Lösningar till

Övningar i
ANALYS I FLERA VARIABLER

av Marcus Aronsson 2012

Notera att lösningar som ges här inte är skrivna
för att redovisas i en tentamenssituation.
Få bilder ritas och många inte helt vedertagna beteckningar används.
Likaså ska använda satser motiveras.
Jag bibehåller mig också rätten att alla lösningar skulle kunna
vara helt åt skogen fel. De ger dock rätt svar :)

Och så allt det där med att jag inte har några rättigheter...

Jag hoppas att något jag skriver här hjälper Dig!

10 Kurvintegraler, arbete

10.1 $\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^{4\pi} \mathbb{F}(\mathbb{r}(t))\cdot \mathbb{r}'(t)\,dt = \int_0^{4\pi} (\cos t, \sin t, t)\cdot(-\sin t, \cos t, 1)\,dt =$

$= \int_0^{4\pi} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{4\pi} = 8\pi^2$

10.2 $\mathbb{F} = (3x^2+6y, -14yz, 20xz^2)$

a) $\mathbb{r} = (t,t,t)$, $0 \le t \le 1$

$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^1 \mathbb{F}(\mathbb{r}(t))\cdot\mathbb{r}'(t)\,dt = \int_0^1 (3t^2+6t, -14t^2, 20t^3)\cdot(1,1,1)\,dt = \int_0^1 (20t^3 - 11t^2 + 6t)\,dt =$

$= \left[5t^4 - \frac{11t^3}{3} + 3t^2\right]_0^1 = 8 - \frac{11}{3} = \frac{13}{3}$

b) $\mathbb{r}_1 = (t,0,0)$, $\mathbb{r}_2 = (1,s,0)$, $\mathbb{r}_3 = (1,1,r)$ $\quad 0 \le t \le 1$, $0 \le s \le 1$, $0 \le r \le 1$

$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^1 \mathbb{F}(\mathbb{r}_1(t))\cdot\mathbb{r}_1'(t)\,dt + \int_0^1 \mathbb{F}(\mathbb{r}_2(s))\cdot\mathbb{r}_2'(s)\,ds + \int_0^1 \mathbb{F}(\mathbb{r}_3(r))\cdot\mathbb{r}_3'(r)\,dr =$

$= \int_0^1 (3t^2, 0, 0)\cdot(1,0,0)\,dt + \int_0^1 (3+6s, 0, 0)\cdot(0,1,0)\,ds + \int_0^1 (3+6, -14r, 20r^2)\cdot(0,0,1)\,dr =$

$= \int_0^1 3t^2\,dt + \int_0^1 0\,ds + \int_0^1 20r^2\,dr = \left[t^3\right]_{t=0}^{t=1} + \left[\frac{20r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1} = 1 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3}$

c) $\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^1 \mathbb{F}(\mathbb{r}(t))\cdot\mathbb{r}'(t)\,dt = \int_0^1 (3t^2+6t^2, -14t^5, 20t^7)\cdot(1, 2t, 3t^2)\,dt =$

$= \int_0^1 (9t^2 - 28t^6 + 60t^9)\,dt = \left[\frac{9t^3}{3} - \frac{28t^7}{7} + \frac{60t^{10}}{10}\right]_0^1 = \frac{9}{3} - \frac{28}{7} + \frac{60}{10} = 5$

10.3 $\mathbb{r} = (t, t^2, 0)$ $\quad 0 \le t \le 2$

$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^2 \mathbb{F}(\mathbb{r}(t))\cdot\mathbb{r}'(t)\,dt = \int_0^2 (t^2, t^2, t^2)\cdot(1, 2t, 0)\,dt = \int_0^2 (t^2 + 2t^3)\,dt =$

$= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{2t^4}{4}\right]_0^2 = \frac{8}{3} + \frac{32}{4} = \frac{32}{3}$

10.4 a) $\mathbb{r} = (R\cos t, R\sin t, 1)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^{2\pi} \mathbb{F}(\mathbb{r}(t))\cdot\mathbb{r}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (-R\sin t, R\cos t, 0)\cdot(-R\sin t, R\cos t, 0)\,dt =$

$= \int_0^{2\pi} (R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} R^2\,dt = \left[R^2 t\right]_0^{2\pi} = 2\pi R^2$

b) $\mathbb{r} = (t,t,1)$ $\quad 0 \le t \le 1$

$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^1 \mathbb{F}(\mathbb{r}(t))\cdot\mathbb{r}'(t)\,dt = \int_0^1 (-t, t, 0)\cdot(1,1,0)\,dt = \int_0^1 (-t+t)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0$

c) $(x,y,t)\cdot(-y,x,0) = 0$ vilket innebär att de är vinkelräta. Då ($\overset{z}{t}$ inte spelar någon roll) har vi att kraftfältet går i cirklar moturs runt z-axeln med styrka motsvarande avståndet till z-axeln (se svaret i boken). I a) gick vi i cirklar vilket innebär arbete medan i b gick vi vinkelrätt mot kraftfältet (linje bort från z-axeln), inget arbete.

10.5 a) $\mathbf{r} = (R\cos t, R\sin t, 1) \quad 0 \le t \le 2\pi$

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (R\cos t, R\sin t, 0) \cdot (-R\sin t, R\cos t, 0)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-R^2 \cos t \sin t + R^2 \cos t \sin t)\,dt = \int_0^{2\pi} 0\,dt = 0$$

b) $\mathbf{r} = (t, t, 1) \quad 0 \le t \le 1$

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^1 (t, t, 0) \cdot (1, 1, 0)\,dt = \int_0^1 2t\,dt = \left[t^2\right]_0^1 = 1$$

c) Kraftfältet har samma storlek och riktning som avståndet från z-axeln (se Svar i boken) I a) gick vi i cirklar, vinkelrätt mot kraftfältet, inget arbete. I b) gick vi längs kraftfältet, därmed arbete

10.6 $\mathbf{r} = (R\cos t, R\sin t, C) \; 0 \le t \le 2\pi$

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2}(-R\sin t, R\cos t, 0) \cdot (-R\sin t, R\cos t, 0)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2}(R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

10.7 $\mathbf{r} = (x(t), y(t), C) \quad 0 \le t \le 1 \quad$ där $x(0) = x(1)$ och $y(0) = y(1)$ (*)

$\mathbf{F} = (x\cos z, y\sin z, z)$

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^1 (x(t)\cos C, y(t)\sin C, C) \cdot (x'(t), y'(t), 0)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \left(x(t) \cdot \cos C \cdot x'(t) + y(t) \cdot \sin C \cdot y'(t)\right)dt \overset{\text{p.i.}}{=} \left[\cos C \,\frac{(x(t))^2}{2} + \sin C \,\frac{(y(t))^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$\cos C \left(\frac{(x(1))^2 - (x(0))^2}{2}\right) + \sin C \left(\frac{(y(1))^2 - (y(0))^2}{2}\right) \overset{\text{med (*)}}{=} 0$$

Ytintegraler, flöden

10.8 parametrisering av ytan: $\mathbf{r} = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, s) \quad 0 \le t \le 2\pi, \; -2 \le s \le 2$

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(s,t)) \cdot (\mathbf{r}'_t \times \mathbf{r}'_s)\,ds\,dt = \iint_D \frac{1}{2}(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, s) \cdot \left((-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t, 0) \times (0, 0, 1)\right)ds\,dt$$

$$= \iint_D \frac{1}{2}(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, s) \cdot (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, 0)\,ds\,dt = \iint_D \frac{1}{2}(2\cos^2 t + 2\sin^2 t) = \int_0^{2\pi} dt \int_{-2}^{2} ds = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$$

10.9 a) $\mathbf{r} = (1, s, t) \quad 0 \le s \le 1, \; 0 \le t \le 1 \qquad \mathbf{N} = (\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t) = (1, 0, 0)$

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS = \iint_D (4t, -s^2, st) \cdot (1, 0, 0)\,ds\,dt = \iint_D 4t\,ds\,dt = 4\int_0^1 ds \int_0^1 t\,dt = 4 \cdot \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 2$$

b)
$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS = \iint_{D_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS + \dots + \iint_{D_6} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS = \left\{\begin{matrix}\text{med parametrisering} \\ \text{likt den i a)} \\ x = r \text{ då } x \text{ inte konstant}\end{matrix}\right\} = \iint_{D_1} (4t, -s^2, st) \cdot (1, 0, 0)\,ds\,dt + \iint_{D_2} (0, -s^2, st) \cdot (-1, 0, 0)\,ds\,dt +$$

$$+ \iint_{D_3} (4rt, -1, t) \cdot (0, 1, 0)\,dr\,dt + \iint_{D_4} (4rt, 0, 0) \cdot (0, -1, 0)\,dr\,dt = \iint_{D_5} (4r, -s^2, s) \cdot (0, 0, 1)\,dr\,ds + \iint_{D_6} (0, -s^2, 0) \cdot (0, 0, -1)\,dr\,ds =$$

$$= \iint_{D_1} 4t\,ds\,dt + \iint_{D_2} 0\,ds\,dt + \iint_{D_3} -dr\,dt + \iint_{D_4} 0\,dr\,dt + \iint_{D_5} s\,dr\,ds + \iint_{D_6} 0\,dr\,ds = 4\left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=1} - \left[r\right]_{r=0}^{1} + \left[\frac{s^2}{2}\right]_{s=0}^{s=1} = 2 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

alternativt, se lösning till 10.20

10.10 $x+y+z=1 \quad \mathbf{r}=(s,t,1-s-t) \quad 0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1-s$

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(s,t))\cdot(\mathbf{r}'_s\times\mathbf{r}'_t)\,ds\,dt=\iint_D (s-t+st,-2s+t,s-s^2-st)\cdot((1,0,-1)\times(0,1,-1))\,ds\,dt=$$

$$\iint_D (s-t+st,-2s+t,s-s^2-st)\cdot(1,1,1)\,ds\,dt=\iint_D (s-t+st-2s+t+s-s^2-st)\,ds\,dt=\int_0^1 ds\int_0^{1-s}-s^2\,dt=$$

$$=\int_0^1 -s^2(1-s)\,ds=\left[\frac{s^4}{4}-\frac{s^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}$$, då $\mathbf{N}=(1,1,1)$ riktad uppåt blir svaret $\frac{1}{12}$ och nedåt

10.11 $\mathbf{r}=(s\cos t, s\sin t, 1-s^2) \quad 0\le s\le 1,\ 0\le t\le 2\pi$

$$\iint_Y \mathbf{u}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iint_D \mathbf{u}(\mathbf{r}(s,t))\cdot(\mathbf{r}'_s\times\mathbf{r}'_t)\,ds\,dt=\iint_D (s\cos t, s\sin t, 2-s^2)\cdot((\cos t,\sin t,-2s)\times(-s\sin t, s\cos t,0))\,ds\,dt=$$

$$\iint_D (s\cos t, s\sin t, 2-s^2)\cdot(2s^2\cos t, 2s^2\sin t, s)\,ds\,dt=\iint_D (2s^3\cos^2 t+2s^3\sin^2 t+2s-s^3)\,ds\,dt=$$

$$\int_0^{2\pi}dt\int_0^1(2s^3+2s-s^3)\,ds=2\pi\left[\frac{s^4}{4}+\frac{2s^2}{2}\right]_0^1=2\pi\left(\frac{1}{4}+1\right)=\frac{5\pi}{2}$$

10.12 $\mathbf{r}=(R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta) \qquad \mathbf{N}=J\cdot\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}=R^2\sin\theta(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iint_D \underbrace{\frac{1}{R^2}}_{=\frac{R}{R^3}}(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)^2\cdot R^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta=\boxed{0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\pi}$$

(ett alternativ så man slipper kryssprodukten)

($\mathbf{F}$ och $\mathbf{N}$ har samma riktning)

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=2\pi\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}=4\pi$$

(* se botten på sidan)

10.13 a) $\mathbf{r}=\sqrt{2}(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta) \qquad 0\le\varphi\le 2\pi$ (ty φ påverkar bara x och y)

$\cos\theta\le\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\frac{\pi}{4}\le\theta\le\pi$ (i det naturliga området $0\le\theta\le\pi$)

b) $\mathbf{N}=2\sin\theta(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$ (som i 10.12)

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iint_D \underbrace{\frac{c}{2}}_{=\frac{c|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|^3}}(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)^2\,2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta=c\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\pi/4}^{\pi}\sin\theta\,d\theta=2\pi c\left[-\cos\theta\right]_{\pi/4}^{\pi}=$$

$$=2\pi c\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\pi c(\sqrt{2}+1)$$

10.14 två ytor, en in mot origo, en utåt.

$\mathbf{r}_1=\sqrt{2}(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta) \quad 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\pi \quad \} D_1$

$\mathbf{r}_2=\sqrt{3}(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta) \quad 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\pi \quad \} D_2$

$\mathbf{N}_1=-2\sin\theta(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$
$\mathbf{N}_2=3\sin\theta(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$ $\Big\}$ (som i 10.12) med riktning ut från kroppen

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iint_{D_1}\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)^2\cdot(-2)\sin\theta\,d\varphi\,d\theta+\iint\frac{\sqrt{3}}{3}(\cdots)^2\cdot 3\sin\theta\,d\varphi\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}-\sqrt{2}\sin\theta\,d\theta+\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sqrt{3}\sin\theta\,d\theta=-4\sqrt{2}\pi+4\sqrt{3}\pi=4\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

alternativt se lösning till 10.23

* om $\mathbf{F}=f(\varphi,\theta)\cdot\hat{\mathbf{x}}$, $|\hat{\mathbf{x}}|=1$ och $\mathbf{N}=g(\varphi,\theta)\cdot\hat{\mathbf{x}}$ så blir $\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}=f(\varphi,\theta)\cdot g(\varphi,\theta)\,\hat{\mathbf{x}}^2=fg$

10.15 $\mathbb{F} = \frac{(x,y,0)}{x^2+y^2}$ Om ledaren är placerad längs z-axeln, med cylindriska koordinater erhålls $\frac{1}{R}(\cos\theta,\sin\theta,0)$, alltså uppfylls kraven på $\mathbb{F}$.

Med $\mathbf{r} = (R\cos\theta, R\sin\theta, t)$ $0 \le \theta \le 2\pi$ $0 \le t \le l$ (de cylindriska koordinaterna):

$$\iint_Y \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = \iint_D \frac{1}{R}(\cos\theta,\sin\theta,0)\cdot(\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_t) = \iint_D \frac{1}{R}(\cos\theta,\sin\theta,0)\cdot R(\cos\theta,\sin\theta,0)\,d\theta\,dt =$$

$$\int_0^l dt \int_0^{2\pi}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\,d\theta = 2\pi l$$

Divergens, Gauss

10.16 a) $\operatorname{div}\mathbf{u} = (\nabla\cdot\mathbf{u}) = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = 2x+3$ ($\nabla\cdot\mathbf{u}$ är en senare beteckning)

b) $\operatorname{div}\mathbf{u} = (\nabla\cdot\mathbf{u}) = 1+1+1 = 3$

c) $\operatorname{div}\mathbf{u} = (\nabla\cdot\mathbf{u}) = \frac{1}{r^6}\Big(r^3 - x\cdot\underbrace{2x\cdot\frac{3}{2}r}_{=((\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3)'_x} + r^3 - 2y^2\cdot\frac{3}{2}r + r^3 - 2z^2\cdot\frac{3}{2}r\Big) = \frac{1}{r^6}\big(3r^3 - 3r\,\overbrace{(x^2+y^2+z^2)}^{=r^2}\big) = 0$

10.17 källfritt, dvs $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ för alla $\mathbf{r}$.

$0 = \operatorname{div}\mathbf{u} = (\nabla\cdot\mathbf{u}) = 1+1+a$ dvs $a = -2$

10.18 källfritt, dvs $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ för alla $\mathbf{r}$.

$\mathbf{u} = f(x)(2x, 2y, 2z)$

$0 = \operatorname{div}\mathbf{u} = 2f(x) + 2xf'(x) + 2f(x) + 2f(x) = 6f(x) + 2xf'(x) \Leftrightarrow$

$f'(x) + \frac{3}{x}f(x) = 0$

Integrerande faktor $e^{3\ln x} = x^3 \Rightarrow$

$x^3 f'(x) + 3x^2 f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$x^3 f(x) = C$ C godtycklig konstant

dvs $f(x) = \frac{C}{x^3}$

10.19 $\iint_{\partial K}\mathbf{u}\cdot\mathbb{N}\,dS \overset{\text{Gauss}}{=} \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{u}\,dx\,dy\,dz = \iiint_K (4y - 4y + 3z^2)\,dx\,dy\,dz = \left\{\begin{array}{l}\text{rymdpolära}\\ \text{koordinater}\end{array}\right\} =$

$$\iiint_D 3r^2\cos^2\theta\cdot\underbrace{r^2\sin\theta}_{J}\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 3r^4\cos^2\theta\sin\theta\,dr = \frac{6\pi}{5}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{6\pi}{5}\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{5}$$

10.20 $\iint_{\partial K}\mathbf{u}\cdot\mathbb{N}\,dS \overset{\text{Gauss}}{=} \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{u}\,dx\,dy\,dz = \iiint_K (4z - 2y + y)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 (4z-y)\,dz = \int_0^1 (2-y)\,dy = \left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$

, alternativt se lösning till 10.9b

10.21 Strömlinjesbilder: a) och b) oberoende av z och därmed identiska till de för 10.4 och 10.5

c) som i a) fast med en extrakomponent i z-led (se svar i boken)

10.21 $\iint_{\partial K} \mathbb{v}\cdot\mathbb{N}\,dS \overset{\text{Gauss}}{=} \iiint_K \operatorname{div}\mathbb{v}\,dxdydz =$

a) $= \iiint_K (0+0+0)\,dxdydz = 0$, rimligt ty fältet tangerar ylan

b) $= \iiint_K (1+1+0)\,dxdydz = 2\cdot\iiint_K dxdydz = 2\cdot\text{vol}(K) = 2\pi$ rimligt ty fältet är riktat från z-axeln

c) $= \iiint_K (0+0+1)\,dxdydz = \iiint_K dxdydz = \text{vol}(K) = \pi$ rimligt ty fältet är riktat från xy-planet

utförligare motivering, se svar i boken

10.22 Det som eftersöks är $\rho_0\cdot\iint_{\partial K}\mathbb{v}\cdot\mathbb{N}\,dS \overset{\text{Gauss}}{=} \rho_0\iiint_K \operatorname{div}\mathbb{v}\,dxdyds = \rho_0\iiint_K (2x+2x+1)\,dxdydz =$

$= \left\{\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = t\end{matrix}\right\} = \rho_0\underbrace{\int_0^1 dz}_{=1\ \text{obs}}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 (4r\cos\theta+1)\underbrace{r}_{=J}dr = 2\rho_0\int_0^{2\pi}\left(\frac{4\cos\theta}{3}+\frac{1}{2}\right)d\theta = 2\rho_0\pi$

10.23 $\iint_{\partial K}\mathbb{u}\cdot\mathbb{N}\,dS \overset{\text{Gauss}}{=} \iiint_K \operatorname{div}\mathbb{u}\,dxdydz = \iiint_K \frac{(r^2-2x^2+r^2-2y^2+r^2-2z^2)}{r^4}dxdydz = \iiint_K \frac{1}{r^2}dxdydz =$

$= \left\{\begin{matrix}\text{rymdpolära}\\ \text{koordinater}\end{matrix}\right\} = \iiint_K \frac{1}{r^2}\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}dr\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta = 2\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot 2 = 4\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

alternativt se lösning till 10.14

10.24 *Om kroppen K inte innehåller origo kan vi använda Gauss sats och får

$\iint_{\partial K}\mathbb{E}\cdot\mathbb{N}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\mathbb{E}\,dxdydz = \iiint_K k\left(\frac{r^3-x\cdot 2x\cdot\frac{3}{2}r+r^3-3y^2r+r^3-3z^2r}{r^6}\right)dxdydz =$

$= \iiint_K \frac{k}{r^6}\left(r^3 - r\overbrace{(x^2+y^2+z^2)}^{r^2}\right)dxdydz = \iiint_K 0\,dxdydz = \underline{0}$

Om kroppen K innehåller origo kan vi för varje kropp K bilda K med en sfär Γ med centrum i origo och en kropp K_1 som inte innehåller origo.

$\iint_{\partial K}\mathbb{E}\cdot\mathbb{N}\,dS = \iint_{\partial\Gamma}\mathbb{E}\cdot\mathbb{N}\,dS + \underbrace{\iint_{\partial K_1}\mathbb{E}\cdot\mathbb{N}\,dS}_{=0\ \text{enl. ovan}} = \left\{\begin{matrix}\text{rymdpolära}\\ \text{koordinater}\end{matrix}\right\} = \iint_D \frac{k}{R^2}\hat{\mathbb{r}}\cdot R^2\sin\theta\cdot\hat{\mathbb{r}}\,d\varphi\,d\theta =$

$= k\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta = \underline{4\pi k}$

där $\hat{\mathbb{r}} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

* sluten yta innebär att den är randen till en kropp K

10.25 a) källfri innebär att $\operatorname{div}\mathbb{u} = 0$ för varje $\mathbb{r}$

$\operatorname{div}\mathbb{u} = \nabla\cdot\mathbb{u} = \left(e^{-r} - x\frac{2xe^{-r}}{2r} + e^{-r} - \frac{y^2e^{-r}}{r} + e^{-r} - \frac{z^2e^{-r}}{r}\right) = e^{-r}\left(3 - \frac{x^2+y^2+z^2}{r}\right) \neq 0$ för varje $\mathbb{r}$

b) $\iint_{\partial A}\mathbb{u}\cdot\mathbb{N}\,dS \overset{\text{Gauss}}{=} \iiint_A \operatorname{div}\mathbb{u}\,dxdydz = \iiint_A e^{-r}(3-r)\,dxdydz = \left\{\begin{matrix}\text{rymdpolära}\\ \text{koordinater}\end{matrix}\right\} =$ då vi ändå bara har r i uttrycket

$\iiint_D e^{-r}(3-r)r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta \overset{*}{=} 4\pi\int_{r_1}^{r_2}e^{-r}(3-r)r^2dr = 4\pi\int_{r_1}^{r_2}(3r^2e^{-r} - r^3e^{-r})dr = 4\pi\left[r^3e^{-r}\right]_{r_1}^{r_2}$

r^3e^{-r} har max för $r = 3$ och min (för icke negativa r) då $r = 0$

dvs A blir sfären $x^2+y^2+z^2 = 3^2$ med flödet $\frac{108\pi}{e^3}$

$*\begin{cases}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi \text{ blir som störst för } \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 2\pi \text{ då detta är det största möjliga intervallet för } \varphi\\ \int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\,d\theta \text{ blir som störst för } \theta_1 = 0,\ \theta_2 = \pi \text{ (det största möjliga intervallet för } \theta\text{)}\end{cases}$

10.26 Låt D vara "locket" $D=\{(x,y,z): z=1, x^2+y^2\le 1\}$ Då kan vi använda Gauss:
(notera normalens ombytta tecken)

$$-\iint_Y \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = -\iiint_K \operatorname{div}\mathbb{F}\,dxdydz + \iint_D \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = -\iiint_K 2z\,dxdydz + \iint_D \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = \left\{\begin{matrix} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=t\end{matrix}\right\} =$$

$$= -\iiint_{K'} 2t\,r\,dr\,dt\,d\theta + \iint_{D'} (r\cos\theta, r\sin\theta, 1)\cdot r\underbrace{(0,0,1)}_{\mathbb{N}} = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\,dr \int_{r^2}^1 2t\,dt + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\,dr =$$

$$= -2\pi\int_0^1 r(1-r^4) + \pi = -2\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^6}{6}\right]_0^1 + \pi = \frac{\pi}{3}$$

10.27 Låt D vara "botten" $D=\{(x,y,z): z=0\ x^2+y^2\le 1\}$ Då kan vi använda Gauss

$$\iint_{S\ \text{obs}} \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\mathbb{F}\,dxdydz - \iint_D \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = \iiint_K 2z\,dxdydz - \iint_D \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = \left\{\begin{matrix}\text{polära}\\ \text{koordinater}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 1)\cdot r(0,0,-1)\,dr$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta}{2}\cdot\frac{1}{4} + 2\pi\int_0^1 r\,dr = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$$

10.28 a) källfritt, dvs $\operatorname{div}\mathbb{F}=0$ för varje $\mathbb{r}$

$0 = \operatorname{div}\mathbb{F} = 2ax + y + x + 2y + by = 0 \iff a=-\frac{1}{2},\ b=-3$

b) Låt Y vara den avsedda ytan i uppgiften och D "botten", $D=\{(x,y,z): z=0\ x^2+y^2\le 3\}$

Med Gauss:

$$\iint_Y \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\mathbb{F}\,dxdydz - \iint_D \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = -\iint_D \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = -\iint_D (ax^2+xy, xy+y^2, b)\cdot(0,0,-1)\,dxdy =$$

$$= b\iint_D dxdy = b\,\mu(D) = 3\pi b = -9\pi$$

10.29 a) Låt K vara den "koniska" kroppen mellan Y_1 och Y_2

Eftersom normalen på en kons "mantel" är vinkelrör mot $\mathbb{r}$ (den punkten normalen möts i)
och $\frac{\mathbb{r}}{r^3}$ lika riktad som $\mathbb{r}$ har vi att

$\iint_K \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = \iint_K 0\,dS = 0$; Då har vi

$$\iint_K \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS \overset{\text{Gauss}}{=} \iiint_K \operatorname{div}\left(\frac{\mathbb{r}}{r^3}\right)dxdydz = \iiint_K 0\,dxdydz = 0 \text{ dvs}$$

$$\overset{*}{-}\iint_{Y_1}\mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS + \iint_{Y_2}\mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = \iint_{\partial K}\mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS$$

Obs*

$$\iint_{Y_1}\mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = \iint_{Y_2}\mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS$$

*om båda $\mathbb{N}$ är riktade åt "samma" håll (dvs en av dem in mot K)

V.S.V.

b) $\mathbb{r} = R(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \equiv R\cdot\hat{\mathbb{r}}$, och $\mathbb{N}=\hat{\mathbb{r}}$, $\mathbb{F}=\frac{\mathbb{r}}{r^3}$

$$\iint_Y \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = \iint_Y \frac{1}{R^2}\hat{\mathbb{r}}\cdot\hat{\mathbb{r}}\,dS = \frac{1}{R^2}\iint_Y dS = \frac{1}{R^2}\cdot\mu(Y)$$

$R=1$, $w=\mu(Y)\le 4\pi$, enhetssfärens area

c) Med resultaten från a) och b) sätt

Blandade övningar

10.30 a) $\mathbf{r}=(s,t,s^2)\quad 0\le s\le 1,\ 0\le t\le s\ \}D$

$$A=\iint_D|\mathbf{r}'_s\times\mathbf{r}'_t|\,ds\,dt=\iint_D|(1,0,2s)\times(0,1,0)|\,ds\,dt=\iint_D|(-2s,0,1)|\,ds\,dt=\int_0^1 ds\int_0^s\sqrt{4s^2+1}\,dt=$$

$$=\int_0^1\left(s\sqrt{4s^2+1}\right)ds=\left[\frac{1}{12}\sqrt{4s^2+1}^{\,3}\right]_0^1=\frac{5\sqrt5}{12}-\frac{1}{12}$$

b) $\iint_Y \mathbf{u}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iint_D(s,t,s^2)\cdot\underbrace{(-2s,0,1)}_{\text{normal uppåt}}\,ds\,dt=\iint_D -s^2\,ds\,dt=\int_0^1 -s^2ds\int_0^s dt=\int_0^1 -s^3ds=-\frac14$ (nedåt alltså $\frac{1}{4}$)

10.31 Låt D_1 vara "locket", $D_1=\{(x,y,z): z=5,\ x^2+y^2\le 40\}$ och D_2 "botten", $D_2=\{(x,y,z): z=1,\ x^2+y^2\le 16\}$. Med Gauss har vi då

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz-\iint_{D_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS-\iint_{D_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=$$

$$=\iiint_K 3\,dx\,dy\,dz-\iint_{D_1}(x,y,5)\cdot(0,0,1)\,dx\,dy-\iint_{D_2}(x,y,1)\cdot(0,0,-1)\,dx\,dy=$$

$$=3\iiint_K dx\,dy\,dz-5\iint_D dx\,dy+\iint_D dx\,dy=3\iiint_K dx\,dy\,dz-5\mu(D_1)+\mu(D_2)=\left\{\begin{matrix}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=t\end{matrix}\right\}$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^5 dz\int_0^{\sqrt{z^2+15}}r\,dr-5\cdot40\pi+16\pi=6\pi\int_1^5\frac{z^2+15}{2}\,dz-184\pi$$

$$=6\pi\left[\frac{z^3}{6}+\frac{15z}{2}\right]_1^5-184\pi=6\pi\left(\frac{125}{6}+\frac{75}{2}-\frac16-\frac{15}{2}\right)-184\pi=120\pi$$

10.32 Notera z-axeln odefinierad. $\mathbf{r}=(r\cos\alpha, r\sin\alpha, r)\quad 1\le r\le 2,\ 0\le\alpha\le 2\pi$

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iint_D\left(\frac{\cos\alpha}{r},\frac{\sin\alpha}{r},r\right)\cdot(\mathbf{r}'_r\times\mathbf{r}'_s)\,dr\,d\alpha=\iint_D\left(\frac{\cos\alpha}{r},\frac{\sin\alpha}{r},r\right)\cdot r(-\cos\alpha,-\sin\alpha,1)\,dr\,d\alpha=$$

$$=\iint_D\left(-\frac{r}{r}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+r^2\right)dr\,d\alpha=\int_0^{2\pi}d\alpha\int_1^2(r^2-1)\,dr=2\pi\left[\frac{r^3}{3}-r\right]_1^2=\frac{8\pi}{3}$$

10.33 Låt D_1 vara "sidan" i zy-planet, $D_1=\{(x,y,z): x=0,\ 0\le z\le b,\ |y|\le c\}$ och D_2 vara "botten", $D_2\ \{(x,y,z): z=0,\ 0\le x\le\sqrt{\tfrac{b}{a}},\ |y|\le c\}$ och D_3 och D_4 vara $\{(x,y,z): y=\pm c,\ 0\le z\le b-ax^2,\ 0\le x\le\sqrt{\tfrac{b}{a}}\}$

$\mathbf{F}=(-1,0,1)$. Vi noterar att $\operatorname{div}\mathbf{F}=0$ och att $\mathbf{F}$ vinkelrätt mot xz-planet (och D_3 och D_4)

därmed har vi med Gauss att

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS+\iint_{D_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS+\iint_{D_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz=0 \text{ dvs}$$

$$-\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iint_{D_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS+\iint_{D_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iint_{D_1}q\underbrace{\frac{(-1,0,-1)}{\sqrt2}}_{\text{så längden är 1}}\cdot(-1,0,0)\,dy\,dz+\iint_{D_2}\frac{q}{\sqrt2}(-1,0,-1)\cdot(0,0,-1)\,dx\,dy=$$

$$=\frac{q}{\sqrt2}\iint_{D_1}dy\,dz+\frac{q}{\sqrt2}\iint_{D_2}dx\,dy=\frac{q}{\sqrt2}\cdot2c\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{q}{\sqrt2}\cdot2c\cdot b=\sqrt2\,cq\left(b+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$

10.34 a) sätt $z' = \pm z$ och fortsätt som i 10.24 ($k=1$ och halvera svaret där)

b) sätt $z' = \pm z$ och fortsätt som i 10.24

(Se resultat i 10.24 helt enkelt)

Grad, div, rot

10.35 a) $\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = \frac{\partial(x-3y+z^2)}{\partial x} + \frac{\partial(2x-y^2+z)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2+y^2-2z^2)}{\partial z} =$

$= 1 - 2y - 4z$

b) $\nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) =$

$= (2y-1, 2z-2x, 2+3) = (2y-1, 2z-2x, 5)$

c) ej definierad (∇f funkar om f är en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$)

d) $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \left(\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial x}, \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial y}, \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial z}\right) = (0, -2, -4)$

e) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \times (2y-1, 2z-2x, 5) = (0-2, 0-0, -2-2) = (-2, 0, -4)$

10.36 a) "frys" y^2 och z^2 och behandla dessa som konstanter. Med kedjeregeln.

$r'_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$

b) se a)

c) sätt $f = r^n$ $\quad f'_x = (r^n)'_x = n(r^{n-1}) \cdot r'_x = n \cdot r^{n-1} \cdot x \cdot r^{-1} = nx \cdot r^{n-2}$

$\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = nr^{n-2}(x, y, z) = nr^{n-2}\,\mathbf{r}$

10.37 a) $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0$ $\quad \nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = (0, 0, 2)$

b) $\nabla \cdot \mathbf{v} = 1+1+1 = 3$ $\quad \nabla \times \mathbf{v} = (0-0, 0-0, 0-0) = (0,0,0)$

Bilder som i 10.4 och 10.5 (se svar i boken) med lämplig z-komponent (a) - ingen, b) som för x och y)

10.38 a) $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{(r^3 - 3x^2r + r^3 - 3y^2r + r^3 - 3z^2r)}{r^6} = 0$

$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{1}{r^6}(-z \cdot 3yr + y3zr, -3xzr + 3xzr, -3xyr + 3xyr) = 0$

b) $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{k}{r^4}(0 - (-y) \cdot 2x + 0 - x \cdot 2y) = 0$

$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{k}{r^4}(0-0, 0-0, r^2 - 2x^2 + r^2 - 2y^2) = 0$

10.39 a) ej def (gradient av vektor)

b) $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla\left(r^\alpha + \frac{\alpha x}{2} r^{(\alpha-2)} \cdot 2x + r^\alpha\left(1 + \frac{\alpha y^2}{r^2}\right) + r^\alpha\left(1 + \frac{\alpha z^2}{r^2}\right)\right) =$

$= \nabla\left(r^{\alpha-2}(3r^2 + \alpha(x^2+y^2+z^2))\right) = \nabla(r^\alpha(3+\alpha)) = (3+\alpha) r^{\alpha-2} \alpha(x,y,z) = \alpha(3+\alpha) r^{\alpha-2} \cdot \mathbf{r}$

c) ej def (rotation av skalär)

d) ej def (gradient av vektor)

10.40 a) $\nabla\times(\nabla f)=\nabla\times\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right),\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)=$

$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)=0$ (om $f\in C^2$)

b) $\nabla\cdot(\nabla\times u)=\nabla\cdot\left(\frac{\partial u_3}{\partial y}-\frac{\partial u_2}{\partial z},\frac{\partial u_1}{\partial z}-\frac{\partial u_3}{\partial x},\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)=$

$=\frac{\partial^2 u_3}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial u_1}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u_3}{\partial y\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial z\partial y}=0$ (om $f\in C^2$)

nd, inte begränsad till 3 variabler egentligen

c) $\nabla\cdot(\nabla f)=\nabla\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\Delta f$

10.41
- $\nabla\cdot\nabla(\nabla\times u)$ ej def ty gradient av vektor (div grad rot)
- $\nabla\cdot\nabla\times(\nabla f)=\{\text{enligt } 10.40a)\}=\nabla\cdot 0=0$ (div rot grad)
- $\nabla\times\nabla\cdot(\nabla f)$ ej def ty rotation av skalär (rot div grad)
- $\nabla(\nabla\times(\nabla\cdot u))$ ej def ty rotation av skalär (grad rot div)
- $\nabla(\nabla\cdot(\nabla\times u))=\{\text{enligt } 10.40b)\}=\nabla(0)=0$ (grad div rot)
- $\nabla\times\nabla(\nabla\cdot u)=\{\underset{\text{med } \nabla\cdot u=f}{\text{enligt } 10.40a}\}=0$ (rot grad div)

10.42 1. $\nabla(fg)=\left(\frac{\partial(fg)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial(fg)}{\partial x_n}\right)$

$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}=\left\{\begin{matrix}\text{kedjeregeln}\\\text{i envariabel}\end{matrix}\right\}=f\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}+g\frac{\partial f}{\partial x_i}$, insättning av resultatet i ovan ger

$\nabla(fg)=\left(f\frac{\partial g}{\partial x_1}+g\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,f\frac{\partial g}{\partial x_n}+g\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=\left(f\frac{\partial g}{\partial x_1},\dots,f\frac{\partial g}{\partial x_n}\right)+\left(g\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,g\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=$

$=f\left(\frac{\partial g}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial g}{\partial x_n}\right)+g\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=f\nabla g+g\nabla f$ V.S.V.

2. Se svar i boken

3. $\nabla\cdot(u\times v)=\nabla\cdot(u_2v_3-u_3v_2,u_3v_1-u_1v_3,u_1v_2-u_2v_1)=$

$=u_2\frac{\partial v_3}{\partial x}+v_3\frac{\partial u_2}{\partial x}-u_3\frac{\partial v_2}{\partial x}-v_2\frac{\partial u_3}{\partial x}+u_3\frac{\partial v_1}{\partial y}+v_1\frac{\partial u_3}{\partial y}-u_1\frac{\partial v_3}{\partial y}-v_3\frac{\partial u_1}{\partial y}+$

$+u_1\frac{\partial v_2}{\partial z}+v_2\frac{\partial u_1}{\partial z}-u_2\frac{\partial v_1}{\partial z}-v_1\frac{\partial u_2}{\partial z}$ (*)

$(\nabla\times u)\cdot v=\left(\frac{\partial u_3}{\partial y}-\frac{\partial u_2}{\partial z},\frac{\partial u_1}{\partial z}-\frac{\partial u_3}{\partial x},\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\cdot v=$

$=v_1\frac{\partial u_3}{\partial y}-v_1\frac{\partial u_2}{\partial z}+v_2\frac{\partial u_1}{\partial z}-v_2\frac{\partial u_3}{\partial x}+v_3\frac{\partial u_2}{\partial x}-v_3\frac{\partial u_1}{\partial y}$ (notera att dessa motsvarar de inringade termerna i (*))

$-u\cdot(\nabla\times v)=\{$på precis samma sätt, byt bara ut v mot u och vice versa$\}=$

de inte inringade termerna i (*) dvs

$\nabla\cdot(u\times v)=(\nabla\times u)\cdot v-u\cdot(\nabla\times v)$ V.S.V.

10.42 4. $\nabla\cdot(f\mathbf{u}) = \frac{\partial(fu_1)}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial(fu_n)}{\partial x_n}$

$\frac{\partial(fu_i)}{\partial x_i} = f\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i\frac{\partial f}{\partial x_i}$ insatt i ovan får vi

$\nabla\cdot(f\mathbf{u}) = f\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + f\frac{\partial u_n}{\partial x_n} + u_n\frac{\partial f}{\partial x_n} =$

$= f\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right) + u_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + u_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = f(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mathbf{u}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) =$

$= f(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mathbf{u}\cdot(\nabla f)$ V.S.V. (notera att $f(\nabla\cdot\mathbf{u})$ inte är f av $\nabla\cdot\mathbf{u}$)

10.43 a) sätt $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} = f$ och använd nummer 2. (Observera $\nabla f = \mathbf{a}$ och $\nabla\times\mathbf{r} = \mathbf{0}$)

$\nabla\times(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} = \nabla(f)\times\mathbf{r} + f(\nabla\times\mathbf{r}) = \mathbf{a}\times\mathbf{r} + f(\mathbf{0}) = \mathbf{a}\times\mathbf{r}$ V.S.V.

b) sätt $\mathbf{u} = \nabla g$ och använd nummer 4.

$\nabla\cdot(f\nabla g) = (\nabla f)\cdot\nabla g + f(\nabla\cdot(\nabla g)) \overset{\text{enl 10.40}}{=} \nabla f\cdot\nabla g + f\Delta g$

10.44 sätt $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} = f$ och använd 10.42 4. (Observera att $\nabla f = \mathbf{a}$ och $\nabla\cdot\mathbf{r} = 3$)

$\nabla\cdot(f\mathbf{r}) + Cf \overset{4}{=} \mathbf{a}\cdot\mathbf{r} + 3f + Cf = 4f + Cf = 0 \Leftrightarrow C = -4$

10.45 $\nabla\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\right) = \nabla\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{1}{r^6}\left(r^3 - x\cdot 2x\cdot\frac{3}{2}r,\ 0-3xyr,\ 0-3xzr\right) =$

$= \frac{1}{r^6}\left(r^3 - 3x^2r,\ -3xyr,\ -3xzr\right)$ (*)

$-\nabla\times\left(\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{r}}{r^3}\right) = -\nabla\times\left(\frac{(0,-z,y)}{r^3}\right) = \frac{-1}{r^6}\left((r^3 - 3y^2r) - (-r^3 + 3z^2r),\ 0 + 3xyr,\ 3xzr + 0\right) =$

$= \frac{1}{r^6}\left(3r(y^2+z^2) - 2r^3,\ -3xyr,\ -3xyz\right)$. Här noterar vi att endast första komponenten skiljer sig från (*). Vi ska alltså visa att

$r^3 - 3x^2r = 3r(y^2+z^2) - 2r^3 \Leftrightarrow$

$3r^3 = 3r(y^2+z^2) + 3x^2r \Leftrightarrow$

$3r^3 = 3r(x^2+y^2+z^2)$ vilket är sant ty $x^2+y^2+z^2 = r^2$. ☒

10.46 $\Delta\phi \underset{\text{se 10.40}}{=} \nabla\cdot(\nabla\phi) = \nabla\cdot\mathbf{F} = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) \underset{\text{se 10.40}}{=} 0$

$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla\times\mathbf{F} = \nabla\times(\nabla\phi) \overset{\cdot}{=} 0$

10.47 $\frac{d(F(t,x(t),y(t),z(t)))}{dt} = \{\text{kedjeregeln}\} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla F$ ☒

10.48 $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{c}) = 0$ (1)

$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{c}\cdot\nabla\rho \Leftrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{D\rho}{Dt} - \mathbf{c}\cdot\nabla\rho$, insättning i (1) ger

$\frac{D\rho}{Dt} - \mathbf{c}\cdot\nabla\rho + \nabla\cdot(\rho\mathbf{c}) = 0$ (2), enligt 10.42 4. gäller $\nabla\cdot(\rho\mathbf{c}) = \mathbf{c}\cdot\nabla\rho + \rho(\nabla\cdot\mathbf{c})$

vilket insatt i (2) ger

$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla\cdot\mathbf{c}) = 0$, V.S.V.

10.49 $\mathbf{v} = f(r)\cdot(x,y,0)$

a) virvelfritt, dvs $\text{rot}\,\mathbf{v} = 0$

$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial y}v_3 - \frac{\partial}{\partial z}v_2, \frac{\partial}{\partial z}v_1 - \frac{\partial}{\partial x}v_3, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) =$

$= \left(0 - y\cdot f'_z(r), x f'_z(r) - 0, y f'_x(r) - x f'_y(r)\right) =$

$= \left\{\text{kedjeregeln: } f'_x = \frac{df}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}, \; f'_y = \frac{df}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}, \quad f'_z = 0 \text{ och } \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}, \frac{dr}{dy} = \frac{y}{x}\right\}$

$= \left(0\cdot\frac{y}{r}\frac{df}{dr} - y\cdot 0, x\cdot 0 - 0\cdot\frac{x}{r}\frac{df}{dr}, y\cdot\frac{x}{r}\frac{df}{dr} - x\cdot\frac{y}{r}\frac{df}{dr}\right) = 0$ V.S.V.

b) källfritt, dvs $\text{div}\,\mathbf{v} = 0$

$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}(xf(r)) + \frac{\partial}{\partial y}(yf(r)) + \frac{\partial}{\partial z}(0\cdot f(r)) =$

$= f(r) + x f'_x(r) + f(r) + y f'_y(r) + 0 = \{\text{som ovan}\}$

$= 2f + \frac{df}{dr}\cdot\left(\frac{x^2+y^2}{r}\right) = \underbrace{2f + r\frac{df}{dr} = 0}_{\text{diff ekv}}$

$f' + \frac{2}{r}f = 0 \iff f(r) = \frac{C}{r^2}$ dvs $\mathbf{v} = C\cdot\frac{(x,y,0)}{r^2}$ där C är en godtycklig konstant

10.50 $\mathbf{v} = f(r)(-y,x,0)$

a) källfritt, dvs $\text{div}\,\mathbf{v} = 0$

$\nabla\cdot\mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(v_1) + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right) = -y f'_x(r) + x f'_y + 0 = \{\text{som i } 10.49\} =$

$= -y\frac{x}{r}\frac{df}{dr} + x\frac{y}{r}\frac{df}{dx} = 0$ V.S.V.

b) virvelfritt, dvs $\text{rot}\,\mathbf{v} = 0$

$\nabla\times\mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial y}v_3 - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) =$

$= \left(0 - x f'_z(r), -y f'_z(r) - 0, f(r) + x f'_x(r) - (-f(r) - y f'_y(r))\right) = \{\text{som i } 10.49\} =$

$= \left(0-0, 0-0, 2f(r) + \frac{df}{dr}\left(\frac{x^2+y^2}{r}\right)\right) = 0$ dvs $\underbrace{2f + r\cdot f' = 0}_{\text{diff.ekv.}}$

$f' + \frac{2}{r}f = 0 \iff f(r) = \frac{C}{r^2}$ dvs $\mathbf{v} = C\cdot\frac{(-y,x,0)}{r^2}$ där C är en godtycklig konst.

10.51 $\mathbf{v} = f(r)\cdot \mathbf{r}$

a) virvelfritt, dvs rot $\mathbf{v} = 0$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(z f'_y - y f'_z, x f'_z - z f'_x, y f'_x - x f'_y\right) =$$

$$= \left\{ \text{kedjeregeln } f'_x = \frac{df}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}, f'_y = \frac{df}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}, f'_z = \frac{df}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial z} \text{ och } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \right\} =$$

$$= \left(z\cdot\frac{y}{r}\frac{df}{dr} - y\cdot\frac{z}{r}\frac{df}{dr}, x\frac{z}{r}\frac{df}{dr} - z\cdot\frac{x}{r}\frac{df}{dr}, y\cdot\frac{x}{r}\frac{df}{dr} - x\frac{y}{r}\frac{df}{dr}\right) = 0 \quad \text{V.S.V.}$$

b) källfritt dvs div $\mathbf{v} = 0$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right) = \left((f + x f'_x) + (f + y f'_y) + (f + z f'_z)\right) = \{\text{somovan}\} =$$

$$= 3f + \frac{1}{r}\cdot\frac{df}{dr}(x^2+y^2+z^2) = \underbrace{3f + r\cdot\frac{df}{dr} = 0}_{\text{Diff. ekv}}$$

$$\frac{df}{dr} + \frac{3}{r}f \iff f(r) = \frac{C}{r^3} \quad \text{dvs } \mathbf{v} = C\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \; C \text{ en godtycklig konstant}$$

Stokes' sats

10.52 Låt D vara cirkelskivan med randen γ. Med Stokes får vi

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \text{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_D \left(\text{rot}(2z-3y, 3x-z, y-2x)\right)\cdot \underbrace{\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}}_{\text{enhetsnormal "uppåt" från ytan}} dS =$$

vår orientering

$$= \iint_D \left(\frac{\partial(y-2x)}{\partial y} - \frac{\partial(3x-z)}{\partial z}, \frac{\partial(2z-3y)}{\partial z} - \frac{\partial(y-2x)}{\partial x}, \frac{\partial(3x-z)}{\partial x} - \frac{\partial(2z-3y)}{\partial y}\right)\cdot\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\,dS =$$

$$= \iint_D \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+1+2+2+3+3\right)dS = \iint_D \frac{12}{\sqrt{3}}dS = \frac{12}{\sqrt{3}}\iint_D dS =$$

$$= \frac{12}{\sqrt{3}}\cdot\mu(D) = \frac{12}{\sqrt{3}}\cdot\pi = 4\sqrt{3}\pi$$ med positiv orientering sedd från "ovan" ytan

{större z-koordinat än ytan för givna x och y

10.53 Låt D var cirkelskivan med randen γ. γ:s orientering ger $\mathbf{N}$ positiv x-koordinat, dvs $\mathbf{N} = (1,0,0)$

Med Stokes:

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{rot}\,\mathbf{u})\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_D \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\cdot(1,0,0)\,dS =$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\right)dS = \iint_D (3xy^2z^2 - 3xy^2z^2 + 1)\,dS = \iint_D 1\,dS = \mu(D) = \pi$$

10.54 Låt D vara $\overset{\text{(plana)}}{\text{ytan}}$ med rand γ. γ's orientering ger $\mathbb{N}$ riktad från origo, dvs $\mathbb{N} = \frac{(2,1,2)}{3}$.

$\mathbf{u} = (0,\ 3x + z\cos yz,\ y - 2x + y\cos yz)$. Med Stokes:

$$\int_\gamma \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot\mathbb{N}\,dS = \iint_D \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z},\ \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x},\ \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\cdot\frac{(2,1,2)}{3}\,dS =$$

$$= \iint_D \Big(\big(1 + \cos yz - yz\sin yz\big) - \big(\cos yz - yz\sin yz\big),\ 0 - (-2),\ 3 - 0\Big)\cdot\frac{(2,1,2)}{3}\,dS =$$

$$= \iint_D \frac{1}{3}\Big(2\big(1 + \cos yz - yz\sin yz - \cos yz + yz\sin yz\big) + 1\cdot 2 + 2\cdot 3\Big)dS =$$

$$= \iint_D \frac{1}{3}\big(2 + 2 + 6\big)dS = \frac{10}{3}\iint_D dS = \frac{10}{3}\cdot\mu(D) = \frac{10}{3}\cdot 3 = 10$$

10.55 Låt D vara den plana ytan med rand γ. γ i xy-planet innebär $\mathbb{N} = \pm(0,0,1)$

$\mathbf{u} = (x\cos z,\ y\sin z,\ z)$. Med Stokes

$$\int_\gamma \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot\mathbb{N}\,dS = \iint_D \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z},\ \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x},\ \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\cdot\pm(0,0,1)\,dS =$$

$$= \iint_D \pm\left(0 + 0 + \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)dS = \iint_D \pm(0-0)\,dS = \iint_D \overset{(\operatorname{rot}\mathbf{u}\,\perp\,\mathbb{N})}{0}\,dS = 0$$

10.56 Låt D vara den plana ytan med rand γ. γs orientering innebär att $\mathbb{N}$ har positiv z-koordinat

dvs $\mathbb{N} = \frac{(-2,0,1)}{\sqrt{5}}$. Med Stokes:

$$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \operatorname{rot}\mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = \iint_D \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z},\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x},\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,0,1)\,dS =$$

$$= \iint_D \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2\frac{\partial f_3}{\partial y} + 2\frac{\partial f_2}{\partial z} + 0 - 0 + \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dS = \iint_D \frac{1}{\sqrt{5}}\big(2 + 0 + 1 - 0\big)dS =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{5}}\iint_D dS = \frac{3}{\sqrt{5}}\mu(D) = \left\{\begin{array}{l}\text{Låt } D' \text{ vara projektionen av } D \text{ på } xy\text{-planet dvs} \\ D' = \{(x,y,z),\ z = 0,\ x^2 + y^2 \le 1 + 2x.\ \text{Låt } \alpha \text{ vara vinkeln mellan } xy\text{-planet}\ \overset{\text{och } z = 1+2x}{}\end{array}\right\}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{5}}\,\mu(D')\cdot\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\mu(D')\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 3\mu(D') = 3\cdot 2\pi = 6\pi$$

Not. $x^2 + y^2 \le 1 + 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \le 2$, man kan även parametrisera u.t.i från detta vid $\{\ldots\}$

10.57 Låt γ vara randen till Y dvs $\{(x,y,z) : z = 4,\ x^2 + y^2 = 9\}$, genomlöpt positivt sett "från ovan".

Låt D vara cirkelskivan med rand γ, orienterad med normal "uppåt". Med upprepning av Stokes:

$$\iint_Y \nabla\times\mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = \int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \nabla\times\mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = \iint_D \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z},\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x},\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\cdot(0,0,1)\,dS =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dS = \iint_D (1 - 4)\,dS = -3\iint_D dS = -3\cdot\mu(D) = -3\cdot 9\pi = -27\pi$$

10.58 a) Låt γ vara randen till ytan, $\Gamma=\{(x,y,z): z=0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\}$, genomlöpt positivt sett från ovan. Låt D vara ellipsskivan med rand γ och normal "uppåt". Med upprepad Stokes:

$$\iint_Y \nabla\times\mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = \oint_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \iint_D \nabla\times\mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = \iint_D \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\cdot(0,0,1)\,dS =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dS = \iint_D (2-0)\,dS = 2\iint_D dS = 2\mu(D) = 2\pi ab$$

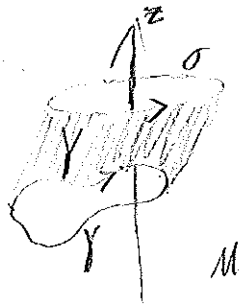
b) precis som i a), fast med omvänd orientering, dvs $\mathbb{N}$ nedåt. svar: $-2\pi ab$

c) blir då summan av övre och nedre halvan, dvs $2\pi ab - 2\pi ab = 0$

d) Med Gauss:

$$\iint_E \nabla\times\mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}(\nabla\times\mathbb{F})\,dxdydz = \iiint_K \nabla\cdot(\nabla\times\mathbb{F})\,dxdydz \overset{\text{enligt 10.40}}{=} \iiint_K 0\cdot dxdydz = 0$$

10.59 För relativt snälla* kurvor γ kan vi ha en annan kurva σ, cirkelformad (radie R) i ett xy-plan ($z=z_0$) så att ytan mellan γ och σ blir "bra" (sammanhängande, skär inte sig själv...). På denna yta Y kan vi använda Stokes' sats:



$$\oint_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} - \oint_\sigma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \pm\iint_Y \operatorname{rot}\mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = 0 \quad (\operatorname{rot}\mathbb{F}=0 \text{ då } x^2+y^2\neq 0\text{, kontrollera gärna})$$

Med andra ord:

$$\oint_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \oint_\sigma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2}(-R\sin\theta, R\cos\theta, z_0)\cdot(-R\sin\theta, R\cos\theta, 0)\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2}R^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\,d\theta = 2\pi$$

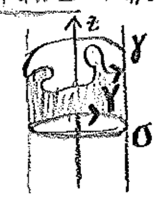
* För elakare kurvor, t.ex. sådana med en knut på kan inte detta användas, men vi försöker inte visa för dessa här.

10.60 Låt oss börja med att beräkna rot $\mathbb{F}$.

$$\operatorname{rot}\mathbb{F} = \nabla\times\mathbb{F} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) = (2y-2y, 0-0, 0-1) = (0,0,-1)$$

Vi kan dela upp alla aktuella kurvor efter två egenskaper, nämligen huruvida de går runt z-axeln och om de genomlöps i positiv eller negativ led.

Fall 1 runt z-axeln, (positivt led): Låt σ vara en cirkelskiva i ett xy-plan med $z_0 < \min_\gamma z$, radie 1, genomlöpt i positivt led.



Då kan vi använda Stokes' sats för ytan Y mellan σ och γ:

$$\oint_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} - \oint_\sigma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \pm\iint_Y \operatorname{rot}\mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = \{\text{ty } \mathbb{N}=(n_1,n_2,0)\} = 0$$

Alltså $\oint_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \oint_\sigma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta, 2\sin\theta\, z_0, \sin^2\theta)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta,0)\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{\sin 2\theta}{2} - \sin^2\theta + z_0\sin 2\theta\right)d\theta$

$= -\pi$ På samma sätt fås i negativt led π

Fall 2 inte runt z-axeln: Stokes' sats ger direkt

$$\oint_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \pm\iint_Y \operatorname{rot}\mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS = \{\text{ty } \mathbb{N}=(n_1,n_2,0)\} = 0.$$

Så: runt z positivt led: $-\pi$
runt z negativt led: π
inte runt z: 0

10.61 konservativt då $\mathbf{u} = \nabla U$ för något U (U en potential)

$\int u_1 dx = xy^2 + \alpha xz + f(y,z)$ f, g och h godtyckliga funktioner

$\int u_2 dy = xy^2 + g(x,z)$ $\left(U = \int u_1 dx,\ U = \int u_2 dy,\ U = \int u_3 dz\right)$

$\int u_3 dz = z^3 - xz + h(x,y)$

dvs $\mathbf{u} = \nabla U$ om $U = z^3 + xy^2 - xz + C$ och $\alpha = -1$, C godtycklig konstant.

$\mathbf{r}(t_0) = (3,0,0)$, $\mathbf{r}(t_1) = (3,0,1)$

$\int_\gamma \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = U(3,0,1) - U(3,0,0) = 1 + 0 - 3 + C - 0 - 0 + 0 - C = -2$

10.62 potentialfält då $\mathbf{u} = \nabla U$ för något U (U en potential)

$\int u_1 dx = x^2y^2z + f(y,z)$ f, g och h godtyckliga funktioner

$\int u_2 dy = x^2y^2z + g(x,z)$ $\left(U = \int u_1 dx,\ U = \int u_2 dy,\ U = \int u_3 dz\right)$

$\int u_3 dz = x^2y^2z - z^2 + h(x,y)$

dvs $\mathbf{u} = \nabla U$ om $U = x^2y^2z - z^2 + C$, (så ja) C godtycklig konstant.

$\int_\gamma \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}(t_1)) - U(\mathbf{r}(t_0)) = U(0,1,1) - U(1,0,0) = -1 + C - C = -1$

10.63 konservativt då $\mathbf{u} = \nabla U$ för något U (U en potential)

$\int u_1 dx = xy^2 + x^2z - xyz^3 + f(y,z)$ f, g och h godtyckliga funktioner

$\int u_2 dy = yz^2 + \frac{axy^2}{2} - xyz^3 + g(x,z)$

$\int u_3 dz = yz^2 + x^2z + \frac{bxyz^3}{3} + h(x,y)$

a för att $\int u_1 dx = \int u_2 dy = \int u_3 dz$ måste $f(y,z) = yz^2 + C$

$g(x,z) = x^2z + C$, $h(x,y) = xy^2 + C$ och $\frac{axy^2}{2} + C$, C godtycklig konstant

Vidare måste alltså $\frac{a}{2}xy^2 = xy^2$, dvs $a = 2$, och

$\frac{bxyz^3}{3} = -xyz^3$, dvs $b = -3$

b $U = xy^2 + x^2z - xyz^3 + yz^2 + C$

c $\int_\gamma \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = U(2,1,0) - U(1,0,1) = 2 + C - 1 - C = 1$

10.64 $g(y)\mathbf{u}$ potentialfält om $g(y)\mathbf{u} = \nabla U$ för något U

$\int g(y)u_1\,dx = g(y)x\sin z + \varphi_1(y,z)$ $\quad$ φ_1, φ_2 och φ_3 godtyckliga funktioner

$\int g(y)u_2\,dy = G(y)x\sin z + \varphi_2(x,z)$ $\quad$ $(U = \int g(y)u_1\,dx,\ U = \int g(y)u_2\,dy,\ U = \int g(y)u_3\,dz)$

$\int g(y)u_3\,dz = g(y)x\sin z + \varphi_3(x,y)$ $\quad$ $G(y)$ primitiv till $g(y)$

Vilket innebär att $g(y) = G(y)$ och $U = g(y)x\sin z + C$, C godtycklig konstant.

$g(y) = G(y)$ innebär $g(y) = De^{y}$, D godtycklig konstant.

10.65 $\mathbb{F}$ konservativt om $\mathbb{F} = \nabla U$ för något U $\quad$ (U potential)

$\int f_1\,dx = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \varphi_1(y,z) = -\frac{1}{r} + \varphi_1(y,z)$ $\quad$ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ godtyckliga funktioner

$\int f_2\,dy = \frac{-1}{r} + \varphi_2(x,z)$ $\quad$ $(U = \int f_1\,dx,\ U = \int f_2\,dy,\ U = \int f_3\,dz)$

$\int f_3\,dz = \frac{-1}{r} + \varphi_3(x,z)$

Alltså $U = \frac{-1}{r} + C$, C godtycklig konstant.

$$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = U(-7,-6,1) - U(7,6,0) = \frac{-1}{\sqrt{7^2+6^2+1^2}} + C - \frac{-1}{\sqrt{7^2+6^2}} - C = \frac{1}{\sqrt{85}} - \frac{1}{\sqrt{86}}$$

10.66 Se lösning i boken

10.67 a) Låt γ vara definierad av $\mathbf{r} = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \le t \le 2\pi$

Då är $\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0)\cdot(-\sin t, \cos t, 0)\,dt = 2\pi \neq 0$

Alltså inte konservativt $(\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi))$ $\quad$ (Notera att vi inte får använda Stokes' p.g.a. z-axeln)

b) Låt γ vara en enkel sluten kurva i området. Då har vi med Stokes' sats (Y yta begränsad av γ)

$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = \pm \iint_Y (\operatorname{rot}\mathbb{F})\cdot\mathbf{N}\,dS = 0$ ty $\operatorname{rot}\mathbb{F} = 0$

Alltså konservativt $(\mathbf{r}(\text{start}) = \mathbf{r}(\text{slut}) \Rightarrow \int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = 0)$ $\quad$ (Vi visar oberoende av väg)

10.68 Eftersom vi inte vet hur kurvan ser ut bör det finnas en potential U ($\nabla U = \mathbb{F}$)

$\mathbb{F}(x,y,z) = (y^2\sin(xy),\ xy\sin(xy) - \cos(xy) + z^2\sin(yz),\ yz\sin(yz) + \sin z - \cos(yz))$

$\int f_1\,dx = -y\cos(xy) + \varphi_1(y,z)$ $\quad$ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ godtyckliga funktioner

$\int f_2\,dy = -y\cos(xy) - z\cos(yz) + \varphi_2(x,z)$ $\quad$ $(U = \int f_1\,dx,\ U = \int f_2\,dy,\ U = \int f_3\,dz)$

$\int f_3\,dz = -z\cos(yz) - \cos z + \varphi_3(x,y)$

dvs $U = -y\cos(xy) - z\cos(yz) - \cos z + C$, C godtycklig konstant.

$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = U(\pi,1,\pi) - U(0,0,0) = 1 + \pi + 1 + C - 0 - 0 - (-1) - C = 3 + \pi$

10.69 

Låt σ definieras av $(\cos\theta, \sin\theta, 2)$ $0 \le \theta \le 2\pi$ och Y vara ytan mellan σ och γ. Vi har med Stokes' sats

$$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_\sigma \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = \pm\iint_Y \operatorname{rot}\mathbb{F}\cdot \mathbb{N}\, dS.$$

$\operatorname{rot}\mathbb{F} = (-2x, 2y, 1)$ och med $\mathbb{N} = \dfrac{(x,y,0)}{x^2+y^2}$ har vi

$$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\sigma \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} + \iint_Y (-2x,2y,1)\cdot\frac{(x,y,0)}{x^2+y^2}\,dS = \{x=\cos\theta,\ y=\sin\theta\} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\cos^9\theta\sin^{10}\theta + 4\sin\theta,\ 5\cos\theta + \cos^{10}\theta\sin^9\theta, -2\right)\cdot(-\sin\theta, \cos\theta, 0)\,d\theta$$

$$+ \int_0^{2\pi}\int_{\cos 2\theta}^{2}\left(-2\cos^2\theta + 2\sin^2\theta\right)dz\,d\theta =$$

← här z varierar av vinkeln i Y

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\underbrace{-\cos^9\theta\sin^{11}\theta}_{\{\text{udda}\}} - 4\sin^2\theta + 5\cos^2\theta + \cos^{11}\theta\sin^9\theta\Big)d\theta + \int_0^{2\pi}\left(\int_{\cos 2\theta}^{2} -2\cos 2\theta\, dz\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(4\cos 2\theta + \sin^2\theta\right)d\theta + \int_0^{2\pi}\left(-4\cos 2\theta + 2\cos^2(2\theta)\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta + \int_0^{2\pi} 2\cos^2(2\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2} + 1 + \cos 4\theta\right)d\theta =$$

$$= 3\pi$$

(Det blir säkert enklare om man bara parametriserar $\gamma = (\cos\theta, \sin\theta, \cos 2\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$ från början)

10.70 $\mathbb{F}$ konservativt om $\mathbb{F} = \nabla U$ för något U (U potential) ($\mathbb{F}$ ärkraftfältet)

(1) $\int f_1\,dx = x\,g(y,z) + \varphi_1(y,z)$ $\qquad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ godtyckliga funktioner

(2) $\int f_2\,dy = xyz + 2G_y(y,z) + \varphi_2(x,z)$, $G_y = \int g\,dy$ $\qquad (U = \int f_1 dx,\ U = \int f_2 dy,\ U = \int f_3 dz)$

(3) $\int f_3\,dz = xyz + xz + 2yz + y^2z + \varphi_3(x,y)$

Av (1) och (3) har vi att $g(y,z) = yz + z + C$, C godtycklig konstant

Det ger $G_y = \dfrac{y^2z}{2} + yz + Cy + D$, D godtycklig konstant

Vilket stämmer in om vi jämför (2) med (1) och (3), så $g(y,z) = yz + z + C$

(Notera att $\varphi_1(y,z) = 2yz + y^2z + 2Cy + D$, $\varphi_2(x,z) = xz + Cx - D$,
$\varphi_3(x,y) = 2Cy + Cx + D$ och $U = xyz + xz + 2yz + y^2z + 2Cy + Cx + D$)

10.71 $\mathbb{F} = C\frac{\mathbb{r}}{r^2}$,

$$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^1 C\frac{(1,y,1)}{2+y^2}(0,1,0)\,dy = C\int_0^1 \frac{y}{2+y^2} = \frac{C}{2}\Big[\ln(2+y^2)\Big]_0^1 = \frac{C}{2}(\ln 3 - \ln 2) = \frac{C}{2}\ln\frac{3}{2}$$

10.72 Vi använder Stokes' sats, med Y ytan som begränsas av γ

$$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \iint_Y \text{rot}\,\mathbb{F}\cdot \mathbb{N}\,dS = \{\text{rot}\,\mathbb{F} = (-2+1, -3-3, 2+2),\ \mathbb{N} = (a,b,c)\} =$$

$$= \iint_Y (-1,-6,4)\cdot(a,b,c)\,dS = (-a-6b+4c)\iint_Y dS = -a-6b+4c$$

Så det uträttade arbetet blir $W = (-a-6b+4c)$.

$\nabla W = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ m.a.p. a,b,c. Vi vill maximera W på enhetssfären, vilket vi gör genom att följa den konstanta gradienten, vi får då $(a,b,c) = \frac{(-1,-6,4)}{\sqrt{1^2+6^2+4^2}} = \frac{(-1,-6,4)}{\sqrt{53}}$