac{9}{4}+r\sin\varphi+r^2\sin^2\varphi+6r\cos\varphi+12r^2\cos^2\varphi+8r^3\cos^3\varphi\big)(r-r^3)\,drd\varphi.
\end{aligned}$$

Nu är $\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\cos^3\varphi\,d\varphi = 0$, $\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi = \pi$. Vi får

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial K} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= 8\int_0^1 \big(\frac{9}{4}2\pi(r-r^3)+13\pi r^2(r-r^3)\big)\,dr = 8\pi\int_0^1 \big(\frac{9}{2}(r-r^3)+13(r^3-r^5)\big)\,dr \\
&= 8\pi\big(\frac{9}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+13(\frac{1}{4}-\frac{1}{6})\big) = 8\pi(\frac{9}{8}+\frac{13}{12}) = \underline{\frac{53\pi}{3}}.
\end{aligned}$$
