FLERVARIABEL-ANALYS

LP3 2012

Föreläsare: Lennart Falk

Anteckningar av Frida Ulander

18/1 # Flervariabelanalys

(Dugga mitten av lp)

Rep

Partiell derivata

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f'_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

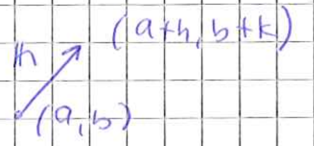
$$= D_x f(a,b) \qquad f'_y(a,b)$$

f är differentierbar i (a,b) om för alla $\mathbb{h}$ nära $\mathbb{0}$. $=(h,k)$

gäller $f(a+h,b+h)-f(a,b)$

$$= f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k + |\mathbb{h}|\rho(\mathbb{h})$$

linjär approx.



där $\lim_{\mathbb{h}\to\mathbb{0}} \rho(\mathbb{h})$

Tangentplan $z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$

I $\mathbb{R}^n$:

$$f(a+\mathbb{h}) - f(a) = f'_{x_1}(a)h_1 + \dots + f'_{x_n}(a)h_n + |\mathbb{h}|\rho(\mathbb{h})$$

$$(f'_{x_1}, \dots f'_{x_n}) = \underline{\text{grad } f} = \nabla f$$

$$\boxed{\nabla f(a)\cdot \mathbb{h} + |\mathbb{h}|\rho(\mathbb{h})}, \text{ där } \lim_{\mathbb{h}\to 0}\rho(\mathbb{h}) = 0$$

Klassen C^k

Alla funktioner som har partiella derivator av ordning upp till och med k, vilka alla är kontinuerliga.

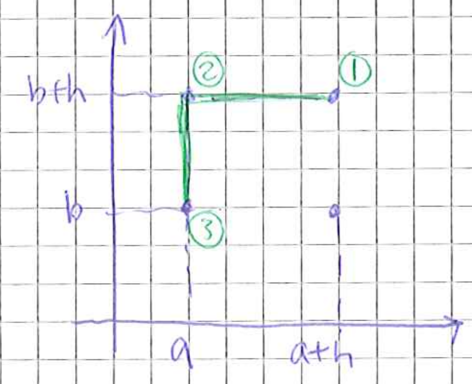
C^1: f och dess part. derivator är kontinuerliga

Sats 3 (s. 56)

Låt D vara en öppen mängd i $\mathbb{R}^n$ och f en funktion som är C^1 på D.

Då är f differentierbar i D.

Bevis i fallet n=2



$f(a+h,b+k) - f(a,b)$

$= f(a+h,b+k)$ ① $- f(a,b+k)$ ② $+$

$f(a,b+k)$ ② $- f(a,b)$ ③

$[g(x) = f(x,b+k) \quad g(a+h) - g(a)]$

$u(b+k) - u(b)$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Medelvärdessatsen} \\ g(a+h)-g(a)=g'(a+\theta_1 h) \quad 0<\theta_1<1\end{array}\right\}$$

$$g'(a+\theta_1 h)h+u'(a;b+\theta_2 k)k=$$

$$=f_x'(a+\theta_1 h, b+k)h+f_y'(a,b+\theta_2 k)k=$$

{Kontinuitet hos f_x', f_y' ger 1:a termen $\to f_x'(a,b)h$
2:a termen $f_y'(a,b)k$}

$$=\Big(f_x'(a,b)+\underbrace{\rho_1(h,k)}_{\to 0\ (h,k)\to 0}\Big)h+\Big(f_y'(a,b)+\underbrace{\rho_2(k)}_{\to 0,\ k\to 0}\Big)k$$

$$=f_x'(a,b)h+f_y'(a,b)k+\underbrace{\rho_1(h,k)h+\rho_2(k)k}$$

$$=\sqrt{h^2+k^2}\left(\underbrace{\rho_1(h,k)}_{\to 0}\underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{belopp}\le 1}+\underbrace{\rho_1(k)}_{\to 0}\underbrace{\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{belopp}\le 1}\right)$$

$\rho(h,k)\to 0$ då $(h,k)\to(0,0)$

(ty $|h|=\sqrt{h^2}\le\sqrt{h^2+k^2}$

Alltså f diff-bar i (a,b), godtyckligt vald punkt i D. $\boxed{\text{V.S.B}}$

OBS! Omvändningen ("f diff-bar i $D \to f\in C'(D)$")
gäller ej!

Kedjeregeln $f\circ g$

$f(g(x))$ $\quad \mathbb{R}\xrightarrow{g}\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ känd!

$f(g(\mathbf{x}))$ $\quad \mathbb{R}^n\xrightarrow{g}\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ (ex övn 2b)

$f(g(x))$ $\quad \mathbb{R}\xrightarrow{g}\mathbb{R}^n\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ (Sats 4 ~~[illegible]~~)

$f(g(\mathbf{x}))$ $\quad \mathbb{R}^n\xrightarrow{g}\mathbb{R}^m\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ (sid 69)

$f(g(\mathbf{x}))$ $\quad \mathbb{R}^n\xrightarrow{g}\mathbb{R}^m\xrightarrow{f}\mathbb{R}^p$ (kap 3.2)

Kedjeregeln för $u = f \circ g$, g från $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
f från $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Vi antar att $g = (g_1(t), \dots g_n(t))$ är deriverbar

$$g'(t) = (g_1'(t), \dots g_n'(t))$$

och att f är diff-bar, med $\nabla f(\mathbf{x}) = (f'_{x_1}(\mathbf{x}) \dots f'_{x_n}(\mathbf{x}))$

Då är u deriverbar med

$$u'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t) = f'_{x_1}(g(t)) \cdot g_1'(t) + \dots + f'_{x_n}(g(t)) \cdot g_n'(t)$$

skalärprodukt

Bevis i fallet $n = 2$

Sätt $g(t) = (x(t), y(t))$ $\quad u(t) = f(x(t), y(t))$

Då är kedjeregeln:

$$u'(t) = f'_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f'_y(x(t), y(t)) \cdot x'(t)$$

$$u(t+\Delta t) - u(t) = f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) - f(x(t), y(t)) =$$

$$\{f \text{ är diff-bar!}\} = f'_x((x(t), y(t)) (\underbrace{x(t+\Delta t) - x(t)}_{h}) +$$

$$f'_y(x(t), y(t)) \cdot (\underbrace{y(t+\Delta t) - y(t)}_{k}) + \sqrt{h^2+k^2}\, \rho(h,k)$$

där $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \rho(h,k) = 0$

$$\frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} = f'_x(x(t), y(t)) \cdot \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} +$$

$$f'_y(x(t), y(t)) \cdot \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} + \frac{\sqrt{h^2+k^2}}{\Delta t} \cdot \rho(h,k)$$

$\xrightarrow[\Delta t \to 0]{} x'(t)$

$\xrightarrow[\Delta t \to 0]{} y'(t)$

$$\left| \frac{\sqrt{h^2+k^2}}{\Delta t} \right| = \sqrt{\left(\frac{h}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{k}{\Delta t}\right)^2} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

$$\left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right)^2$$

- $\rho(h,k) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$ eftersom $h = x(t+\Delta t) - x(t) \to 0$ pga kontinuitet hos $x(t)$

  $\vdots$

  $k \to 0 \dots$

$\Delta t \to 0$ ger alltså $u'(t) = f'_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f'_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$

$$\left(\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \right)$$

V.S.B

Nästa variant, här med $n = m = 2$

$u(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$ x, y partiellt deriverbara, f diffbar

"Fryser" vi en variabel i taget kan vi utnyttja sats 4 och få

$$u'_s(s,t) = f'_x(x(s,t), y(s,t)) \cdot x'_s(s,t) + f'_y(x(s,t), y(s,t)) \cdot y'_s(s,t)$$

eller
$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

EX

$x = s^2 + t^2$ $u = f(s^2 + t^2, s^2 t)$

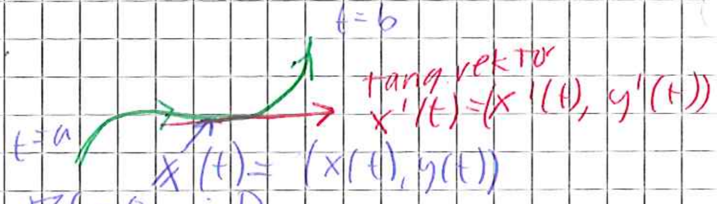
$y = s^2 t$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial f}{\partial s} \cdot 2s + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot 2st \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot 2t + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot s^2 \end{cases}$$

Gradienten grad $f = \nabla f = (f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n})$ för en diff-bar funktion f.

Om $\nabla f = 0$? **Sats 5**

Antag att D är ett bågvis sammanhängande öppet område där varje par av punkter kan sammanbindas med en kontinuerlig kurva. Vi kräver här också att en sådan kurva kan väljas C^1.



Om då f är diff-bar i D och $\nabla f = 0$ i D så är f konstant i D.

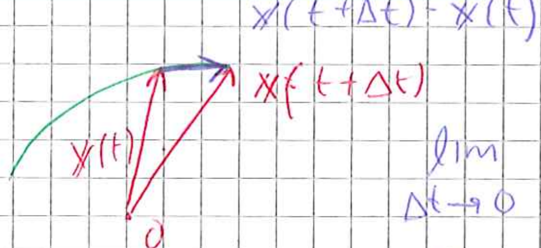
Bevis

Sätt $u(t) = f(x(t), y(t))$ där $(x(t), y(t))$ är en C^1-kurva som förbinder två godt. valda punkter i D.

Kedjeregeln: $u'(t) = \underbrace{\nabla f(x(t), y(t))}_{=0} \cdot \underbrace{(x'(t), y'(t))}_{\text{tang. vektorn}} = 0$

$\Rightarrow$ u är konstant

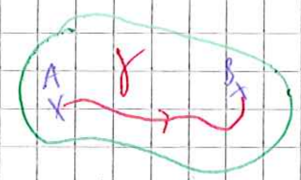
f är kons. på kurvan.



$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{x}(t+\Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} = \mathbf{x}'(t)$$

Tangentvektor

Bågvis sammanh. öppet område D



(A, B godt. i D)

f diff bar i D med $\nabla f = \mathbb{0}$

Visa f konst i D

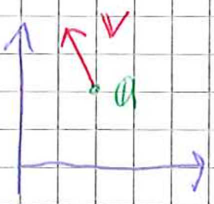
$u(t) = f(\mathbf{x}(t))$

$u'(t) = \underbrace{\nabla f(\mathbf{x}(t))}_{=0} \cdot \mathbf{x}'(t) = 0$

$\Rightarrow$ u = konstant i $[a, b]$ dvs f är konst på γ

och har alltså samma värde i A och B

Riktningsderivata



Låt $\mathbf{a} \in D_f$ och $\boxed{|\mathbf{v}| = 1}$

$$\boxed{f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \lim \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{h}}$$

om gränsvärdet finns.

Kallas riktningsderivatan av f i punkten $\mathbf{a}$ om riktningen $\mathbf{v}$.

$f'_{e_j}(\mathbf{a}) = f'_{x_j}(\mathbf{a})$ Part. Derivator är ex på riktn. derivata

Sats 6 (s. 78) $|\mathbf{v}|=1$

Om f är diff-bar, så är $\boxed{f'_{\mathbf{v}}(a) = \nabla f(a)\cdot \mathbf{v}}$

Bevis Sätt $u(h) = f(a+h\mathbf{v})$

Då blir $u'(h) = \nabla f(a+h\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}$ (enl kedjeregeln)

$$u'(0) = \begin{cases} \nabla f(a)\cdot \mathbf{v} \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h\mathbf{v})-f(a)}{h} = f'_{\mathbf{v}}(a) \end{cases}$$

EX $f(x,y) = x^2 - xy$

Punkten $(2,1)$, riktning $(1,4)$

Vi väljer först en enhetsvektor

$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{17}}(1,4)$ $\nabla f = (2x-y, -x)$

$\nabla f(2,1) = (3,-2)$

$f'_{\mathbf{v}}(2,1) = (3,-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}(1,4) = -\frac{5}{\sqrt{17}}$

Eftersom $f'_{\mathbf{v}}(a) = \nabla f(a)\cdot\mathbf{v}$ med $|\mathbf{v}|=1$

så är $|f'_{\mathbf{v}}(a)| \leq |\nabla f(a)|\cdot\underbrace{|\mathbf{v}|}_{=1} = |\nabla f(a)|$

C.S. olikhet
likhet $\Leftrightarrow$ $\nabla f(a)$ och $\mathbf{v}$ är parallella

Cauchy-Schwartz:
$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$ i $\mathbb{R}^n$

Riktningsderivatan varierar mellan $-|\nabla f(a)|$ och $|\nabla f(a)|$

om $\mathbf{v}$ varieras $f'_{\nabla f} = |\nabla f|$ $f'_{-\nabla f} = -|\nabla f|$

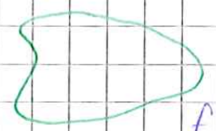
f växer snabbast i riktningen $\nabla f(a)$

f avtar — " — — " — $-\nabla f(a)$

18/1 **Sats 8** f diffbar

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\nabla f(a)$ är ortogonal mot nivåkurvan genom a.

$f(x,y) = f(a,b)$



$f=12$

värme ("kamin") $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\nabla f(a)$ -- || -- mot nivåytan genom a

$f(x,y,z) = f(a,b,c)$

Bevis i $\mathbb{R}^2$ — kan senare visas vara uppfyllt om $\nabla f \neq 0$

Antag att nivåkurvan genom a har en parameterframställning $(x(t), y(t))$ som är deriverbar

Då är $f(x(t), y(t)) = C$ $(= f(a,b))$

Kedjeregeln $\nabla f(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0$

dvs ∇f är ortogonal.

EX 238 $z = \dfrac{32}{1+x^2+y^2}$ en kulles höjd över punkten (x,y) på kartan

På vilken höjd är lutningen störst?

Gradientens belopp anger hur brant ytan lutar.

$$\nabla z = \left(\frac{-64x}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{-64y}{(1+x^2+y^2)} \right) = \frac{-64}{1+} (x,y)$$

$$|\nabla z|^2 = \frac{64^2(x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^4} = \frac{64^2 s}{(1+s)^4} = f(s)$$

$$f'(s) = 64^2 \cdot \frac{1\cancel{(1+s)^4} - 4s\cancel{(1+s)}^3}{\cancel{(1+s)^8}\,5} = \frac{64^2(1-3s)}{(1+s)^5}$$

Nollställe: $s = \frac{1}{3}$ Teckenväxling $+ \ 0 \ -$ $\Rightarrow$ Max.

Max lutning då $s = x^2+y^2 = \frac{1}{3}$ med höjden $\dfrac{32}{1+\frac{1}{3}} = \underline{\underline{24}}$

Brantast på höjden 24 m.

2.23 Kedjeregelövn. med PDE.

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = x^3y + xy^3 \quad x>0,\ y>0$$

Lös denna genom att byta till nya variabler

$$\begin{cases} u = x^2+y^2 \\ v = x^2-y^2 \end{cases}$$

och hitta slutligen den lösning som uppfyller $f(x,x) = x^2$

$$f = f(u(x,y), v(x,y))$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}\cdot 2y - \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2y$$

Vår PDE blir:

$$VL: \ y\left(\cancel{\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2x\right) - x\left(\cancel{\frac{\partial f}{\partial y}\cdot 2y} - \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2y\right) =$$

$$= \boxed{4\cancel{xy}\frac{\partial f}{\partial v} = x^{\cancel{3}2}\cancel{y} + \cancel{x}y^{\cancel{3}2}} = HL$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{x^2+y^2}{4}$$

godt. C^1-funkt.

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{u}{4} \qquad \boxed{f(u,v) = \frac{uv}{4} + g(u)}$$

$$f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{4} + g(x^2+y^2)$$

$$= \frac{x^4-y^4}{4} + g(x^2+y^2)$$

t.ex $f(x,y) = \dfrac{x^4-y^4}{4} + \sin(x^2+y^2)$

eller $f(x,y) = \dfrac{x^4-y^4}{4} + \dfrac{32}{1+x^2+y^2}$

Bestäm lsn. med $f(x,x) = x^2$

$$f(x,x) = \underbrace{\frac{x^4-x^4}{4}}_{0} + g(2x^2) = x^2$$

$$g(u) = \frac{u}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x,y) = \frac{x^4-y^4}{4} + \frac{x^2+y^2}{2}}$$

$f \in C^1 \Rightarrow f$ diffbar

f diffbar $\not\Rightarrow f \in C^1$

Mots. i en variabel

f diffbar = deriverbar

$\not\Rightarrow f'$ kontinuerlig

EX $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ 0 \quad i\ (0,0) \end{cases}$

$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \underbrace{h \sin \frac{1}{h}}_{\text{begr}} \to 0 \quad h \to 0$

$f'(0) = 0$

$x \neq 0 \quad f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ saknar gv

då $x \to 0$

$x \to \sqrt{x^2+y^2} = r$

$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \quad i\ \text{origo} \end{cases}$

diffbar, ej C^1

19/1 # Högre derivator

EX $f''_{xy}(a,b) = (f'_x)'_{y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f'_x(a,b+h) - f'_x(a,b)}{h}$

OBS! Med ∂-beteckningar blir det

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{xy}$$

Observera ordningen på x och y

EX $f(x,y) = x^2y + \sin xy^3$

$f'_x = 2xy + (\cos xy^3)\cdot y^3 \quad f'_y = x^2 + (\cos xy^3)\cdot 3xy^2$

$f'_{xx} = 2y + \ldots$

$f'_{xy} = 2x + (-(\sin xy^3)\cdot 3xy^2 \cdot y^3) + (\cos xy^3)\cdot 3y^2$

$= 2x - 3xy^5 \cdot \sin xy^3 + 3y^2 \cdot \cos xy^3$

$f'_{yx} = 2x - (\sin xy^3)\cdot y^3 \cdot 3xy^2 + \cos xy^3 \cdot 3y^2$

$= 2x - 3xy^5 \sin xy^3 + 3y^2 \cos xy^3$

lika

EX $\begin{cases} f(x,y) = xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{om } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

$f'_x(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} y \cdot \frac{h^2-y^2}{h^2+y^2} = -y$ (alla y)

$f'_y(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h) - f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} x \cdot \frac{x^2-h^2}{x^2+h^2} = x$ (alla x)

På y-axeln: $f''_{xy}(0,y) = -1$ På x-axeln: $f''_{yx} = 1$

- $f''_{xy}(0,0) = -1 \neq 1 = f''_{yx}(0,0)$

Sats 9 s.87 Clairant

$f \in C^2 \Rightarrow f''_{xy} = f''_{yx}$

Allmännare gäller t.ex $f \in C^3 \Rightarrow f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx}$

$\Rightarrow f'''_{yyx} = f'''_{yxy} = f'''_{xyy}$ ej lika

(n variabler etc)

Lokala extrempunkter ~~B_δ~~

Sätt $B_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \delta\}$ (en omgivning till a)

a kallas lokalt (strängt) maximum (mini) till $f(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ om ~~$\forall x \in B_\delta$~~

$x \in B_\delta(a) \cap D_f$: $f(x) \leq f(a)$ ($\geq$, $<$) för något δ.

Sats 11 s.99

Om f har partiella derivator och om a är en inre punkt av D_f och om f har lokalt max eller min i a så är alla de partiella derivatorna i denna punkt 0.

Detta skrivs för diff-bara funktioner: $\boxed{\nabla f(a) = 0}$

En punkt med $\nabla f(a) = 0$ kallas för stationär punkt (critical point)

EX $f(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad \nabla f(x,y) = (2x, -2y)$

Origo är den enda stat. punkten

På x-axeln $f(x,0) = x^2$ som har ett lok. min då $x=0$

y-axeln $f(0,y) = -y^2$ -ll- lok. max då $y=0$

Origo sägs vara en sadelpunkt

Def

Om a är en stat. pkt som inte är lok. max eller lok. min så säges a vara en sadelpunkt

$\Rightarrow$ Varje omgivning ~~där där~~ $B(a)$ innehåller punkter där $f(x) < f(a)$ och där $f(x) > f(a)$.

Taylors formel

Rep 1 variabel: Om $f \in C^{n+1}$ i en omgivning till 0 så är i denna omgivning $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} \dots \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$

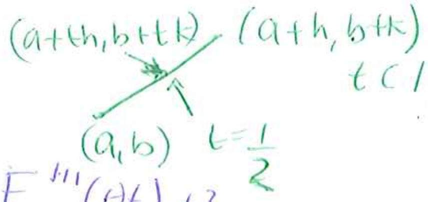
För 2 variabler ska vi härleda Taylors formel av ordning 2.

Vi antar att $f \in C^3$ i en omgivning av (a,b)

Vi kan utnyttja envariabelformeln om vi sätter:

$F(t) = f(a+th,\, b+tk) \quad 0 \le t \le 1$

↖ blir då C^3



Då är $F(t) = F(0) + F'(0)t + \dfrac{F''(0)t^2}{2} + \dfrac{F'''(\theta t)}{3!}t^3$

Genom att uttrycka detta i f, f'_x osv

och därefter sätta $t=1$ erhåller vi vår formel.

$$F'(t) = \frac{d}{dt} f(a+th,\, b+tk) = f'_x(a+th,\, b+tk)\cdot h + f'_y(a+th,\, b+tk)\cdot k$$

↑ kedjeregeln

$$F''(t) = \frac{d}{dt}\left(f'_x \cdots\right) = f''_{xx}(a+th,\, b+tk)\cdot h^2 + f''_{xy}(a+th,\, b+tk)\cdot hk +$$
$$f''_{yx}(a+th,\, b+tk)\cdot hk + f''_{yy}(a+th,\, b+tk)\cdot k^2$$

$$F'''(t) = f'''_{xxx} \ldots h^3 + f'''_{xxy} \ldots h^2k \ldots + f'''_{xyx} \ldots h^2k \ldots$$

$t=1$ ger

$$\boxed{\begin{aligned} f(a+h,\, b+k) &= f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k + \\ &+ \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2\right) + \\ &+ (h^2+k^2)^{3/2} B(h,k), \end{aligned}}$$

där $B(h,k)$ är begränsad i en omgivning till $h=k=0$

$$(h^2+k^2)^{3/2} \cdot \left(f'''_{xxx}(a+\theta h,\, b+\theta k) \cdot \frac{h^3}{(h^2+k^2)^{3/2}} \cdots \right)$$

begr. pga kontinuitet

belopp < 1

3 variabler $f(a+h,\, b+k,\, c+l) = f(a,b,c) + f'_x(a,b,c)h + f'_y(a,b,c)k$

$+ f'_z(a,b,c)l + \frac{1}{2}\big(f''_{xx}(a,b,c)h^2 + f''_{yy}(a,b,c)k^2 + f''_{zz}(a,b,c)l^2 +$

$2f''_{xy}(a,b,c)hk + 2f''_{xz}(a,b,c)hl + 2f''_{yz}(a,b,c)kl +$

$(h^2+k^2+l^2)^{3/2} \cdot B(h,k,l)$

begr. i omgiv. av $(0,0,0)$

Allmänt (n variabler, ordning m)

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(\mathbf{h}\cdot\nabla)^k f(\mathbf{a}) + |\mathbf{h}|^{m+1} B(\mathbf{h})$$

$\mathbf{h}\cdot\nabla = \left(h_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + h_n \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$ en diff-operator

$(\mathbf{h}\cdot\nabla) f = h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \ldots h_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$

$$(\mathbb{h}\cdot\nabla)^2 = \left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} \dots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right) =$$

$$h_1^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + h_1h_2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} \dots h_n^2\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

23/1 ~~Idag~~ Rep: f diffbar och har max/min i $\mathbb{a}$

$\Rightarrow \nabla f(\mathbb{a}) = 0$ (stationär punkt)

Taylors formel

kvadratisk form

$$f(\mathbb{a}+\mathbb{h}) - f(\mathbb{a}) = \nabla f(\mathbb{a})\cdot\mathbb{h} + Q(\mathbb{h}) + |\mathbb{h}|^3\rho(\mathbb{h})$$

$n=2$, $\mathbb{a}=(a,b)$ $\quad\mathbb{h}=(h,k)$

$\nabla f(\mathbb{a})\cdot\mathbb{h} = f'_x(\mathbb{a})h + f'_y(\mathbb{a})k$

$Q(\mathbb{h}) = \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(\mathbb{a})h^2 + 2f''_{xy}(\mathbb{a})hk + f''_{yy}(\mathbb{a})k^2\right)$

- Om $\mathbb{a}$ är stationär pkt:

$f(\mathbb{a}+\mathbb{h}) - f(\mathbb{a}) = Q(\mathbb{h}) + |\mathbb{h}|^3\rho(\mathbb{h})$

dominerar normalt över resttermen nära $\mathbb{h}=0$ ($\mathbb{x}=\mathbb{a}$) Intressant!

EX $f(x,y) = x^3y^2 + 27xy + 27y$

2.67. Bestäm de stationära punkterna o deras karaktär

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x = 3x^2y^2 + 27y = 0 \\ f'_y = 2x^3y + 27x + 27 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ① \; 3y(x^2y+9) = 0 \\ ② \; 2x^3y + 27x + 27 = 0\end{cases}$$

$2x\cdot x^2y$

① ger 2 fall: (i) $y=0 \stackrel{②}{\Rightarrow} x=-1$

(ii) $x^2y+9=0 \stackrel{②}{\Rightarrow} -18x+27x+27=0 \Rightarrow x=-3$, $y=-1$

Enda stationära punkter $(-1,0)$ och $(-3,-1)$

Karaktär?

	$(-1,0)$	$(-3,-1)$
$f''_{xx} = 6xy^2$	0	−18
$f''_{xy} = 6xy^2+27$	27	−27
$f''_{yy} = 2x^3$	−2	−54

För punkten $(-1,0)$ är

$Q(h,k) = \frac{1}{2}(0h^2 + 2\cdot 27hk - 2k^2)$

$= 27hk - k^2 = k(27h-k)$

$= \begin{cases} -k^2 \text{ om } h=0 & (Q(0,k)) \\ 26h^2 \text{ om } h=k & (Q(h,h))\end{cases}$

Q indefinit $\Rightarrow$ $(-1,0)$ sadelpkt

$(-3,-1)$: $Q(h,k) = \frac{1}{2}(-18h^2 - 2\cdot 27hk - 54k^2)$

$= -9h^2 - 27hk - 27k^2 = -9(h^2 + 3hk + 3k^2)$

$= -9\left(\left(h+\frac{3k}{2}\right)^2 - \frac{9k^2}{4} + 3k^2\right) = -9\left(\left(h+\frac{3k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2}{4}\right) \le 0$ m. likhet $\Leftrightarrow h=k=0$

$Q<0 \;\; \forall (h,k) \neq (0,0)$

$\boxed{\text{Neg Def} \Rightarrow \text{lok max}}$

Vi behöver veta om $f(\mathbb{a}+\mathbb{h})-f(\mathbb{a})$ $\begin{cases} >0 \text{ i en omg. av } x=\mathbb{a}, (\mathbb{h}=0) \text{ (lok. min)} \\ <0 \text{ — || — (lok max)} \\ \text{har pos och neg värden i varje omg. av punkten (sadelpkt)} \end{cases}$

Avgörs vanligen av $Q(\mathbb{h})$!

Påstående: $\boxed{Q(t\mathbb{h}) = t^2 Q(\mathbb{h})}$ *

Nämligen (2 var.) $= 2Q(th, tk) =$

$f''_{xx}(\mathbb{a})(th)^2 + 2f''_{xy}(\mathbb{a})\, th\, tk + f''_{yy}(\mathbb{a})(tk)^2$

$= t^2(\ldots)$ (Analogt för andra n)

Varje vektor $\mathbb{h}$ kan skrivas $\mathbb{h} = |\mathbb{h}| \cdot \hat{\mathbb{h}}$ där $|\hat{\mathbb{h}}| = 1$, $\hat{\mathbb{h}} = \frac{1}{|\mathbb{h}|}\mathbb{h}$

* ger då $Q(\mathbb{h}) = Q(\underbrace{|\mathbb{h}|}_{=t}\hat{\mathbb{h}}) = |\mathbb{h}|^2 \cdot Q(\hat{\mathbb{h}})$

Sats 4, s. 41

På en kompakt mängd (sluten och begr.) antar en kontinuerlig funktion både största och minsta värde

Sluten mängd: Innehåller sina randpunkter

$Q(\mathbb{h})$ är kontinuerlig.

$\{\mathbb{h} : |\mathbb{h}| = 1\}$ är kompakt

Då finns alltså $m = \min_{|\mathbb{h}|=1} Q(\mathbb{h})$ $M = \max_{|\mathbb{h}|=1} Q(\mathbb{h})$

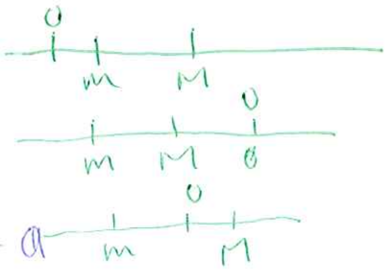
och vi har $f(\mathbb{a}+\mathbb{h}) - f(\mathbb{a}) = \begin{Bmatrix}\text{Vid stat. punkt} \\ \mathbb{a}\end{Bmatrix} = \underbrace{Q(\mathbb{h})}_{|\mathbb{h}|^2 Q(\hat{\mathbb{h}})} + |\mathbb{h}|^3 \rho(\mathbb{h})$

$\Rightarrow |\mathbb{h}|^2(m + |\mathbb{h}|\rho(\mathbb{h})) \le f(\mathbb{a}+\mathbb{h}) - f(\mathbb{a}) \le |\mathbb{h}|^2(M + |\mathbb{h}|\rho(\mathbb{h}))$ $|\hat{\mathbb{h}}| = 1$

Likhet förekommer i båda olikheterna för lämpliga $\mathbb{h}$.

Om $m \neq 0$ så har VL samma tecken som m för alla $\mathbb{h} \neq 0$ med tillräckligt litet belopp. $\rho \to 0$

Vi finner följande möjligheter



1) $m > 0$ Då är $\boxed{Q(\mathbb{h}) > 0 \text{ för alla } \mathbb{h} \neq 0}$ och sägs vara positivt definit
$f(\mathbb{a}+\mathbb{h}) - f(\mathbb{a}) > 0$ i en omg. till $x = \mathbb{a}$ $(\mathbb{h}=0)$, dvs $\mathbb{a}$ är lok. minpunkt

2) $M<0$ $\boxed{Q(\mathbb{h})<0 \text{ för alla } h\neq 0}$ Negativt definit
$f(\mathbb{a}+\mathbb{h})-f(\mathbb{a})<0$ i en omg. till $\mathbb{a}$. Lok max-pkt

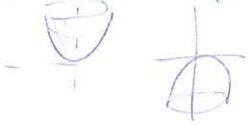
3) $m<0<M$ $Q(\mathbb{h})$ har både pos. och neg. värden
Indefinit $\Rightarrow$ $f(\mathbb{a}+\mathbb{h})-f(\mathbb{a})$ har både pos. och neg. värden i varje omg. till $\mathbb{a}$. Sadelpunkt

4) $m=0, M>0$ $Q(\mathbb{h})\geq 0 \ \forall \mathbb{h}\neq 0$, $Q(\mathbb{h})=0$ längs en linje genom origo $\mathbb{h}\neq 0$
Positivt semidefinit Ingen slutsats kan dras om $\mathbb{a}$.
$f(\mathbb{a}+\mathbb{h})-f(\mathbb{a})=|\mathbb{h}|^2(\underbrace{Q(\mathbb{h})}_{=0 \text{ längs en linje}}+|\mathbb{h}|\rho(\mathbb{h}))$
denna term avgör tecknet längs linjen!

5) $m<0$ $M=0$, $Q(\mathbb{h})\leq 0 \ \forall \mathbb{h}\neq 0$
Neg. semidef. Ingen slutsats

6) $m=M=0$. $Q(\mathbb{h})\equiv 0$. -||-

m - minsta egenvärdet
M - största egenvärdet

EX på kvadratiska former och deras typ

1) h^2+k^2 pos. def.
2) $-h^2-k^2$ neg. def

3) h^2-k^2 indefinit
hk indef. $(hk=\frac{1}{4}((h+k)^2-(h-k)^2))$
4) h^2 semidefinit (=0 längs $h=0$, >0 annars)
$(h-3k)^2$ -||- (=0 längs $h=3k$, >0 annars)
$(h+k)^2$ -||- (=0 längs $h=-k$, >0 annars)

3 variabler

$Q(h,k,l) = h^2 + 2k^2 + 6l^2 + 2hk - 4hl - 6kl =$

$= \left((h+k-2l)^2 - k^2 - (2l)^2 + 4kl\right) + 2k^2 + 6l^2 - 6kl =$

$= (h+k-2l)^2 + k^2 + 2l^2 - 2kl = (h+k-2l)^2 + (k-l)^2 - l^2 + 2l^2$

$= \underline{(h+k-2l)^2 + (k-l)^2 + l^2} \geq 0$ (likhet omm $h=k=l=0$)

Pos. Def

EX $f(x,y) = (x^2-1)^2 + (x^2-e^{-y})^2$

Stat. pkter?

$\begin{cases} f'_x = 4x(x^2-1) + 4x(x^2-e^{-y}) = 4x(2x^2-1-e^{-y}) \\ f'_y = 2e^{-y}(x^2-e^{-y}) = 0 \Rightarrow x^2 - e^{-y} = 0 \overset{①}{\Rightarrow} 4x(x^2-1) = 0 \end{cases}$

$x=0$ ger $f'_y \neq 0$

$x=\pm 1$, $1-e^{-y}=0 \Rightarrow$

$y=0$

Stat. pkter: $(1,0)$, $(-1,0)$

$f(1,0) = f(-1,0) = 0$

lok. min ty $f \geq 0$ alltid.

25/1 Funktionalmatriser

$\mathbb{f}$ från $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $n>1, m>1$: $\mathbb{f}$ kallas ett fält

$$\mathbb{f}(\mathbb{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbb{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbb{x}) \end{bmatrix}$$

Def

Funktionalmatrisen för $\mathbb{f}$ i a ($\in D_f$) är

$$\mathbb{f}'(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=a}$$ $m \times n$-matris

Kallas även totala derivatan, eller Jacobimatrisen

$$\mathbb{f}'(a) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(a) \\ \vdots \\ \nabla f_n(a) \end{bmatrix}$$ radvektorer

Skrivs ibland $\dfrac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$

Def

Om $m=n$ är funktionaldeterminanten av $\mathbb{f}$ i a

$= \det \mathbb{f}'(a)$ = Jacobideterminanten "Jacobianen"

Skrivs ofta $\dfrac{d(f_1, \dots f_m)}{d(x_1, \dots x_m)}$ eller $J(a)$

EX

$m=n=1$ vanlig derivata

$m=1$ $m>1$ Kurva $\begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{bmatrix}$ $\mathbb{f}' = \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_m'(t) \end{bmatrix}$ tangentvektor

$n>1$ $m=1$ funktioner $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathbb{f}' = \nabla f$

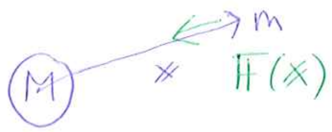
$m=2$ $n=2$ Polära koordinater $\left.\begin{cases} x = r\cos\theta = f_1(r,\theta) \\ y = r\sin\theta = f_2(r,\theta) \end{cases}\right\} \mathbb{f}(r,\theta)$

$$\mathbb{f}'(r,\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$J = \det \mathbb{F}'(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

EX

$n=m=3$ Gravitationfält



$$\mathbb{F} = \frac{-k}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

$$F(\mathbf{x}) = -CMm\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \qquad C = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ [SI]$$

$$= -\frac{CMm}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{CMmx}{|\mathbf{x}|^3}\right) = -CMm\cdot\left(\frac{1\cdot|\mathbf{x}|^3 - x\cdot 3|\mathbf{x}|^2\frac{\partial|\mathbf{x}|}{\partial x}}{|\mathbf{x}|^6}\right)$$

$$= \left\{\frac{\partial|\mathbf{x}|}{\partial x} = \frac{x}{|\mathbf{x}|}\right\} = -CMm\left(\frac{|\mathbf{x}|^3 - 3x^2}{|\mathbf{x}|^6}\right) = -\frac{CMm}{|\mathbf{x}|^6}\left(|\mathbf{x}|^2 - 3x^2\right)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Bigg(\underbrace{-\frac{CMmx}{|\mathbf{x}|^3}}_{x\cdot|\mathbf{x}|^{-3}}\Bigg) = -CMm\left(-3x|\mathbf{x}|^{-4}\frac{\partial|\mathbf{x}|}{\partial y}\right) =$$

$$+CMm\left(+\frac{3xy}{|\mathbf{x}|^5}\right)$$

$$\mathbb{f}'(\mathbf{a}) = \frac{CMm}{|\mathbf{x}|^5}\begin{bmatrix} 3x^2-|\mathbf{x}|^2 & 3xy & 3xz \\ 3xy & 3y^2-|\mathbf{x}|^2 & 3yz \\ 3xz & 3yz & 3z^2-|\mathbf{x}|^3 \end{bmatrix}$$

$f_1, \ldots, f_m$ är $C_1 \Rightarrow$ de är diff-bara

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f_1(\mathbf{a}) + \nabla f_1(\mathbf{a})\cdot\mathbf{h} + \mathbf{h}\,\rho_1(\mathbf{h}) & \text{där } \rho_1(\mathbf{h})\to 0 \text{ då } \mathbf{h}\to 0 \\ \vdots & \\ f_m(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f_m(\mathbf{a}) + \nabla f_m(\mathbf{a})\cdot\mathbf{h} + \mathbf{h}\,\rho_m(\mathbf{h}) & \rho_m(\mathbf{h})\to 0 \ldots \end{cases}$$

Kan sammanfattas

$$\boxed{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \mathbb{f}(\mathbf{a}) + \underbrace{\mathbb{f}(\mathbf{a})\cdot\mathbf{h}}_{\text{matrisprod.}} + |\mathbf{h}|\cdot\rho(\mathbf{h}) \quad \text{där } \rho(\mathbf{h})\to\mathbf{0},\ \mathbf{h}\to\mathbf{0}}$$

$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix} \quad \mathbb{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \quad \mathbb{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$

$\mathbb{h} \mapsto \mathbb{f}'(\mathbb{a})\mathbb{h}$ är en linj. avbildning som lokalt kring $\mathbb{x} = \mathbb{a}$ approximerar $\mathbb{f}(\mathbb{x}) = \mathbb{f}(\mathbb{a}+\mathbb{h})$

Den kallas differentialen av $\mathbb{f}$ i $\mathbb{a}$ eller (i PB) linjariseringen av $\mathbb{f}$ i $\mathbb{a}$.

Annars kallas ofta $\mathbb{h} \mapsto \mathbb{f}(\mathbb{a}) + \mathbb{f}'(\mathbb{a})\mathbb{h}$ för linjariseringen.

EX $\mathbb{f}(\mathbb{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy+y \\ x^3-y^2 \end{bmatrix}$

Bestäm linjariseringen kring punkten $(2,1)$

$\mathbb{h} = (h,k) = (x-2, y-1)$

$\mathbb{f}'(\mathbb{x}) = \begin{bmatrix} y & x+1 \\ 3x^2 & -2y \end{bmatrix} \quad \mathbb{f}'(2,1) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 12 & -2 \end{bmatrix}$

$\mathbb{f}(2+h, 1+k) \approx \mathbb{f}(2,1) + \mathbb{f}'(2,1)\mathbb{h} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 12 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$

Tillämpning inom numeriken: Newtons ~~[illegible]~~ metod

Vi vill lösa $\mathbb{f}(\mathbb{x}) = \mathbb{0}$

Approx. $\mathbb{f}(\mathbb{a}) + \mathbb{f}'(\mathbb{a})\underbrace{(\mathbb{x}-\mathbb{a})}_{\mathbb{h}} = \mathbb{0}$

"Gissning" (startvärde) $= \mathbb{a}_0$

Lös $\mathbb{f}'(\mathbb{a}_0)\mathbb{h} = -\mathbb{f}(\mathbb{a}_0)$ (i $\mathbb{h}$)

Sätt $\mathbb{a}_1 = \mathbb{a}_0 + \mathbb{h}$

Iteration

$\begin{cases} \mathbb{a}_0 \\ \mathbb{a}_{n+1} = \mathbb{a}_n + \mathbb{h}, \text{ där } \mathbb{h} \text{ är lösning till } \underbrace{\mathbb{f}'(\mathbb{a}_n)\mathbb{h} = -\mathbb{f}(\mathbb{a}_n)}_{\text{linj. ekv. system}} \end{cases}$

Kedjeregeln igen (mera generellt)

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathbf{x}} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbb{R}^p$ $\mathbf{x}, \mathbf{f}$ är C^1

Bilda $\mathbf{h} = \mathbf{f} \circ \mathbf{x}$ dvs $\mathbf{h}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\mathbf{t}))$

Då är $\boxed{\underset{(p\times n)}{\mathbf{h}'(\mathbf{t})} = \underbrace{\underset{(p\times m)}{\mathbf{f}'(\mathbf{x}(\mathbf{t}))}\ \underset{(m\times n)}{\mathbf{x}'(\mathbf{t})}}_{p\times n}}$ $*$

EX $\quad \underset{\mathbf{t}}{n=2} \quad \underset{\mathbf{x}}{m=3} \quad \underset{\mathbf{h}(\mathbf{x})}{p=2}$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial t_1} & \frac{\partial h_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial t_1} & \frac{\partial h_2}{\partial t_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} \end{bmatrix}$$

EX $\quad \frac{\partial h_1}{\partial t_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial t_2}$

Detta är känt sedan kap 2 och får ses som en förklaring till den allmänna formen $*$. Kan etableras utan ytterligare "djup" bevisning.

Om $n = m = p$ så gäller också $\det \mathbf{h}'(\mathbf{t}) = \det \mathbf{f}'(\mathbf{x}(\mathbf{t})) \cdot \det \mathbf{x}'(\mathbf{t})$

Invers funktion

$\underset{(D_f)}{f : A} \to B$

f injektiv: $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

f surjektiv: $V_f = B$

f bijektiv: injektiv och surjektiv

inverterbar med invers $f: B \to A$

Dem

EX. Bestäm tangentplanet till ytan $x^3y^2z=1$ i punkten $(\frac{1}{2},2,2)$

Metod 1 $z=f(x,y)$, linjär approx.

$$z=x^{-3}y^{-2}$$

Tangentplanet: $z=f(\frac{1}{2},2)+f'_x(\frac{1}{2},2)(x-\frac{1}{2})+f'_y(\frac{1}{2},2)(y-2)$

$f'_x=-3x^{-4}y^{-2}=-\frac{3}{x^4y^2}$ $\quad f'_x(\frac{1}{2},2)=-12$

$f'_y=-2x^{-3}y^{-3}=\frac{-2}{x^3y^3}$ $\quad f'_y(\frac{1}{2},2)=-2$

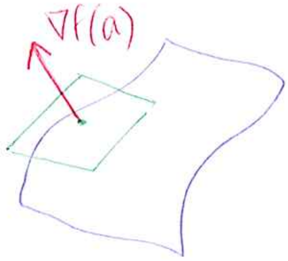
T-plan: $z=2-12(x-\frac{1}{2})-2(y-2)$

$$12x+2y+z=12$$

Metod 2 Uppfatta ekv. som en nivåyta till en funktion av 3 variabler:

$g(x,y,z)=x^3y^2z=1$

Då är $\nabla g(\frac{1}{2},2,2)$ ortogonal mot tangentplanet till den nivåyta av g som innehåller punkten $(\frac{1}{2},2,2)$



$\nabla f=(3x^2y^2z,\ 2x^3yz,\ x^3y^2)$

$\nabla f(\frac{1}{2},2,2)=(6,1,\frac{1}{2})$

$(6,1,\frac{1}{2})\cdot(x-\frac{1}{2},y-2,z-2)=0$

$6(x-\frac{1}{2})+y-2+\frac{1}{2}(z-2)=0$

$6x+y+\frac{z}{2}=6$

$$12x+2y+z=12$$

Lokala undersökningar

EX $f(x,y) = (x+y)^2 + x^4$ har stat. pkt i $(0,0)$

$f(0,0) = 0 \quad f'_x(0,0) = 0 \quad f'_y(0,0) = 0$

$Q(h,k) = Q(x,y) = (x+y)^2$

$Q \geq 0$ med likhet $x+y=0 \not\Rightarrow$ Positivt semidefinit

$f(x,y) \geq 0$ alltid $f(0,0) = 0 \rightarrow$ strängt lokalt min!

(även globalt)

EX $g(x,y) = \underbrace{(x+y)^2}_{Q} + x^3$

Q fortfarande, pos. semidef.

$(0,0)$ stat. punkt

$g(x,-x) = x^3 \not\Rightarrow$ sadelpunkt

$\begin{cases} g(\varepsilon,-\varepsilon) = \varepsilon^3 \\ g(-\varepsilon,\varepsilon) = -\varepsilon^3 \end{cases}$

har både pos. o. neg värden i varje omgiv. till $(0,0)$

EX

$f(x,y) = (y-x^2)^2 - x^5$ har stat. pkt i $(0,0)$

$y^2 - 2x^2y + x^4 - x^5$

Q pos. semidefinit.

Testa alla linjer genom $(0,0)$

$y = kx$ ger $f(x,kx) = (kx - x^2)^2 - x^5 = k^2x^2 - 2kx^3 + x^4 - x^5$

$= x^2(k^2 - 2x + x^2 - x^3) > 0 \quad x \neq 0 \quad = 0, x = 0$

$x = 0$ ger $f(0,y) = y^2 > 0$ för $y \neq 0$

y-axeln

Testa $y = x^2$ $f(x,x^2) = -x^5$

Så f antar faktiskt negativa värden i varje omgivning av $(0,0) \not\Rightarrow$ sadelpunkt

Ex

68a) $f(x,y) = (1+\sin(x+y))\ln(1+2x+y) - 2x - y$

Taylorutv. kring $(0,0)$!

En variabel: $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + O(t^5)$ $t = x+y$ $\sin(x+y) = x+y+O((x+y)^3)$

$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + O(u^3)$ $u = 2x+y$ $\ln(1+2x+y) = 2x+y - \frac{1}{2}(2x+y)^2 + O((2x+y)^3)$

$f(x,y) = (1+x+y+O((x+y)^3))(2x+y - \frac{1}{2}(2x+y)^2 + O((2x+y)^3)) - 2x - y$

$= \cancel{2x+y} - \frac{1}{2}(2x+y)^2 + (x+y)(2x+y) + \underbrace{\text{termer av grad} \geq 3}_{=R}$

$\cancel{-2x-y} = -\frac{1}{2}(4x^2+4xy+y^2) + 2x^2 + 3xy + y^2 + R$

$= xy + \frac{y^2}{2} + R$

Entydighetssats:

Om $f(x,y) = \underbrace{P(x,y)}_{\text{grad } 2} + R(x,y)$ där $R(x,y) = |h|^3 B(h)$ så är

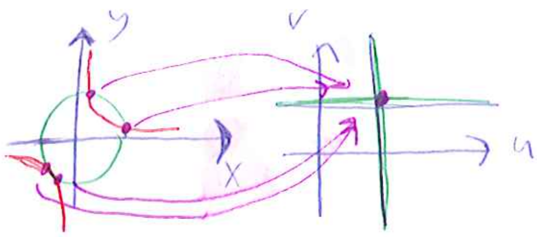
$h = (x,y) - (a,b)$

$P(x,y) = T$-polynom av grad 2

EX Uttryck $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

i de nya variablerna $\begin{cases} u = x^2+y^2 \\ v = xy \end{cases}$

(i lämpligt område av planet)



produkt, båda beror av x

beror ej av x

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \boxed{\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)y =$

$\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2 + \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot y$

$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot 2x + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}}_{= \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\ (f \in C^2)}\cdot y\right)\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot y\right) =$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(4x^2) + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\underbrace{(2xy + 2xy)}_{4v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} y^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y\right)$$

prod. regeln

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) \cdot 2x + \boxed{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v} \cdot y + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 1\right)} =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right) \cdot 2x + \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \right.$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) \frac{\partial v}{\partial y}\right) \cdot y + \frac{\partial f}{\partial v} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot 2y + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot x\right) \cdot 2x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot 2y + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot x\right) y + \frac{\partial f}{\partial v}$$

26/1 EX $f(x,y) = (x^2y - x - 1)^2 + (x^2-1)^2$

Har 2 stat. punkter, båda <u>min</u>

EX $f(x,y) = xe^{-2x} + e^{-x}\cos y$.

∞ många stat. pkter, alla är lokala max.

Rep

F-matris $\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})\right]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

F-det. Om $m = n$:

$$\det \mathbf{f}'(\mathbf{a}) = \frac{d(f_1 \dots f_m)}{d(x_1 \dots x_n)}$$

$\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en C^1-fktion

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{f}'(\mathbf{a})\mathbf{h} + \rho(\mathbf{h})|\mathbf{h}| \text{ där } \rho(\mathbf{h}) \underset{h \to 0}{\to} 0$$

Kedjeregeln: $\underset{m \times r}{\frac{d}{dt}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))} = \underset{m \times n}{\mathbf{f}'(\mathbf{x}(t))} \cdot \underset{n \times r}{\mathbf{x}'(t)}$

Inversa funktioner

$f: A \to B$ är bijektiv om f är injektiv och $f(A) = B$

Då finns $f^{-1}: B \to A$ s.a. $\underset{=id_b}{f \circ f^{-1}} = \underset{id_a}{f^{-1} \circ f} = id$

Sats 2, Inversa funktionssatsen

Antag f är en C^1-funktion från R^n till R^n och att $\det f'(a) \neq 0$. Då finns en omgivning U av a och en omgivning V av $f(a)$ så $f|_U : U \to V$ är inverterbar.

med $\boxed{\text{invers } f|_U^{-1}}$ $\Leftrightarrow$ och $f|_U^{-1}$ $(f|_U^{-1}\ V \to U)$

OBS! Lokal inverterbarhet!

Analogi

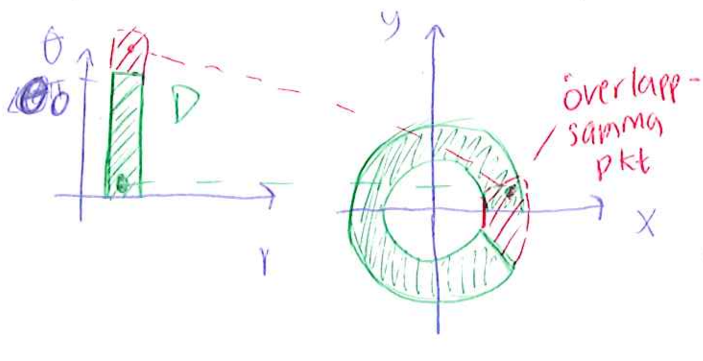
En linjär avb. $x \to \underbrace{A}_{n\times n\text{-matris}} x$ är inverterbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
$R^n \to R^n$

Här approximerar vi lokalt kring a vår funktion f med $f(a) + \underbrace{f'(a)}_{n\times n\text{-matris}} h$ så det verkar rimligt att det approximerade funktionen ska vara inverterbar tillräckligt nära a om $f \in C^1$ och $\det f'(a) \neq 0$

Ex. Polara koordinater (igen)

$f \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\cos\theta \end{cases}$ $\quad \dfrac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = r$

Alltså: f är lokalt inverterbar kring varje punkt med $r \neq 0$.



f inverterbar på D om $\theta_0 < 2\pi$

ej inverterbar om $\theta_0 \geq 2\pi$

Implicita funktioner

EX Ekvationen $x^2+y^2=1$ definierar för alla $y \geq 0$ y som funktion av x.
Men denna funktion kan även uttryckas explicit
$f(x)=\sqrt{1-x^2}$
Kring punkten $(1,0)$ däremot, ges inte någon funktion $y(x)$ av $x^2+y^2=1$. (Ingen entydighet)

EX Ekvationen $x^3+y^3-3xy=0$
Antag att y är en funktion av x, åtminstone lokalt på kurvan som ekv. beskriver, och att denna funktion är deriverbar. Då kan vi ~~använda~~ derivera hela ekv. (tänk $y=y(x)$).

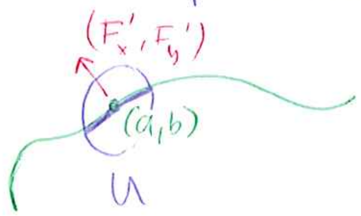
$$\cancel{3}x^2+\cancel{3}y^2y'-\cancel{3}y-\cancel{3}xy'=0$$

$$y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}$$

Är detta ok? Var är det ok?

Sats 3 s.148 Implicita funktionssatsen

Antag F är en C^1-funktion från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^1$.
Låt $F(x,y)=C$ vara en nivåkurva till F och (a,b) en punkt på denna kurva med $F'_y(a,b)\neq 0$



Då finns en omgivning U av (a,b) sådan att kurvans snitt U definierar y som en C^1-funktion av x, säg $y=f(x)$

Vidare är i U: $f'(x)=-\dfrac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$

Anm Det sista får man genom att utföra derivering av $F(x,y(x))=C$

$$F'_x+F'_y\cdot y'(x)=0 \Rightarrow y'(x)=-\frac{F'_x}{F'_y}$$

Deriveringen utförs vanligen på detta sätt i varje tillämpning.

Bevisskiss

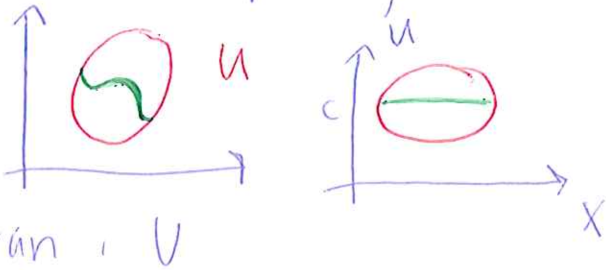
Sätt $\mathbb{H}$: $\begin{cases} u = x \\ v = F(x,y) \end{cases}$ $\quad \mathbb{H}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ och $\in C^1$

Funktionaldet: $\det \mathbb{H}' = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ F'_x & F'_y \end{vmatrix} = F'_y$

I punkten (a,b) är $\det \mathbb{H}' = F'_y \neq 0$.

Enl. inversa funktionssatsen finns en omgivning U till (a,b), vilken $\mathbb{H}$ är inverterbar $U \to V$ omg. av $\mathbb{H}(a,b)$

$\mathbb{H}^{-1}$: $\begin{cases} x = u \\ y = G(u,v) \end{cases}$ $\quad \mathbb{H}^{-1}$ är C^1



Eftersom $v = F(x,y)$ på kurvan i U

dvs $v = c$ och $y = G(u,c) =$ (funktion av bara $u = x$) $= f(x)$

$\mathbb{H}^{-1}$ är C^1 så speciellt är $y = G(u,c) = f(x)$ också C^1!

Beviset klart.

Åter till vårt exempel $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

$F'_y = 3y^2 - 3x$ $\quad$ Om $F'_y(a,b) = 3b^2 - 3a \neq 0$ så är y en funktion av x i en omgivning till (a,b) (på kurvan) och deriveringen vi gjorde är legitim enligt imp. funktionssatsen.

"Känd kurva"

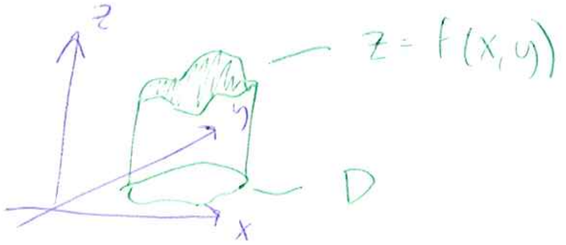
$y = tx \quad x^3 + t^3x^3 - 3tx^2 = 0$

$\cancel{x^3}^{\,x}(1+t^3) = 3t\cancel{x^2}$

För $x \neq 0$ $(t \neq -1)$ $\quad \begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$

30/1 | Integration i 2 variabler

(LV3)



Mål: • Att definiera volymen av kroppen $K = \{x, y, z\ (x,y) \in D,\ 0 \le z < f(x,y)\}$ och generalisera till fall då f har växlande tecken
• Att finna ett sätt att beräkna denna mha enkelintegraler, sk Upprepad integration.

EX på hur det senare kan se ut.

$f(x,y) = xy \quad D = \{(x,y): 0 \le x \le 1, 1 \le y \le 2\}$

$\text{Volym}(K) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D xy\,dx\,dy = \left\{\begin{matrix}\text{upprepad}\\ \text{integration}\end{matrix}\right\} =$

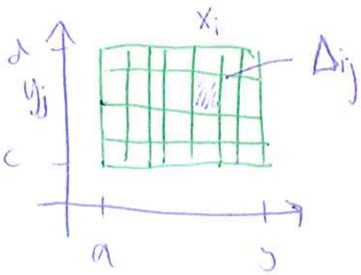
$\int_0^1 \left(\int_1^2 xy\,dy\right)dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=1}^{y=2} dx = \int_0^1 \left(2x - \frac{x}{2}\right)dx =$

$\int_0^1 \frac{3x}{2}\,dx = \left[\frac{3x^2}{4}\right]_0^1 = \boxed{\frac{3}{4}}$

Dubbelintegralen definieras först för sk trappfunktioner över rektanglar.

Rektangel $\Delta = \{(x,y): a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$

Indelning i mindre delrektanglar Δ_{ij}



Om $\Phi(x,y) = \underset{\text{konstant}}{C_{ij}}$ då $(x,y) \in \Delta_{ij}$

så kallas Φ en trappfunktion.

Vi definierar $\iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx\,dy =$

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \underbrace{(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})}_{M(\Delta_{ij})\ (\text{Arean av } \Delta_{ij})} =$

$= \sum_{ij} c_{ij} \cdot M(\Delta_{ij})$

varje term är plus eller minus volymen av ett rätblock

$c_{ij} > 0$ — $c_{ij} < 0$

Denna sk. dubbelintegral lyder under följande lagar.

i) Linearitet $\iint_\Delta (c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2) = c_1 \iint_\Delta \Phi_1 + c_2 \iint_\Delta \Phi_2$

ii) Additivitet:

$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ $\qquad \iint_\Delta \phi = \iint_{\Delta_1} \phi + \iint_{\Delta_2} \phi$

$\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ (nollmängd)

iii) Monotonicitet:

$\phi_1 \le \phi_2, \Delta \Rightarrow \iint_\Delta \phi_1 \le \iint_\Delta \phi_2$

iv) Triangelolikheten för integraler:

$$\left| \iint_\Delta \phi \right| \le \iint_\Delta |\phi|$$

<u>Upprepad integration</u>

$$\iint_\Delta \phi(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d \phi(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b \phi(x,y)\,dx \right) dy$$

$$\iint_\Delta \phi\,dxdy = \sum_{ij} c_{ij} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \underbrace{\sum_{ij} (x_i - x_{i-1}) \int_{y_{j-1}}^{y_j} \phi\,dy}_{\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\int \phi\,dy)\,dx}$$

$$= \sum_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Big(\underbrace{\sum_j \int_{y_{j-1}}^{y_j} \phi\,dy}_{\int_c^d \phi\,dy} \Big) dx = \int_a^b \left(\int_c^d \phi\,dy \right) dx$$

p.s.s. med omvänd ordning $\int_c^d \left(\int_a^b \phi\,dx \right) dy$

Låt f vara en begränsad funktion, definierad på $\Delta = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$

Def

Om till varje $\varepsilon > 0$ finns trappfunktioner ϕ och φ, där $\phi \le f \le \varphi$ och $\iint_\Delta \varphi\,dxdy - \iint_\Delta \phi\,dxdy < \varepsilon$ så säger man att f är (Riemann-) integrerbar över Δ

Sats 1 s. 233

Om f är begr. och integrerbar på Δ så existerar <u>exakt</u> ett tal I sådan att

$$\iint_\Delta \phi \, dx dy \leq I \leq \iint_\Delta \varphi \, dx dy$$ för varje val av ϕ, φ trappfunk

med $\phi \leq f \leq \varphi$

Def

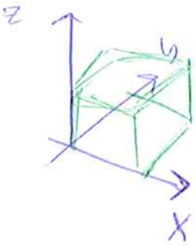
Talet I kallas dubbelintegralen av f över Δ, skrivs

$$\iint_\Delta f(x,y) \, dx dy$$

Ex på begränsad, icke (Riemann-) integrerbar funktion

$\Delta = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

Sätt $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q} \text{ (rationellt tal)} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$



Varje undre trappfunktion har $\phi \leq 0$
övre — " — $\varphi \geq 1$

$\iint \phi \leq 0$ för alla ϕ

$\iint \varphi \geq 0$ för alla φ

Dvs villkoret $\iint \varphi - \iint \phi <$ kan inte uppnås med $\varepsilon < 1$
Men f är Lebesgue-integrerbar med integral $= 0$

Sats 2 s. 235

Om f är integrerbar över Δ så gäller (det. som tidigare)

$$\iint_\Delta f(x,y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \, dy \right) dx$$ förutsatt att enkelintegralerna i HL existerar.

$$\left(= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \, dx \right) dy \right)$$

om dessa finns.

Bevis

Vi antar alltså att HL i satsen existerar. Då är

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx \le \int_a^b \left(\int_c^d \varphi(x,y)\,dy \right) dx = \iint_\Delta \varphi(x,y)\,dx\,dy$$

$\forall \varphi$ trappf. $\geq f$

Upprepad integration är ju bevisad för trappfunkt.

P.S.S

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx \ge \int_a^b \left(\int_c^d \phi(x,y)\,dy \right) dx = \iint_\Delta \phi(x,y)\,dx\,dy$$

Vi har hittat ett I enl. sats 1, f integrerbar $\Rightarrow \exists$ bara ett sådant I, nämligen $\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy$

så $\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$

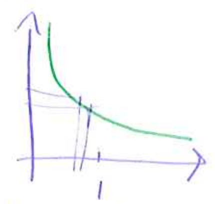
V.S.B.

Rep (sid 41)

f kontinuerlig på D kompakt $\overset{\text{sats 4}}{\Longrightarrow}$ $\min_D f$ och $\max_D f$ existerar $\overset{\text{sats 5}}{\Longrightarrow}$ f är likformigt kontinuerlig på D

dvs $\forall \varepsilon > 0$
$\exists \delta > 0 : x', x'' \in D,$
$|x' - x''| < \delta \Rightarrow$
$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Ex



$f(x) = \frac{1}{x}$
$(0,1)$
ej likform. kont.

~~dvs $\forall \varepsilon > 0$~~

$f(x) = \frac{1}{x}$
$(1,2)$
likf. kont.

Sats 3 s.237

Låt f vara kontinuerlig på den kompakta rektangeln
$\Delta = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$

Då gäller i) f är integrerbar över Δ

ii) $\iint_\Delta f\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f\,dx \right) dy$

Dem

3.9b) $y(x)$ $\begin{cases} y_1 = 3x_1 + 2x_2 - 5 \\ y_2 = 5x_1 + 4x_2 - 9 \end{cases}$

Funk-matrisen

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\det y'(x) = 12 - 10 = \underline{2}$ $\Rightarrow$ inverterbar

3.24 Ekvation $x^y + \sin y = 1$

påstås def. y som fun av x nära $(1,0)$

Visa detta och beräkna $y'(x)$ i denna omgivning.

Sätt $F(x,y) = x^y + \sin y$ (C^1-funktion)

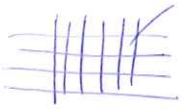
$$\overbrace{x^{y(x)}}^{e^{y(x)\ln x}} + \sin y(x) = 1 \quad \text{Vi deriverar m.a.p } x.$$

$$e^{y(x)} \cdot \left(y'(x) \cdot \ln x + y(x) \cdot \frac{1}{x}\right) + \cos y(x) \cdot y'(x) = 0$$

1/2 Dugga tors. 9/2 14.15 tom 6.4

Rep

Trappfunktioner

Indelning av rektangel  Δ_{ij} $d = \max_{ij}(\text{diam}(\Delta_{ij}))$

Integral av trappfkn $\iint_\Delta \phi \, dx\,dy = \sum_i \sum_j c_{ij} \underbrace{\mu(\Delta_{ij})}_{\text{area } \Delta_{ij}}$

Sats 3

Om f är kontinuerlig på $\Delta = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$ så är:

1) f är integrerbar på Δ

2) $\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$

Sats 5 s. 41: f kont på D kompakt $\to$ f likformigt kont. på D

Tag en indelning av Δ i delrektanglar, finhet $d = \max(\text{diam}(\Delta_i))$

Sätt $\phi(x,y) = m_i = \min_{\Delta_i}(f(x,y))$ (finns pga sats 4 s. 41.

Kont på kompakt $\Rightarrow$ min och max av f antas i mängden)

$\varphi(x,y) = M_i = \max_{\Delta_i} f(x,y)$ — 〃 — . .

Om vi tar ett $\varepsilon > 0$ så finns ett $\delta > 0$ s.a om $d < \delta$ så är $M_i - m_i < \varepsilon / \mu(\Delta)$ för alla $i = 1, \dots n$

Vi visar nu 1) i satsen vi vill visa att till $\forall \varepsilon > 0$ kan vi finna trappfunktioner ϕ, φ med $\phi \le f \le \varphi$ och $\iint \varphi - \iint \phi < \varepsilon$ (def. av integrerbar)

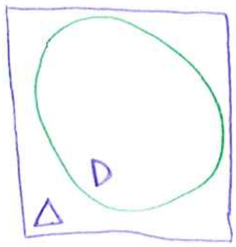
Vi tar alltså ett $\varepsilon > 0$, väljer en indelning $\Delta_1 \dots \Delta_n$ med finhet $d < \delta$, sätter (som ovan) $\phi = m_i$ på Δ_i, $\varphi = M$ på Δ_i

Då blir $\iint\limits_{\Delta} \varphi \, dxdy - \iint\limits_{\Delta} \phi \, dxdy = \iint\limits_{\Delta} (\varphi - \phi)\, dxdy =$

$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(M_i - m_i)}_{<\varepsilon \text{ för } \forall i \text{ pga likformig kont.}} \cdot \mu(\Delta_i) < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \mu(\Delta_i) = \varepsilon \cdot \cancel{\mu(\Delta)}$, där $\sum_{i=1}^{n} \mu(\Delta_i) = \mu(\Delta)$

Bevis för 1) klart!

Andra mängder som inte är rektanglar
(begränsade)



$D \subseteq \Delta$

Karakteristiska funktionen för D:

$$\chi_D = \begin{cases} 1 & \text{om } (x,y) \in D \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

<u>Idé</u>: $\iint\limits_{D} f \, dxdy = \iint\limits_{\Delta} \chi_D \cdot f \, dxdy$

N

<u>Rep</u>: nollmängd

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ rektanglar $\Delta_1, \ldots \Delta_n$

så att $N \subseteq \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n = D$ och $\mu(D) < \varepsilon$

En mängd är kvadrerbar (Jordanmätbar) om dess rand är en nollmängd.

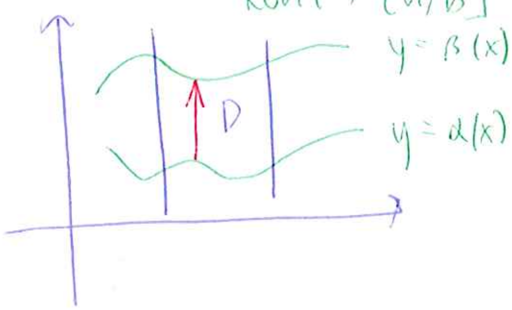
Lemma 2: f ~~k~~ likformigt kont. på en kvadrerbar mängd D $\Rightarrow$ f är integrerbar på D.

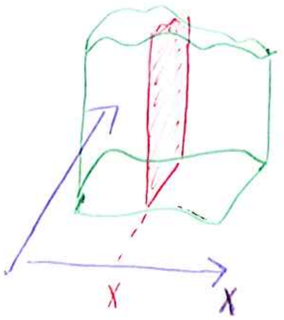
Sats 4 f kont på $D = \{(x,y) : a \le x \le b, \; \alpha(x) \le y \le \beta(x)$

kont i $[a,b]$

$\Rightarrow$ 1) f integrerbar över D

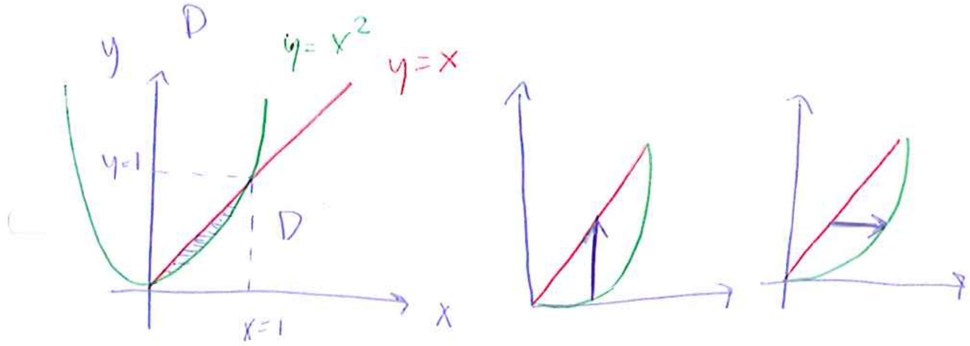
2) $\iint\limits_{D} f \, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$





$\bar{\Delta}$ = mängd plus randen
Δ = mängd

EX $\iint_D e^{\frac{y}{x}}\,dxdy$, $D = \{(x,y) : x^2 \le y \le x\} = \{ y \le x \le \sqrt{y} \}$



Två sätt

i) $I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} e^{y/x}\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[x e^{\frac{y}{x}} \right]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (xe - xe^x)\,dx =$

$= \left[\frac{ex^2}{2}\right]_0^1 - \left(\left[xe^x \right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x\,dx \right)$

$= \left[\frac{ex^2}{2} - xe^x + e^x \right]_0^1 = \frac{e}{2} - 1$

2) $I = \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} e^{y/x}\,dx \right) dy$

besvärlig primitiv funktion

Vanligt skrivsätt: $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} e^{y/x}\,dy \right) dx = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} e^{y/x}\,dy$

Obs! $\iint_D 1\,dxdy = \mu(D)$ arean av D

Riemansummor

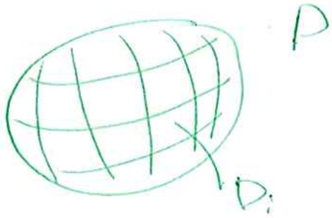
1) På rektangel Δ, indelning Δ_i
Välj en punkt $(x_i, y_i) \in \Delta_i$. Sätt $R = \sum_i f(x_i, y_i)\,\mu(\Delta_i)$
$m_i \le f(x_i, y_i) \le M_i$
Om f är integrerbar på A, så gäller att $\underbrace{\sum_i m_i \mu(\Delta_i)}_{\to \iint_\Delta f} \le R$

$$R \le \underbrace{\sum_i M_i \mu(\Delta_i)}_{\to \iint_\Delta f}$$

$$R = \sum_i f(x_i, y_i)\mu(\Delta_i) \to \iint_\Delta f\,dx\,dy \quad \text{då } d \to 0$$

2) Allmännare kvadrerbara, begränsade mängder

$(x_i, y_i) \in D_i$



$$R = \sum_i f(x_i, y_i)\mu(D_i)$$

Om $d \to 0$ så $R \to \iint_D f\,dx\,dy$

Medelvärdessats

f kontinuerlig på D, kvadrerbar, $\bar{D}$ kompakt, D bågvis sammanhängande

Då finns $(a,b) \in D$ så att $\frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(a,b)$

Bevis

Låt $m = \min_D f$ och $M = \max_{\bar{D}} f$

Då är $m \cdot \mu(D) \le \iint_D f\,dx\,dy \le M\mu(D)$

$$m \le \frac{1}{\mu(D)} \iint_D dx\,dy \le M$$

Enligt satsen om mellanliggande värde (då m och M antas av f på kompakta $\bar{D}$) så finns en punkt $(a,b) \in D$ s.a $f(a,b) = c$

Anm.

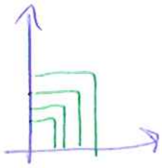
Om $(a,b) \in D_i$ $i = 1,2,3$ $D_1 \supset D_2 \supset D_3 \dots$ och $\mu(D_n) \to 0$

så är $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\mu(D_n)} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy = f(a,b)$

Uppg: Visa att $f''_{xy} = f''_{yx}$ om dessa är kont.

Clairautz sats

Ledning: $D_n: \{(x,y) : a \le x \le a+\frac{1}{n},\ b \le y \le b+\frac{1}{n}\}$

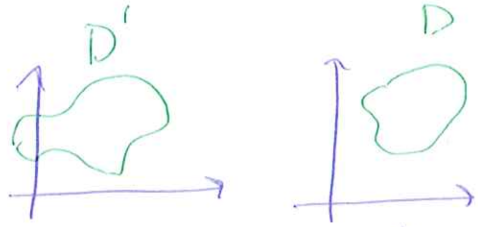


Visa att $\iint_{D_n} f''_{xy} = \iint_{D} f''_{yx}$ för varje n, låt $n \to \infty$

Variabelbyte

Vi vill göra ett variabelbyte

$$\begin{cases} x = g(u,v) & (u,v) \in D' \\ y = h(u,v) & (x,y) \in D \end{cases}$$



Bijektiv $D' \to D$. Avbildningen $(u,v) \to (x,y)$ approximeras lokalt kring (u_0, v_0) enligt:

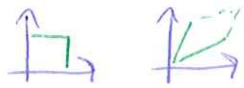
$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g'_u & g'_v \\ h'_u & h'_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix}$$ med skalan

$$\left|\begin{vmatrix} g'_u & g'_v \\ h'_u & h'_v \end{vmatrix}\right| = |J(u,v)| = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right|$$

Linalg

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

areaskala $= |\det A|$



Dela in D' i kvadrerbara delmängder (som tidigare), ger motsvarande uppdelning av D.

Bara skissbevis!

Vi approximerar vår integral i (x,y) med en Riemannsumma:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \mu(D_i)}_{\text{Riemannsumma för } \iint_D f(x,y)\,dx\,dy} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(g(u_i,v_i), h(u_i,v_i))\, |J(u_i,v_i)|}_{\text{Värde av } f|J| \text{ i } D'} \mu(D_i)}_{\text{Riemannsumma för } \iint_{D'} f|J|\,du\,dv}$$

Låt indelningsfinhet $\to 0$

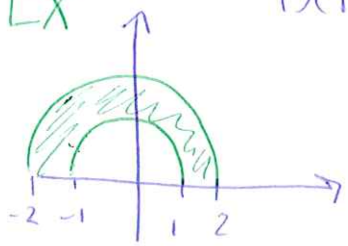
Vi får: $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(g(u,v), h(u,v))\, |J(u,v)|\, du\,dv$$

Sats 6 s. 261

Avbildning som ovan C^1, bijektiv från D' öppet, kvadrerbar i (u,v) till D öppet kvadrerbar i (x,y) och $J(u,v) \neq 0$ i D'

Då är $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(g(u,v),h(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

EX



Beräkna $\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

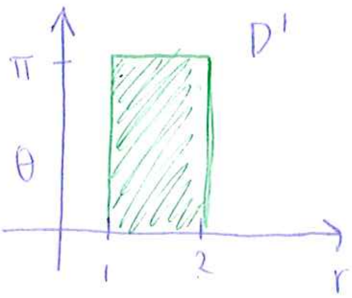
$D := \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$

Vi byter till polära koordinater (för att det ska bli en rektangel)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le \pi \end{matrix}\right\} D'$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \dots = r$$

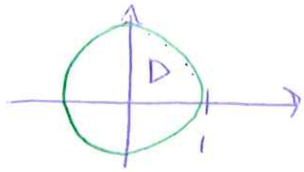
$$\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{D'} r\sin\theta \cdot r \cdot \underbrace{r}_{|J|}\,dr\,d\theta$$



$$= \int_1^2 \left(\int_0^\pi r^3 \sin\theta\, d\theta \right) dr = \int_1^2 r^3\,dr \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta}_{\left[-\cos\theta\right]_0^\pi = 2}$$

$$= 2\left|\frac{r^4}{4}\right|_1^2 = \boxed{\frac{15}{2}}$$

Mera symmetri



EX $D =$ enhetscirkelskivan

$$\iint_D x^2\,dx\,dy = \iint_D y^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \left\{\begin{matrix}\text{polära}\\ \text{koord.}\end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D r^2 \cdot \underset{|J|}{r}\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^1 r^3\,dr}_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

D' första kvadrant av D.

$$\iint_{D'} x^2\,dx\,dy = \frac{1}{4}\iint_D x^2\,dx\,dy = \frac{\pi}{16}$$

6.12. $\iint_D \frac{x}{1+y^2}\,dx\,dy = \left\{\begin{matrix}\text{välj x-led}\\ \text{först pga lättare}\\ \text{funktion}\end{matrix}\right\} =$ $\quad D = \{(x,y) : x^2 \le y \le 1,\ x \ge 0\}$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} \frac{x}{1+y^2}\,dx\right) dy = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\left(\int_0^{\sqrt{y}} x\,dx\right) dy = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{y}} dy =$$

här ska aldrig vara variabler!

$$= \int_0^1 \frac{y}{2(1+y^2)}\,dy = \left[\frac{1}{4}\ln(1+y^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{4}$$

Variabelbyte

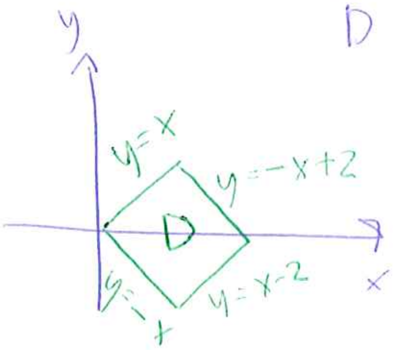
EX. $D: \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$ $\quad$ Area $\mu(D)$?

$$\mu(D) = \iint_D 1\,dx\,dy = \left\{\begin{matrix} u = \frac{x}{a} & \left\{\begin{matrix} x = au \\ y = bv\end{matrix}\right. & J = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{vmatrix} = ab \\ v = \frac{y}{b} & & \\ u^2+v^2 \le 1 & & \end{matrix}\right\} =$$

$$= \iint_{D'} ab\,du\,dv = ab\underbrace{\mu(D')}_{\pi\cdot 1^2} = \pi ab$$

Ex. D = kvadratskivan med hörn i (0,0) (1,1) (2,0) (1,-1)

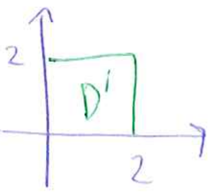
beräkna $\iint_D \sqrt{x^2-y^2}\,dx\,dy$



D begränsas av: $\left| \begin{matrix} x-y=0 \\ x-y=2 \end{matrix} \right.$

och $\left| \begin{matrix} x+y=0 \\ x+y=2 \end{matrix} \right.$

Sätt $\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$ D' ges av $\begin{cases} 0 \le u \le 8 \\ 0 \le v \le 2 \end{cases}$

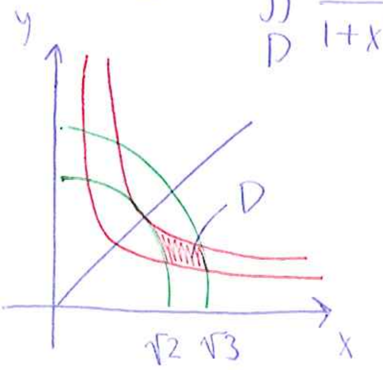


$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \left| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right| = 2 \qquad \frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}} = \frac{1}{2}$$

$$\iint_D \underbrace{\sqrt{x^2-y^2}}_{\sqrt{(x+y)(x-y)}}\,dx\,dy = \iint_{D'} \sqrt{uv}\cdot\frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^2 \sqrt{u}\,du}_{\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^2}\underbrace{\int_0^2 \sqrt{v}\,dv}_{\left[\frac{2}{3}v^{3/2}\right]_0^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

Ex. $I = \iint_D \frac{x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$ $D = \{(x,y) : 0 \le y \le x, 2 \le x^2+y^2 \le 3, 1 \le 2xy \le 2\}$



Välj $\begin{cases} u = x^2+y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$ bijektiv i sektorn $0 \le y \le x$

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \left| \begin{matrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{matrix} \right| = 4(x^2-y^2)$$

$$J = \frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{4(x^2-y^2)} \qquad D' = 2 \le u \le 3,\ 1 \le v \le 2$$

$$I = \iint_{D'} \frac{\cancel{x^2-y^2}}{1+u}\cdot\frac{1}{\cancel{4(x^2-y^2)}}\,du\,dv = \frac{1}{4}\iint_{D'} \frac{1}{1+u}\,du\,dv$$

>0 för $0 < y < x$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

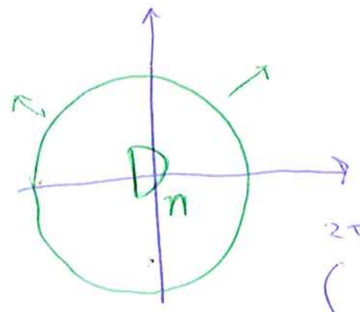
2/2 **Generaliserade integraler** (dubbel)

Hittills har både f och D i $\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy$ varit begränsade.

Idé Låt f vara begränsad på D_n som är en begränsad mängd. Om "$D_n \to D$" då $n \to \infty$ och vi får ett gränsvärde $\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f\,dx\,dy$ så kan detta vara av intresse!

EX Vi vill beräkna $I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$

1) Vi tar $D_n = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq n^2\}$ och låter sedan $n \to \infty$



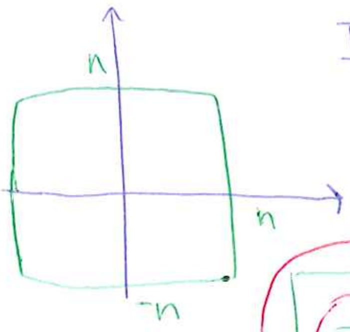
$$I_n = \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \left\{ \begin{array}{l} \text{polära koordinater} \\ x^2+y^2 = r^2 \\ J = r \end{array} \right\} =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^n e^{-r^2}\cdot r\,dr\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^n d\theta =$$

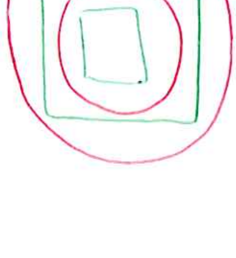
$$\pi\left(1-e^{-n^2}\right) \Rightarrow \pi,\ n \to \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \pi$$

2) Vi tar $D_n' = [-n,n]\times[-n,n] = \{(x,y) : |x| \leq n,\ |y| \leq n\}$



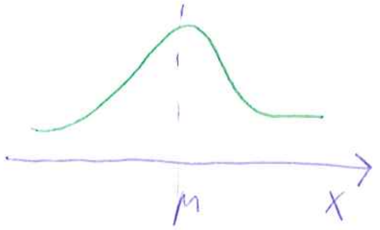
$$I_n' = \iint_{D_n'} \underbrace{e^{-x^2-y^2}}_{e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}}\,dx\,dy = \int_{-n}^{n} e^{-x^2}\cdot\int_{-n}^{n} e^{-y^2}\,dy = \left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx\right)^2$$



Vi kan ana att I_n' och I_n ska ha samma gränsvärde, dvs $I_n' \to \pi$.

$$I_n' \to \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \pi$$

Vi finner också $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ $\left(\text{och } \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$

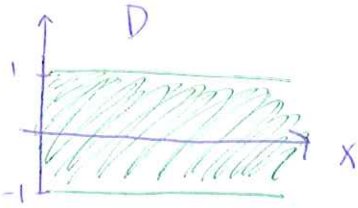


(Gauss klockkurva = normalfördelningens frekvensfunktion)

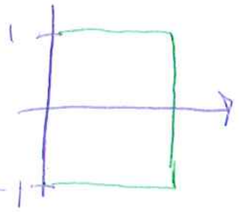
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

EX

$$\iint_D y\,dxdy \qquad D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \infty, -1 \leq y \leq 1\}$$

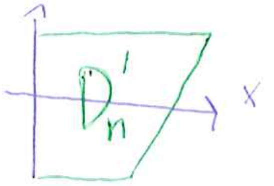


1) $D_n = [0,n] \times [-1,1]$



$$\iint_{D_n} y\,dxdy = \int_0^n \Big(\underbrace{\int_{-1}^{1} y\,dy}_{=0}\Big) dx = 0$$

2) $D_n' = \{(x,y) : 0 \leq x \leq n+ky\}$



$$\iint_{D_n'} y\,dxdy = \int_{-1}^{1} \Big(\int_0^{n+ky} y\,dx\Big) dy = \int_{-1}^{1} y(\cancel{n}+ky)\,dy =$$

udda funktion

$\frac{2k}{3}$ (oberoende av n)

- Problemet här är att integranden växlar tecken inom D.

Vi tar nu fallet $f \geq 0$ i hela D

Def En sk uttömmande följd av mängder till D är en följd $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ sådan att $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \ldots \subset D_n \subset D_{n+1} \subset \ldots$ och $\forall x \in D \; \exists n : x \in D_n$ $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D\right)$

Anm

Man tillåter att det sista villkoret $\left(\forall x \exists n : x \in D_n\right)$ inte gäller på en <u>nollmängd</u>

Def Om det finns en uttömmande följd $\{D_n\}_1^\infty$ så att
$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \underbrace{f(x,y)}_{\geq 0}\,dxdy = I \ (<\infty)$ så sägs $\iint_D f(x,y)\,dxdy$

vara <u>konvergent</u> och <u>$= I$</u>.

Anm.
Man kan visa att om detta gäller för <u>en</u> $\{D_n\}_1^\infty$ så gäller det för alla uttömmande följder med samma I!

Om $\iint_D f$ inte är konvergent kallas den divergent ($=\infty$ om $f \geq 0$)

För enkelintegraler fann vi: $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ är konv $\Leftrightarrow p<1$

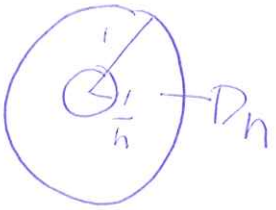
$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ är konv $\Leftrightarrow p>1$

Vi undersöker nu för vilka p som $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{p/2}}\,dxdy$ konv.

$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$

Sätt $D_n = \{(x,y) : \frac{1}{n^2} \leq x^2+y^2 \leq 1\}$

$\{D_n\}_1^\infty$ är en uttömmande följd till D.



θ-integr kan tas först

$$\iint_{D_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^{p/2}}\,dxdy = \left\{\begin{matrix}\text{polär} \\ \text{subst.} \\ x^2+y^2=r^2 \\ J=r\end{matrix}\right\} = \int_0^{2\pi}\left(\int_{1/n}^1 \frac{1}{r^p}\,r\,dr\right)d\theta =$$

$$2\pi\int_{1/n}^1 r^{-p+1}\,dr = 2\pi \begin{cases} p\neq 2: & \left[\frac{r^{-p+2}}{-p+2}\right]_{1/n}^1 = \frac{1}{2-p} - \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{\overbrace{-p+2}^{-p+1}}}{2-p} \begin{cases}\to \frac{1}{2-p} & \text{om } p<2 \\ \to \infty & \text{om } p>2\end{cases} \\ p=2: & \left[\ln r\right]_{\frac{1}{n}}^1 = -\ln\frac{1}{n} = \ln n \to \infty \quad (p=2)\end{cases}$$

Härav $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{p/2}}\,dx\,dy$ är konvergent om $p<2$
divergent om $p\geq 2$

För $\{(x,y): x^2+y^2\geq 1\}$ får vi konvergens då $p>2$
div $p\leq 2$
~~för~~ med samma integrand, (se boken!)

Jämförelsekriterium:

Om $0\leq f\leq g$ i D så gäller 1) $\iint_D g$ konv $\Rightarrow \iint_D f$ konv.

2) $\iint_D f$ divergent $\Rightarrow \iint_D g$ divergent

EX $\iint_D \frac{1}{(x^2+2y^2)^{p/2}}\,dx\,dy$ $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\}$
$f(x,y)$ $g(x,y)$

1) $p<2$ $\quad 0\leq \frac{1}{(x^2+2y^2)^{p/2}} \leq \frac{1}{(x^2+y^2)^{p/2}}$ konvergent

~~$\iint f(x,y$~~

$\iint g(x,y)$ konv enligt ovan $\Rightarrow$

$\iint f(x,y)\,dx\,dy$ konv.

2) $p>2$

$$\underbrace{\frac{1}{(x^2+2y^2)^{p/2}}}_{g(x,y)} \geq \frac{1}{(2x^2+2y^2)^{p/2}} = \frac{1}{2^{p/2}}\cdot\underbrace{\frac{1}{(x^2+y^2)^{p/2}}}_{f(x,y)} \geq 0$$

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ divergent då $p>2$ $\Rightarrow$

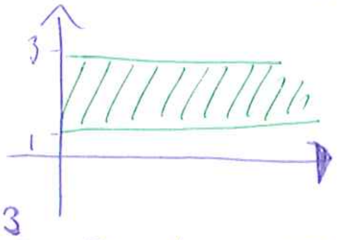
$\iint_D g(x,y)\,dx\,dy$ divergent då $p>2$

Satsen om upprepad integration har en motsvarighet för generaliserade integraler - se. 276!
Brukar kallas <u>Fubinis sats</u>

$$\iint_{-\infty\,-\infty}^{\infty\,\infty} e^{-x^2} e^{-y^2}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy$$

EX (Fibinis sats)

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2y^2}\,dx\,dy \qquad D=[0,\infty)\times[1,3]$$



$$= \int_1^3\left(\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2y^2}\,dx\right)dy = \int_1^3 \left[\frac{1}{y}\arctan(xy)\right]_{x=0}^{\infty} dy$$

$$= \int_1^3 \frac{\pi}{2y}\,dy = \frac{\pi}{2}\Big[\ln y\Big]_1^3 = \frac{\pi \ln 3}{2}$$

<u>Om f har varierande tecken i D:</u>

Sätt $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$ och $f^- = \frac{|f|-f}{2}$

Vi ser då 1) $f^+ \geq 0 \quad f^- \geq 0$

2) $|f| = f^+ + f^-$

Vi delar upp D i $D_1 \cup D_2$, $f \geq 0$ i D_1, $f \leq 0$ i D_2

Def $\iint_D f = \iint_{D_1} f^+ - \iint_{D_2} f^-$ om <u>båda</u> dessa är <u>konvergenta</u>

Absolut konvergens

$\Leftrightarrow \iint_D |f|$ är konv

EX Fubinis sats behöver inte gälla om $\iint_D |f|$ är divergent

Beräkna $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$ med upprepad integration.

Olika integrationsordning ger $\frac{\pi}{4}$ resp $-\frac{\pi}{2}$

(?) (?)

EX. $$\int_0^\infty \frac{1}{x}\left(e^{-x}-e^{-3x}\right)dx = \int_0^\infty\left(\int_1^3 e^{-xy}\,dy\right)dx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_1^3\left(\int_0^\infty e^{-xy}\,dx\right)dy =$$

$$= \int_1^3 \left[-\frac{1}{y}e^{-xy}\right]_0^\infty dy = \int_1^3 \frac{1}{y}\,dy = \left[\ln y\right]_1^3 = \ln 3$$

6/2 | LV4

Trippelintegraler

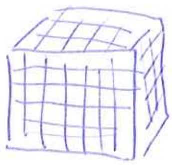
$f(x,y,z)$ begränsad

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

D — begr. $\subset \mathbb{R}^3$

Uppbyggnad analog med den för dubbelint.

1) D = rätblock



Indelning D_{ijk}

Def av integral av trappfunk:

$$\iiint_D \phi\,dx\,dy\,dz = \sum_i \sum_j \sum_k c_{ijk} \underbrace{M(D_{ijk})}_{\text{volymen}}$$

Räknelagar upprepad int.

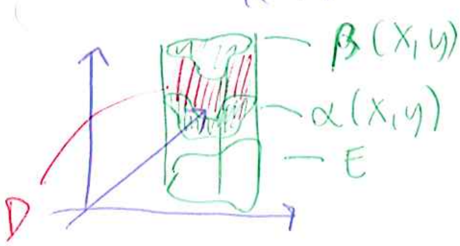
2) f kontinuerlig $\Rightarrow$ f integrerbar på rätblock — Def analog

3) D allmännare: begränsad, kvadrerbar

4) D eller f obegränsad Generaliserad integral (gränsvärde av $\iiint_{D_n} f$, $\{D_n\}$ uttömmande)

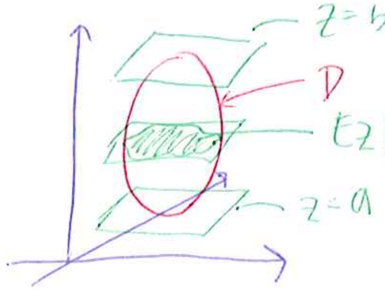
Upprepad integration, två varianter

1) $D = \{(x,y,z) : (x,y) \in E,\ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$



$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_E \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right)$$

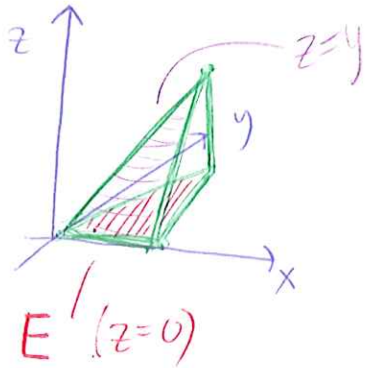
2)



$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\iint_{E_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz$$

Ex $I = \iiint_D (x+y-z)\,dx\,dy\,dz$ D = tetraederområdet med hörn i (0,0,0) (1,0,0) (1,1,0) (1,1,1)

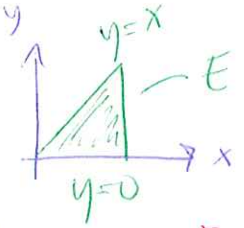
Variant 1:



$$I = \iint_E \left(\int_0^y (x+y-z)\,dz \right) dx\,dy =$$

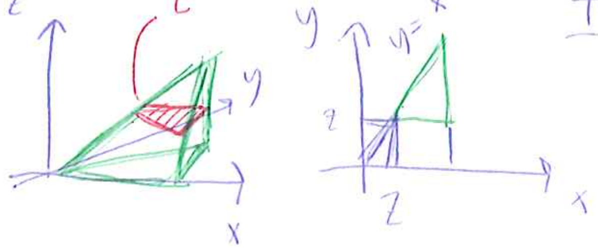
$$\iint_E \left[xz + yz - \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=y} dx\,dy =$$

$$= \iint_E \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^x xy + \frac{y^2}{2}\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{6} \right]_{y=0}^{y=x} dx$$



$$= \int_0^1 \frac{2x^3}{3}\,dx = \boxed{\frac{1}{6}}$$

2)



$$I = \int_0^1 \left(\iint_E (x+y-z)\,dx\,dy \right) dz =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_z^1 \left(\int_z^x (x+y-z)\,dy \right) dx \right) dz \text{ osv.}$$

Variabelbyten

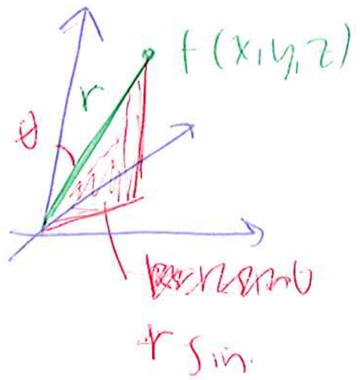
$x = g(u,v,w)$
$y = h(u,v,w)$
$z = k(u,v,w)$

en bijektion $D' \to D$

i (u,v,w)-rummet — i (x,y,z)-rummet

Då är $$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D'} f(g(u,v,w), h(u,v,w), k(u,v,w)) \cdot \underbrace{\left|\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)}\right|}_{J(u,v,w)} du\,dv\,dw$$

Rymdpolära koordinater (sfäriska koord)



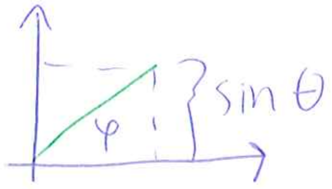
$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$0 \le \theta \le \pi$

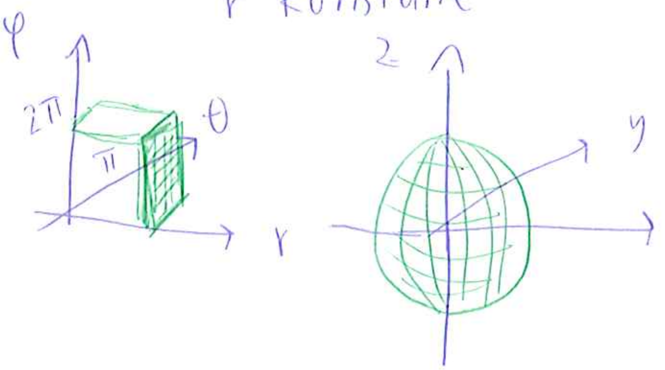
$0 \le \varphi < 2\pi$

$x = r\sin\theta\cos\varphi$
$y = r\sin\theta\sin\varphi$
$z = r\cos\theta$

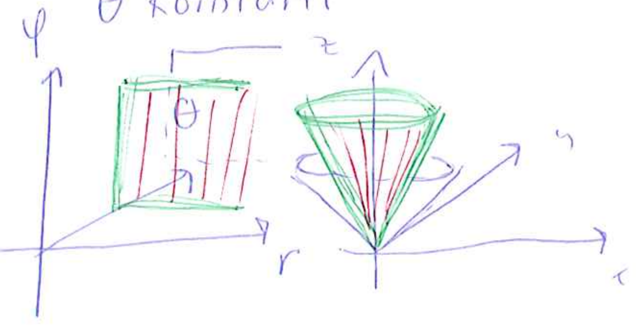
Volymen av D
$$\mu(D) = \iiint_D 1\,dx\,dy\,dz$$



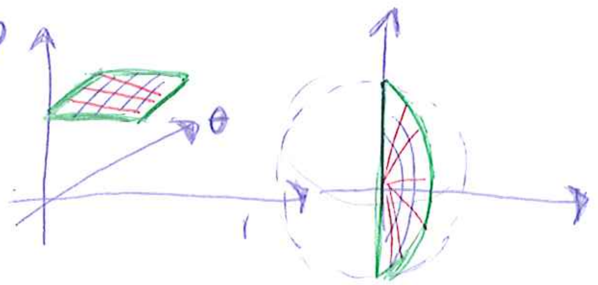
r konstant



θ konstant



φ konstant



Jacobianen?

$$J = \frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

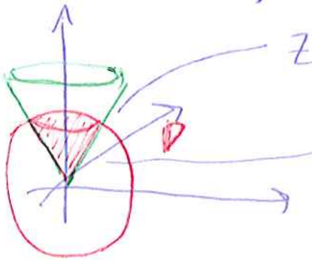
$$\left\{\begin{matrix}\text{utveckla} \\ \text{efter kol. 3}\end{matrix}\right\} = -r\sin\theta\sin\varphi \begin{vmatrix} \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} +$$

$$\{r^2\sin\theta\sin^2\varphi(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\} + r\sin\theta\cos\varphi \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin\theta\sin^2\varphi\underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{=1} + r^2\sin\theta\cos^2\varphi\underbrace{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}_{=1}$$

$$= r^2\sin\theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \boxed{r^2\sin\theta}\ (\geq 0)$$

EX. $I = \iiint_D \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz \quad D = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$



$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$z = \sqrt{x^2+y^2}$

I rymdpolära koord.

$0 \leq \theta \leq \pi/4 \quad 0 \leq r \leq 1 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$J = r^2\sin\theta$

$$I = \iiint_{D'} \frac{r\cos\theta}{1+r^2} \cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$\int_0^1\left(\int_0^{\pi/4}\underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\frac{r^3\cos\theta\sin\theta}{1+r^2}\,d\varphi\right)}_{\frac{2\pi\cdot r^3\cos\theta\sin\theta}{1+r^2}}d\theta\right)dr = \int_0^1 dr\int_0^{\pi/4}\frac{2\pi\cdot r^3\cos\theta\sin\theta}{1+r^2}\,d\theta =$$

$$2\pi\int_0^1 \frac{r^3}{1+r^2}\,dr \underbrace{\int_0^{\pi/4} \cos\theta\sin\theta\,d\theta}_{\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{\overbrace{r+r^3}^{}-r}{1+r^2}\,dr = \frac{\pi}{2}\int_0^1 r - \frac{r}{1+r^2}\,dr =$$

$= r$

$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}\left(1-\ln 2\right)$$

Multipelintegraler, $n > 3$

EX Beräkna måttet ("4-volymen") av

$D = \{(x,y,z,u) : x^2+y^2+z^2+u^2 \leq 1\}$ ("4-dim. klot" $R=1$)

$$M(D) = \iiiint_D 1\,dx\,dy\,dz\,du = \iint_E dx\,dy \iint 1\cdot dz\,du =$$

projektionen av D på xy-planet

$u^2+z^2 \leq 1-x^2-y^2$

cirkelskiva m. radie $\sqrt{1-x^2-y^2}$

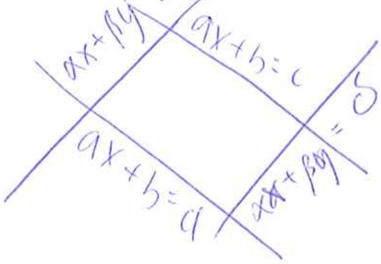
$$= \iint_E \underbrace{\pi(1-x^2-y^2)}_{\text{area av cirkelskivan}}\,dx\,dy = \left\{\begin{matrix}\text{pol.}\\ \text{koord}\end{matrix}\right\} =$$

$$\int_0^1 \pi(1-r^2)\,r\,dr \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} = 2\pi^2\int_0^1 (r-r^3)\,dr = \frac{2\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{2}$$

"Klot" med radie R: $\dfrac{\pi^2 R^4}{2}$

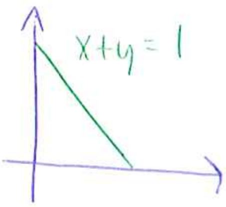
8/2 Variabelbyten

EX.



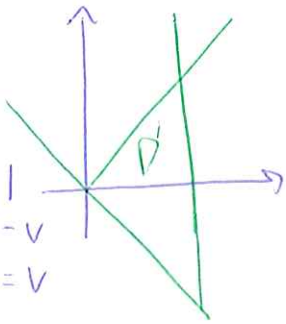
$$\begin{cases} u = ax+by \\ v = \alpha x+\beta y \end{cases}$$

EX



$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$$

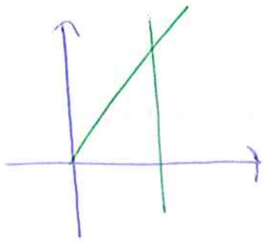
$x+y=1 \to u=1$
$x=0 \to u=-v$
$y=0 \to u=v$



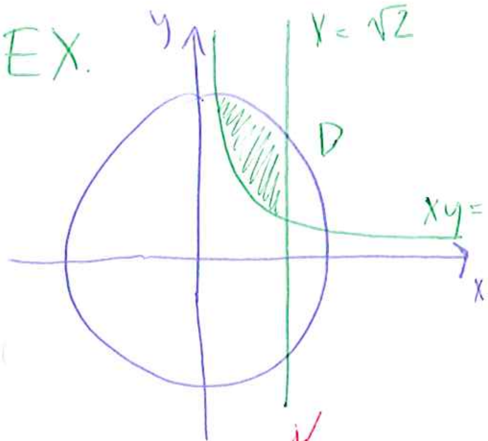
eller

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = y \end{cases}$$

$x+y=1 \to u=1$
$x=0 \to u=v$
$y=0 \to v=0$



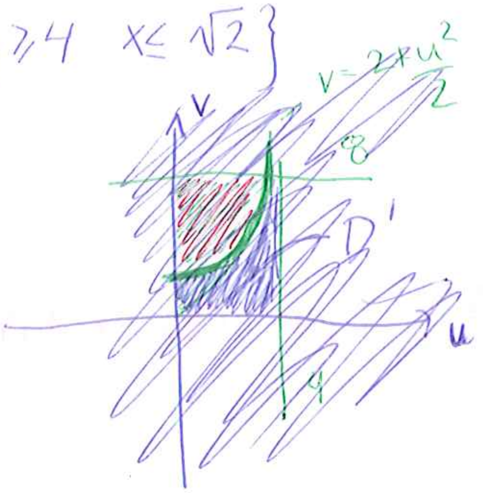
EX.

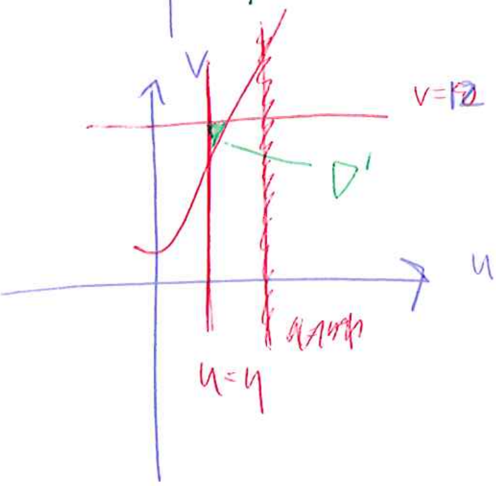


$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 12,\ xy \ge 4\quad x \le \sqrt{2}\}$

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x^2+y^2 \end{cases}$$

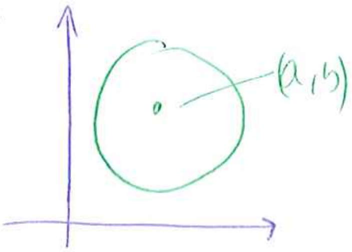
$xy=4 \to u=4$
$x^2+y^2=12 \to v=12$
$x=\sqrt{2} \to v = 2+\frac{u^2}{2}$





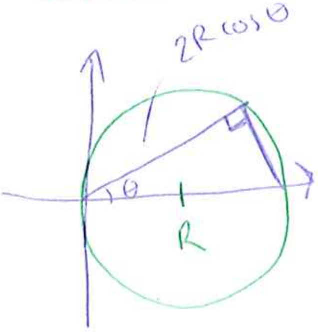
$$J(x,y) = \frac{1}{J(u,v)} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2y^2 - 2x^2 \to \boxed{\frac{1}{2y^2-2x^2}}$$

Polära koordinater, varianter



$$\begin{cases} x-a = r\cos\theta \\ y-b = r\sin\theta \end{cases} \quad J = r$$

Annan variant: (vanl. pol. koord.)



För $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ är $0 \leq r \leq 2R\cos\theta$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2R\cos\theta} f \cdot r \, dr$$

8.1 Massor och volymer

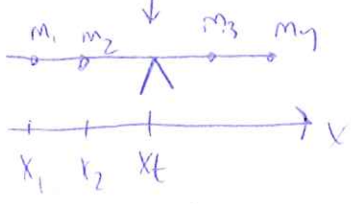
$$\text{vol}(K) = \iiint_K 1 \, dxdydz$$

Densitetsfunktion $\rho(x,y,z)$

massan av $K = \iiint \rho(x,y,z)\, dxdydz$

8.3 Masscentrum (tyngdpunkt)

Momentjämvikt kring denna punkt



$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_t) m_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = x_T \sum_{i=1}^{n} m_i = x \cdot m$$

$$x_t = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \rightarrow \frac{1}{m} \int_a^b \rho(x)\, dx$$

3 variabler:

$$x_t = \frac{1}{m} \iiint_K \rho(x,y,z) \cdot x \, dxdydz$$

$$\iiint_K \rho(x,y,z)\, dxdydz$$

Om ρ = konstant:

$$x_T = \frac{\iiint x}{\iiint 1} = \frac{\iiint_K x \, dxdydz}{V}$$

P.s.s $y_T = \dfrac{\iiint \rho y}{m}$ $\qquad z_T = \dfrac{\iiint \rho z}{m}$

EX.

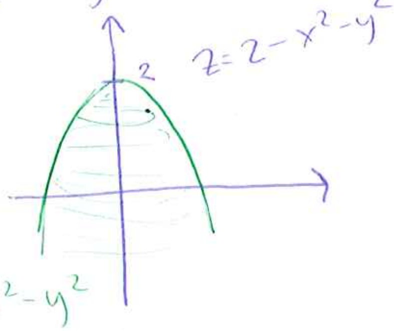
Klot, radie R, centrum i $(0,0,0)$
Cylindriskt hål (symmetriskt
radie a.

Visa att volymen av klotet minus hålet bara beror av cylinderns höjd H.

Ex på volym och masscentrum

8.31 K är den kropp som begränsas av ytorna

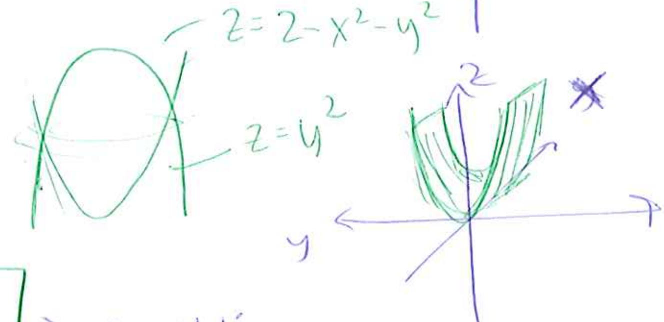
$z = 2 - x^2 - y^2$ och $z = y^2$



a) Beräkna volymen av K

b) Beräkna masscentrum för K.

Skärningskurva?



$$\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = y^2 \end{cases}$$

$2 - x^2 - y^2 = y^2 \quad \boxed{x^2 + 2y^2 = 2}$ – projektionen på xy-planet (D)

a) $\mathrm{Vol}(K) = \iint\limits_D \big(\underbrace{(2 - x^2 - y^2) - y^2}_{2 - x^2 - 2y^2}\big)\,dx\,dy$

Elliptiska polära koord.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ \sqrt{2}y = r\sin\theta \end{cases} \qquad x = r\cos\theta, \quad y = \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta \qquad J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{r}{\sqrt{2}}\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

Allmänt $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = $ konst.

$$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases} \quad J = abr$$

$$\mathrm{Vol}(K) = \iint_{D'} (2-r^2)\frac{r}{\sqrt{2}}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}(2r-r^3)\,dr$$

J

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\left[r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}}}_{1} = \pi\sqrt{2}$$

b) Vi övertygar oss om att $x_t = y_t = 0$ pga symmetri.

$$z_T = \left\{ \begin{matrix} \text{ρ konst.} \\ \text{här!} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(K)} \cdot \iiint_K z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \iiint_K z\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \iint_D dx\,dy \int_{y^2}^{2-x^2-y^2} z\,dz = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \iint \frac{1}{2}(2-x^2-y^2)^2 - (y^2)^2\,dx\,dy =$$

$$\left[\frac{z^2}{2}\right]_{y^2}^{2-x^2-y^2} \qquad (2-x^2-y^2-y^2)(2-x^2-y^2+y^2)$$

$$= \frac{1}{\pi 2\sqrt{2}} \iint_D (2-x^2-2y^2)(2-x^2)\,dx\,dy = \left\{ \begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta \end{matrix} \quad J = \frac{r}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$\int_0^{2\pi} 2 - r^2\cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi} 2 - \frac{r^2}{2}\,d\theta = 2\pi\left(2-\frac{r^2}{2}\right) = \pi(4-r^2)$$

$$r^2\cos^2\theta = \frac{r^2}{2}(1+\cos 2\theta)$$

$$= \frac{1}{\pi 2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_0^{2\pi} (2-r^2)(2-r^2\cos^2\theta)J\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{\cancel{\pi} 2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}} (2-r^2)\cancel{\pi}(4-r^2)\frac{r}{\sqrt{2}}\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{2}} (2-r^2)(4r-r^3)\,dr$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{2}} 8r - 6r^3 + r^5\,dr = \frac{1}{4}\left[4r^2 - \frac{3r^4}{2} + \frac{r^6}{6}\right]_0^{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{1}{4}\left(8 - 6 + \frac{4}{3}\right) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Masscentrum är $(0, 0, 5/6)$

Ellipsoid: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $J = abc\,r^2\sin\theta$

"Volymen" av "bollen" i $\mathbb{R}^n$.

$B_n = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x}| \le 1 \}$

Rep $\mu(B_4) = \iint_{B_2} dx_1 dx_2 \iint_{x_3^2+x_4^2 \le 1-x_1^2-x_2^2} 1\, dx_3 dx_4 = \iint_{B_2} \pi(1-x_1^2-x_2^2)\,dx_1 dx_2 =$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \le 1$

cirkelskiva radie $\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$

projektion på x_1-x_2-planet ger $x_1^2+x_2^2 \le 1$

$= \left\{ \begin{matrix} \text{pol} \\ \text{koord} \end{matrix} \right\} = \ldots = \frac{\pi^2}{2}$

n	$\mu(B_n)$
1	2
2	π
3	$4\pi/3$
4	$\pi^2/2$
5	$8\pi^2/15$

~~Samband för olika n?~~

$\cancel{\mu(B_n) = \iint_{B_2} dx_1 dx_2 \int \ldots \int_{x_3^2+x_4^2 \ldots}}$

Samband för olika n?

$\mu(B_n) = \iint_{B_2} dx_1 dx_2 \int \ldots \int_{x_3^2+\ldots x_n^2 \le \underbrace{1-x_1^2-x_2^2}} 1\, dx_3 \ldots dx_n = \iint_{B_2} \mu(B_{n-2}) \cdot (1-x_1^2-x_1^2)^{\frac{n-2}{2}} dx_1 dx_2$

$\left\{ \text{radie } \sqrt{1-x_1^2-x_2^2} \right\}$

$\left\{ \boxed{\text{OBS}}: \mu(|\mathbf{x}| \le R) = \mu(B_n) \cdot R^n \right.$

$= \left\{ \begin{matrix} \text{pol} \\ \text{koord} \end{matrix} \right\} = \mu(B_{n-2}) \iint_{B_2'} (1-r^2)^{\frac{n-2}{2}} r\, dr\, d\theta = 2\pi\, \mu(B_{n-2}) \left[\frac{(1-r^2)^{\frac{n-2}{2}+1}}{\frac{-1}{n}} \right]_0^1$

$0 \le \theta \le 2\pi$
$0 \le r \le 1$

$= \boxed{\frac{2\pi}{n} \cdot \mu(B_{n-2})}$

$\mu(B_5) = \frac{2\pi}{5} \cdot \mu(B_3) = \frac{2\pi}{5} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi^2}{15}$

$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$

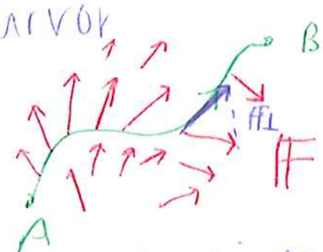
9/2

Kapitel 9–10

- Vektoranalys handlar om vektorfält $\mathbb{F}(x)$ (från $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$)

- Integraler längs kurvor

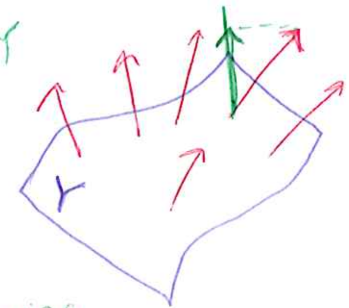
$$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$



Arbetet som uträttas av $\mathbb{F}$ på en partikel som rör sig längs C.

- Ytintegraler $\underbrace{\iint_Y \mathbb{F} \cdot \mathbb{N} \, dS}_{\text{Flödet genom } Y}$

ex hastighen i en vätskeströmning



~~Def: Kurvintegral~~

- Integralens ev. oberoende av vägvalet

- Potential, finns det? Konservativa fält

$$\nabla U = F \qquad \int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = U(B) - U(A)$$

Def: kurvintegral

Orienterad C^1-kurva: $\mathbb{r}(t) = (x(t), y(t))$ $\quad$ C^1-funktioner $\quad$ $\mathbb{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$ tangentvektorn om $\neq 0$

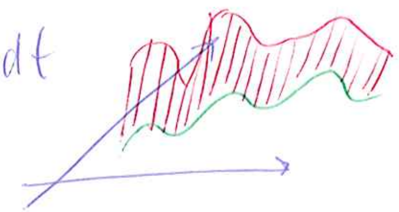
$\alpha \leq t \leq \beta$

Kurvans längd $= L = \int_\alpha^\beta \underbrace{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt}_{ds}$

$$= \int_\alpha^\beta \underbrace{|\mathbb{r}'(t)| \, dt}_{ds}$$

Vi kan nu definiera integralen av en funktion $f(x,y)$ längs C:

$$\int_C f(\mathbf{r})\,ds = \int_\alpha^\beta f(\mathbf{r}(t))\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt$$



Vi behöver veta om denna definition är oberoende av parametriseringen (dvs valet av $\mathbf{r}(t)$)

Antag parameter u. Samband mellan t och u:

$t = \varphi(u)$, φ är C^1 och strängt växande.

Med parametern u får vi:

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(\varphi(u)))\left|\frac{d}{du}\mathbf{r}(\varphi(u))\right|du =$$

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(\varphi(u)))\cdot|\mathbf{r}'(\varphi(u))|\cdot\underbrace{\varphi'(u)}_{>0 \text{ pga str. växande}}\,du = \left\{\begin{array}{l} t=\varphi(u) \\ dt = \varphi'(u)\,du \end{array}\right\} =$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\mathbf{r}(t))\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt$$

Integralen alltså oberoende av parametervalet!

Kurvintegralen (tangentiellt) av ett fält $\mathbb{F}$ längs C

$\mathbb{F}$ kontinuerlig i $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (öppen)

C ligger i D och är C^1 och orienterad.

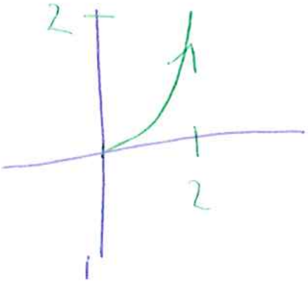
Def $$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} := \int_\alpha^\beta \mathbb{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$$

param. framst. $\mathbf{r}(t)$: $\alpha \le t \le \beta$

$$\mathbb{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt = \mathbb{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\,\underbrace{|\mathbf{r}'(t)|\,dt}_{ds}$$

EX $\mathbb{F} = (x^2+xy,\ y^2-xy)$

C: kurvan $y = \frac{x^2}{2}$ från origo till $(2,2)$



$$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \\ = (2t, 2t^2) \quad \text{(eller } (t, \tfrac{t^2}{2}) \\ 0 \le t \le 1 \qquad\qquad 0 \le t \le 2 \text{)} \\ \mathbf{r}'(t) = (2, 4t) \end{array} \right\}$$

$$= \int_0^1 (4t^2+4t^3,\ 4t^4-4t^3)\cdot(2,4t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (8t^2+8t^3+16t^5-16t^4)\,dt =$$

$$\frac{8}{3}+\frac{8}{4}+\frac{16}{6}-\frac{16}{5} = \frac{160+120+160-192}{60} = \frac{248}{60}$$

$$= \boxed{\frac{62}{15}}$$

13/2
LV5

$$\int_C \mathbb{F}\cdot\mathbb{T}\,ds = \int_\alpha^\beta \mathbb{F}(\mathbb{r}(t))\cdot\mathbb{r}'(t)\,dt = \int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$$

enhets.. till C

Generalisering C styckvis C'

Def $\displaystyle\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i'} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$

Obs! Om $-C$ betyder/innebär samma kurva som C men med omvänd orientering, så gäller

$$\int_{-C} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = -\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} \quad \text{(bevis variabelbyte)}$$

Så om $\displaystyle\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_\alpha^\beta \mathbb{F}(\mathbb{r}(t))\cdot\mathbb{r}'(t)\,dt$

så är $\displaystyle\int_{-C} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_\beta^\alpha \mathbb{F}(\mathbb{r}(t))\cdot\mathbb{r}'(t)\,dt$

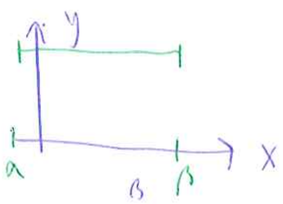
om man vill behålla C's parameter.

Vanligt skrivsätt: om $\mathbb{F} = (P,Q)$

så skriver man ofta $\displaystyle\int_C P\,dx + Q\,dy \left(= \int_\alpha^\beta P x'(t) + Q y'(t)\,dt \right)$

Om C är axelparallell:

1, $y = y_0$

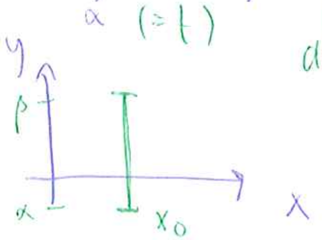


$\mathbb{r}(t) = (\underbrace{t}_{=x}, y_0)$

$\mathbb{r}'(t) = (1, 0)$

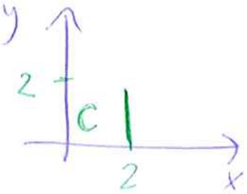
$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_\alpha^\beta P(\underbrace{x}_{(=t)}, y_0)\,\underbrace{dx}_{dt}$$

2, $x = x_0$



$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_\alpha^\beta Q(x_0, y)\,dy$$

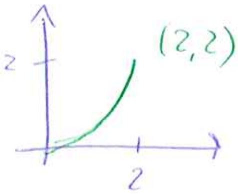
EX. $\int_C (x^2+xy)\,dx+(y^2-xy)\,dy =$



$$= \int_0^2 x^2\,dx + \int_0^2 (y^2-2y)\,dy = \frac{8}{3} + \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

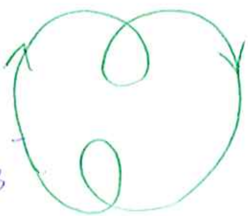
Rep

Med annan väg får vi resultatet $\frac{62}{15}$



Terminologi

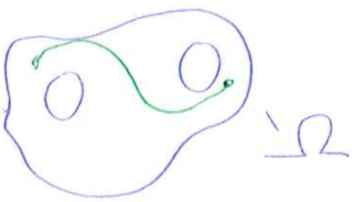
- Kurvor: sluten kurva $r(\alpha)=r(b)$
  $r(t)$ $\alpha \le t \le \beta$



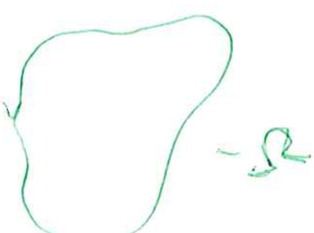
enkel sluten kurva, skär inte sig själv
$\alpha < t_1 < t_2 < \beta$
$\Rightarrow r(t_1) \neq r(t_2)$

- Omraden

Ω Bågvis sammanhängande se kap 1.



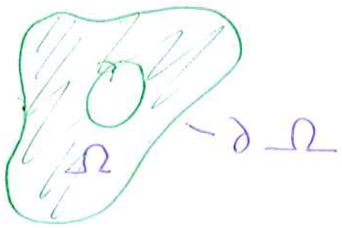
Enkelt sammanhängande: varje enkel, sluten kurva i Ω innesluter endast punkter ur Ω



• Rand till området

$\partial\Omega$ = randen till Ω, bågvis sammanhängande

$\partial\Omega$ sägs vara positivt orienterad om Ω alltid är till vänster om $\partial\Omega$ i genomloppsriktningen



Greens formel

Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vara öppen, $D \subset \Omega$ kompakt

Under lämpliga villkor på D och ∂D och om $\mathbb{F} = (P, Q)$ är C^1 i Ω så är:

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Lämpliga villkor:

allmänt: ∂D är antingen C^1 eller styckvis C^1 eller är en union av ändligt många sådana

I vårt bevis:

D kan med axelparallella linjer delas upp i:

1) Ändligt många område av typen:

$\{(x,y) : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ "enkla i x-led"

2) Ändligt många områden av typen:

$\{(x,y) : c \le y \le d,\ u(y) \le x \le v(y)\}$ "enkla i y-led"

Bevis under den starkare förutsättningen (med områden som är "enkla" i x- resp y-led.

Två steg i beviset.

1) Visa att $\int_{\partial D_i} P\,dx = \iint_{D_i} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$ (för enkla områden D_i av resp. typ) $(*)$

och $\int_{\partial D_i} Q\,dy = \iint_{D_i} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy$

2) Addera alla bidrag till <u>en</u> integral, dels för P, dels för Q. Addera dessa 2.

1. Låt $D_i = \{(x,y) : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ parallell m. y-axeln

Då är

$$VL = \int_{\partial D_i} P\,dx = \int_a^b P(x,\varphi(x))\cdot 1 + 0\cdot\varphi'(x))\,dx +$$

$P\,dx + Q\,dy$ parameter

$$\int_{\varphi(a)}^{\psi(b)} 0\cdot dy + \boxed{\int_b^a} (P(x,\psi(x))\cdot 1 + 0\cdot\psi'(x)\,dx + \int_{\psi(b)}^{\varphi(a)} 0\,dy$$

obs.

$$= \int_a^b P(x,\varphi(x)) - P(x,\psi(x))\,dx$$

Vi jämför med HL i önskad likhet $(*)$

upprepad int

$$HL = -\iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int_a^b \Big[P(x,y)\Big]_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)} dx$$

$$= -\int_a^b P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))\,dx$$

VL = HL visat

Helt analogt visas

$$\int_{D_i} Q\,dy = \iint_{D_i} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy \quad \text{om } D_i = \{(x,y) : c \le y \le d,\ u(y) \le x \le v(x)\}$$

Steg 2: Allm. observation

$$\int_{\partial D_1} + \int_{\partial D_2} + \int_{D_3} = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \cancel{\int_{\gamma}} + \cancel{\int_{-\gamma}} + \cancel{\int_{\gamma_2}} + \cancel{\int_{-\gamma_2}} + \cancel{\int_{\gamma_3}} + \cancel{\int_{-\gamma_3}} = \int_{\partial D}$$

Så om $\int_{\partial D_i} P\,dx = \iint_{D_i} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$ för varje D_i, så blir

$$\int_{\partial D} P\,dx = \iint_{D} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$$

Motsvarande gäller för $\int_{\partial D} Q\,dy = \iint_{D} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy$

Addera dessa två ledvis

$\Rightarrow$ BEVISET KLART ■

$$\boxed{\text{Tänk på att hela } \Omega \text{ måste vara } C^1\text{, annars kan inte formeln användas}}$$

EX $\mathbb{B} = \frac{(-y, x)}{x^2+y^2}$ Vad är $\int_C \mathbb{B} \cdot d\mathbb{r}$

C – enhetscirkeln: ett varv i positiv led.

$$P = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad Q = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\Rightarrow$

Så $\underset{x^2+y^2\le 1}{\iint_D} \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}_{=0}\, dxdy = 0$

men $\int_C \frac{(-y,x)}{x^2+y^2} \cdot d\mathbf{r} = \left\{ \begin{array}{ll} x=\cos t & x^2+y^2=1 \\ y=\sin t & 0\le t\le 2\pi \\ x'=-\sin t & \\ y'=\cos t & \end{array} \right\} =$

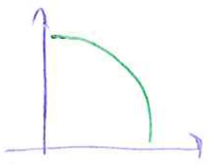
$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{-\sin t}{1}(-\sin t) + \frac{\cos t}{1}\cdot \cos t}_{\sin^2 t+\cos^2 t = 1}\, dt = 2\pi$$

- Greens formel gäller ej. $\mathbf{F}$ ej def i $(0,0)$ som är innanför kurvan C.

EX (Gammal tenta)

Beräkna $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{F} = (x^2+e^{x+y}, x^2+e^{x+y})$

C = enhetscirkeln genom 1:a kvadranten från $(1,0)$ till $(0,1)$. Vi lägger till kurvorna γ_1 och γ_2 enl.



figuren med $D = \{(x,y) : x^2+y^2\le 1 \;\; x\ge 0, y\ge 0\}$

Då får vi använda Green (P,Q är C^1: hela $\mathbb{R}^2$, ∂D är styckvis C^1)

1) $\int_{\partial D} = \iint_D (Q'_x - P'_y)\, dxdy$

2) $\int_{\partial D} = \int_C + \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$

$\Rightarrow \int_C = \iint_D - \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} = \iint (2x + e^{x+y} - (e^{x+y}))\,dxdy -$

$\int_1^0 (0^2+e^{0+y})\,dy - \int_0^1 x^2+e^{x+0}\,dx$

14/2

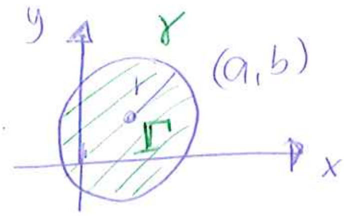
EX

9.10

Beräkna kurvintegralen

$\int_\gamma y^2 dx + x^2 dy$ moturs över kurvan

$\gamma : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$



[Greens formel]

$P(x,y) = y^2 \quad Q(x,y) = x^2$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$

$$\Rightarrow \oint_\gamma y^2 dx + x^2 dy = \iint_\Gamma 2x - 2y \, dxdy =$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x-a=t & x = t+a \\ y-b=s & y = s+b \end{array} \right\} = \iint_{B(0,r)} 2(t+a) - 2(s+b) \, dtds =$$

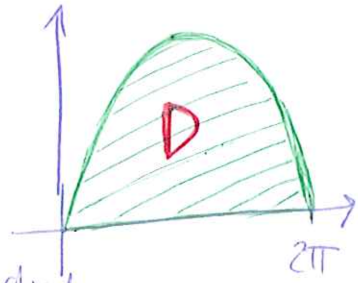
$$2 \underbrace{\iint_{B(0,r)} t - s \, dt ds}_{=0 \text{ pga symmetri}} + 2(a-b) \underbrace{\iint_{B(0,r)} dtds}_{\pi r^2} = 2\pi r^2 (a-b)$$

$\square$

9.24 Beräkna arean av området mellan x-axeln och cykloidbågen

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Lösning



Betrakta Greens formel!

$$\int_{\partial D} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

Om vi väljer P och Q så att $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ så får vi att HL = Arean (D)

Välj t.ex $Q = x$ $P = 1$

$$\Rightarrow \text{Area}(D) = \iint_D dx\,dy = \oint_{\partial D} 1 \cdot dx + x \cdot dy = \int_{\text{Cykloid}} dx + x\,dy + \int_{x\text{-axel}} dx + \cancel{x}\,dy$$

(i) $\displaystyle\int_{\text{Cykloid}} dx + x\,dy = \int_0^{2\pi} \left(\frac{dx}{dt} + x(t)\frac{dy}{dt} \right) dt =$

$$\int_0^{2\pi} 1 - \cos t + (t - \sin t)(\sin t)\,dt = \int_0^{2\pi} 1 - \cos t + t \sin t - \sin^2 t\,dt$$

$$= \underbrace{\Big[t - \sin t \Big]_0^{2\pi}}_{2\pi} + \int_0^{2\pi} t \sin t\,dt + \int_0^{2\pi} -\sin^2 t\,dt =$$

$$= 2\pi + \underbrace{\Big[-t \cos t \Big]_0^{2\pi}}_{-2\pi} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos t\,dt}_{=0} + \int_0^{2\pi} -\sin^2 t\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t - 1}{2}\,dt = \left[\frac{\sin 2t}{4} - \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = -\pi$$

ii)

$$\int_{x\text{-axel}} dx + x\,dy = \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi$$

Alltså ges arean av $-\pi + 2\pi = \boxed{\pi}$

MEN! Gick åt olika håll $\Rightarrow -\pi \Rightarrow \pi \Rightarrow \boxed{A = 3\pi}$ ☒

15/2

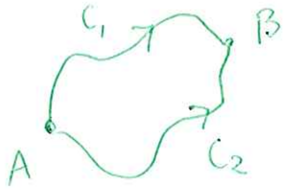
- $\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$
- $\mathbb{F}$ konservativt
- Potential
- $Q'_x = P'_y$

Sambandet mellan dessa ska undersökas!

Def

$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$ är oberoende av vägen i C betyder att integralen bara beror på var C startar och slutar och C ligger i Ω

Påstående: Detta är ekvivalent med att $\oint_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = 0$ för varje sluten kurva i Ω



$$\int_{C_1-C_2} = \int_{C_1} + \int_{-C_2} = \int_{C_1} - \int_{C_2}$$

Def

Ett fält $\mathbb{F}$ kallas konservativt i Ω om det finns en funktion U sådan att $\nabla U = \mathbb{F}$ i Ω

Def

U kallas en potential till $\mathbb{F}$ i Ω.

Sats 2

Om $\mathbb{F}$ är konservativt i Ω, C en kurva i Ω med startpunkt A och slutpunkt B så är $\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = U(B) - U(A)$

Bevis

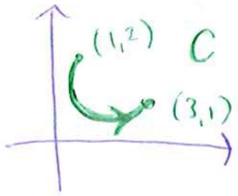
$$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_C \nabla U\cdot d\mathbb{r} = \int_\alpha^\beta \nabla U(\mathbb{r}(t))\cdot \mathbb{r}'(t)\,dt \overset{\text{kedjeregeln}}{=} \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}U(\mathbb{r}(t))\,dt$$

$\mathbb{r}(\alpha)=A$
$\mathbb{r}(\beta)=B$

$$= \Big[U(\mathbb{r}(t))\Big]_\alpha^\beta = U(\mathbb{r}(\beta)) - U(\mathbb{r}(\alpha)) = U(B)-U(A)$$

EX

Beräkna $\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$ om $\mathbb{F}=(2xy+3x^2y^2,\ x^2+2x^3y)$ och C är halvcirkelbågen i figuren:



Finns en potential U?

$$\nabla U = \mathbb{F} \Leftrightarrow \begin{cases} U'_x = 2xy+3x^2y^2 & ① \\ U'_y = x^2+2x^3y & ② \end{cases}$$

$U'_x = 2xy+3x^2y^2 \Rightarrow U = x^2y + x^3y^2 + g(y)$

$U'_y = x^2+2x^3y \Rightarrow x^2+2x^3y+g'(y) = x^2+2x^3y$

$g'(y)=0 \quad g(y)=C$, välj $C=0$

$U = x^2y+x^3y^2$

$$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = U(3,1)-U(1,2) = 36-6 = \underline{\underline{30}}$$

$\mathbb{f}, \mathbb{g}$ deriverbara
$(\mathbb{f}\cdot\mathbb{g})' = \mathbb{f}'\cdot\mathbb{g} + \mathbb{f}\cdot\mathbb{g}'$
$\frac{d}{dt}(\mathbb{r}'\cdot\mathbb{r}') = 2\mathbb{r}''\cdot\mathbb{r}'$

Varför ordet konservativt?

Vi definierar den potentiella energin som $W_p = -U$

$$U(B)-U(A) = \underline{\left(-W_p(B)+W_p(A)\right)} = \int_C \underset{\uparrow\, m\mathbb{r}''}{\mathbb{F}}\cdot d\mathbb{r} = \int_\alpha^\beta m\mathbb{r}''\cdot\mathbb{r}'\,dt =$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\big(\underbrace{\mathbb{r}'\cdot\mathbb{r}'}_{|\mathbb{r}'|^2}\big)dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}\Bigg(\underbrace{\frac{m|\mathbb{r}'|^2}{2}}_{W_k}\Bigg)dt = \underline{W_k(B)-W_k(A)}$$

$$\Rightarrow W_p(A)+W_k(A) = W_p(B)+W_k(B)$$

Uttrycker energi <u>konservering</u>

Vi reder ut sambanden mellan "konservativ" och "oberoende av väg."

Följande satser finns:

Sats 4 s.352 $\mathbb{F}$ C^1 och konservativt i $\Omega \Rightarrow Q'_x = P'_y$ i Ω

Sats 5 s.353 $Q'_x = P'_y$ i Ω enkelt sammanhängande $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$ oberoende av vägen i Ω.

Sats 3 s.349 $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$ är ober. av vägen i Ω, bågvis sammanh.

$\Rightarrow \mathbb{F}$ är konservativt i Ω.

Alltså, om Ω är enkelt sammanhängande och $\mathbb{F}$ är C^1 i Ω så är följande utsagor ekvivalenta:

- $\mathbb{F}$ konservativt i Ω
- $Q'_x = P'_y$ i Ω
- $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$ oberoende av vägen i Ω.

Bevis av satserna

- Sats 4: Vi har en potential U som är C^2 i Ω och $U'_x = P$ $U'_y = Q$. Då blir $U''_{xy} = P'_y$, $U''_{yx} = Q'_x$

Lika för C^2-funk! (Clairants sats)

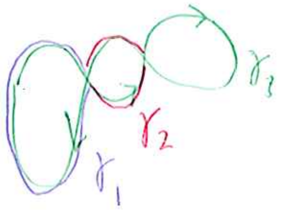
- Sats 5

Antag $Q'_x = P'_y$ i Ω, enkelt sammanhängande. Vi visar att $\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = 0$ om γ är enkel, sluten kurva i Ω, vilken γ omsluter D. Då använder vi Green:

$$\int_{\gamma = \partial D} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \pm \iint_D \underbrace{(Q'_x - P'_y)}_{=0}\, dx\,dy = 0$$

beroende på orienteringen av ∂D

Om γ skär sig själv i ändligt antal punkter kan man dela upp i ändligt många enkelt slutna delkurvor och få $\int_\gamma = 0$ ändå.



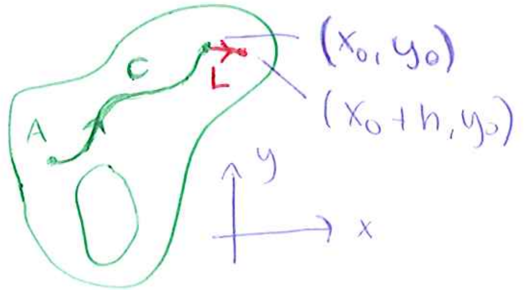
Vi lämnar mer komplicerade fall därhän!

• **Sats 3** Ω bågvis sammanh., $\int \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$ ober. av vägen i Ω

Vi påminner om att man kan visa att om Ω är <u>öppet</u> bågvis sammanh. kan varje par av punkter i Ω förbindas med en C^1-kurva.

Vi väljer en punkt $A \subset \Omega$ och definierar

$U(x,y) = \int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$ där C är en C^1-kurva som startar i A och slutar i (x,y).



Nu vill vi visa att $U'_x = P$ och väljer (x_0,y_0) och (x_0+h,y_0) och låter kurvans sista del vara parallell med x-axeln. (är ju oberoende av vägvalet)

$$\frac{U(x_0+h,y_0)-U(x_0,y_0)}{h} = \frac{1}{h}\Big(\underbrace{\int_{C+L}}_{\int_C+\int_L} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} - \int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}\Big) =$$

$$\frac{1}{h}\int_L \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} P(x,y_0)\,dx = \left\{\begin{array}{l} P \text{ kont.} \\ \text{M.V-sats} \\ \text{för enkelint.}\end{array}\right\}$$

$P\,dx + \underbrace{Q\,dy}_{=0}$

$$= \frac{1}{\cancel{h}} P(\bar{x},y_0)\cdot \cancel{h} \rightarrow P(x_0,y_0) \quad U'_x(x_0,y_0) = P(x_0,y_0)$$

då $h \to 0$

mellan x_0 och x_0+h

P.S.S visas $U'_y = Q$. Vi har $\nabla U = (P,Q)$

Beviset klart!

8.2 Ytor i $\mathbb{R}^3$

EX Y = enhetssfären

Y kan beskrivas genom vektorfunktionen

$\mathbf{r}(\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

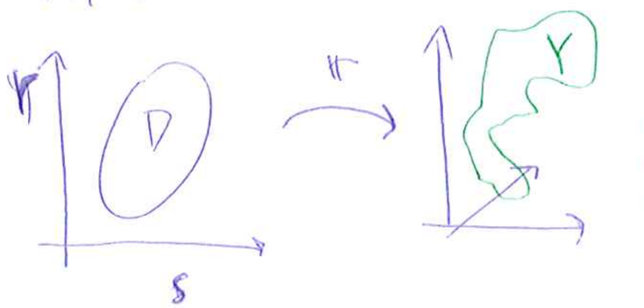
rymdpolära koord, m. $r=1$

$(\theta,\varphi) \in [0,\pi] \times [0,2\pi] = D$

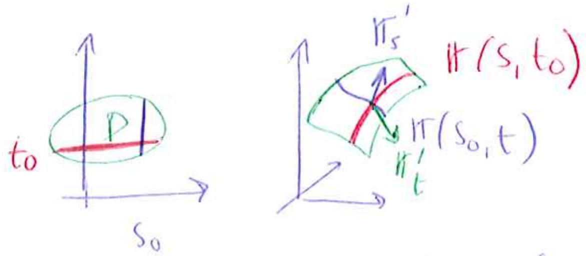
"nord till syd"

Allmänt: en yta Y parametriseras av $\mathbf{r}(s,t)$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$(s,t) \in D$.



Tangent och normalvektorer



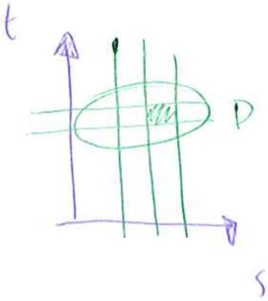
Tangentvektorerna till kurvorna ovan för $(s,t)=(s_0,t_0)$ är $\mathbf{r}_s'(s_0,t_0)$ och $\mathbf{r}_t'(s_0,t_0)$

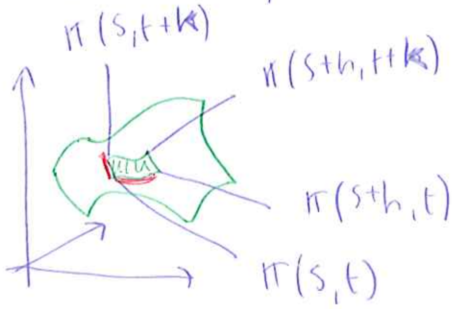
En normalvektor är $\mathbf{r}_s' \times \mathbf{r}_t'$

Parametriseringen $\mathbf{r}(s,t)$ ger ytan en bestämd orientering: Normalvektorn $\mathbf{r}_s' \times \mathbf{r}_t'$ är riktad åt en viss sida av Y.

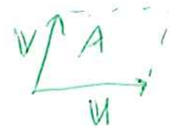
(Om (s,t) byter plats skiftar orienteringen)

15/2 Parametriserad yta Y $\mathbf{r}(s,t)$; $(s,t) \in D$





$A = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$



$\mathbf{r}(s+h,t) - \mathbf{r}(s,t) \approx \mathbf{r}_s'(s,t)h$

$\mathbf{r}(s,t+h) - \mathbf{r}(s,t) \approx \mathbf{r}_t'(s,t)k$

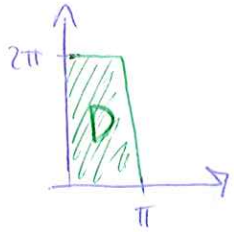
Areaelementet dS approximeras av en parallellogram som spänns upp av vekturerna $\mathbf{r}_s' h$ och $\mathbf{r}_t' k$

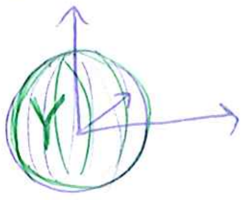
$dS \approx |\mathbf{r}_s' h \times \mathbf{r}_t' k| = |\mathbf{r}_s' \times \mathbf{r}_t'| \underset{dsdt}{hk}$

Bilda summa, förfina och gå i gräns. Då får vi:

$$\boxed{\iint_D |\mathbf{r}_s' \times \mathbf{r}_t'| \, ds dt = \text{arean av } Y}$$

Vi testar på enhetssfären





$\mathbf{r}(\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

$\mathbf{r}_\theta' = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)$

$\mathbf{r}_\varphi' = (-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0)$

$\mathbf{r}_\theta' \times \mathbf{r}_\varphi' = \sin\theta(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) = \sin\theta \, \mathbf{r}(\theta,\varphi)$

(normalvektor riktad utåt)

Arean av Y är $\iint_D \underbrace{|\sin\theta \cdot \mathbf{r}(\theta,\varphi)|}_{\substack{\sin\theta \cdot 1 \\ \geq 0}} d\theta d\varphi = \iint_D \sin\theta \, d\theta d\varphi$

$= \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\varphi = \underline{4\pi}$

EX Ytan är en funktionsgraf:

$z = f(x,y) \quad (x,y) \in D$

Sätt $\pi(x,y) = (x, y, f(x,y))$

$\pi'_x = (1, 0, f'_x)$

$\pi'_y = (0, 1, f'_y)$

$\pi'_x \times \pi'_y = (-f'_x, -f'_y, 1) \quad |\pi'_x + \pi'_y| = \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}$

Arean $= \iint_D \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}\, dx\,dy$

f en funktion av 3 variabler

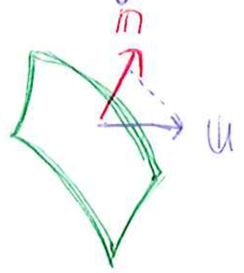
Def Ytintegralen av f över Y är

$$\iint_Y f\, dS = \iint_D f(\pi(s,t))\, |\pi'_s \times \pi'_t|\, ds\,dt$$

Normalytintegral

C^1-yta $\pi(s,t)$ Fält $u(x)$

$|n| = 1 \quad u_N = (\underbrace{u \cdot N}_{\text{skalära ortogonala projektionen av } u \text{ på } N})\, N$



$$\iint_Y u \cdot N\, dS = \iint u \cdot \frac{(\pi'_s \times \pi'_t)}{\cancel{|\pi'_s \times \pi'_t|}}\, \cancel{|\pi'_s \times \pi'_t|}\, \underbrace{ds\,dt}_{dS}$$

$$= \iint u(\pi(s,t)) \cdot (\pi'_s \times \pi'_t)\, ds\,dt$$

Denna s.k. normalytintegral uttrycker flödet av u genom ytan S i den riktning som normalen anger.

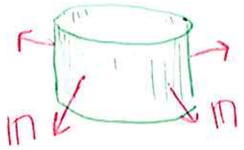
Ex. u vätskeflödes hastighetsvektor

$\iint_Y u \cdot N\, dS$ blir flödet (m^3/s)

EX Beräkna $\iint_Y \mathbb{u} \cdot \mathbb{N}\, dS = I$

då $\mathbb{u} = (x, y, z)$ och Y ges av

$\mathbb{r}(s,t) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, t) \quad (s,t) \in D = [0,1] \times [0,1]$



$\mathbb{r}'_s = (-2\pi \sin 2\pi s, 2\pi \cos 2\pi s, 0)$

$\mathbb{r}'_t = (0, 0, 1)$

$\mathbb{r}'_s \times \mathbb{r}'_t = (2\pi \cos 2\pi s, 2\pi \sin 2\pi s, 0) = 2\pi(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0)$

$I = \iint_D ((\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, t) \cdot 2\pi(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0)\, ds\, dt$

$= 2\pi \int_D \cos^2 2\pi s + \sin^2 2\pi s + 0\, ds\,dt = 2\pi \int_D ds\,dt = \underline{2\pi}$

Kurvintegral, potential m.m.

Fältet $\mathbb{F} = -\left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

Rep: $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = 2\pi$ om C = enhetscirkeln 1 varv moturs.

I själva verket blir $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = 2\pi$ för varje cirkel med medelp. i $(0,0)$ ett varv medurs. (Greens formel fungerar ej eftersom D ej definierad i origo)

Beräkna $\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$ då γ — som förut — är en enkel sluten kurva som omsluter origo. Positiv orientering i förh. till området innanför.

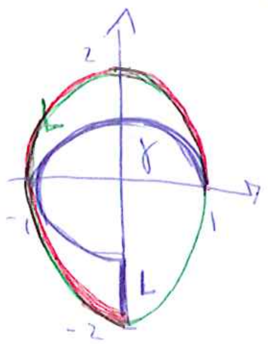
Låt D vara området mellan γ och C.

Då är $\partial D = \gamma - C$ med positiv orientering

Nu fritt fram för Mr Green

$$\int_{\partial D} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \begin{cases} \iint Q'_x - P'_y \, dx\,dy = 0 \\ \int_{\gamma - C} = \int_{\gamma} + \int_{-C} = \int_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\int_{\gamma} = \int_{C} = 2\pi}$$

EX



Ellips $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

$C = (1,0)$ till $(0,-2)$

$$\mathbb{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

Vi vet redan att $Q'_x = P'_y$ (utom i $(0,0)$ odef)

Beräkna $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}$

enhetscirkeln moturs från $(1,0)$ till $(0,-1)$

Vi kan byta kurva från C till $\gamma + L$

Därför att $\int_C + \int_{-L-\gamma} = \iint_D 0 \, dx\,dy = 0$

y-axeln $(0,-1)$ till $(0,-2)$

D - mellan C och $L + \gamma$

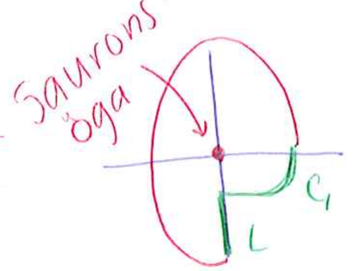
$$\Rightarrow \int_C = \int_{L+\gamma}$$

$$\int_L = \int_{-1}^{-2} (P \cdot d0 + Q \cdot dy)\, dy = 0$$

$$\int_C = \int_C \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = \int_0^{3\pi/2} \underbrace{-\sin t(-\sin t) + \cos t \cdot \cos t}_{=1} \, dt \, d\theta$$

$$= \frac{3\pi}{2}$$

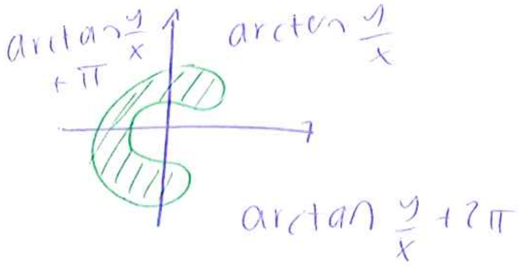
OBS! Om vi byter till $C_1 + L$ får vi $\int_{L+C_1} = -\frac{\pi}{2}$



ej samma som $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$.

C och $C_1 + L$ omsluter ju origo där $\mathbb{F}$ ej är definierad!

$\mathbb{F}$ har lokalt en potential:



$$U = \arctan \frac{y}{x} + C$$

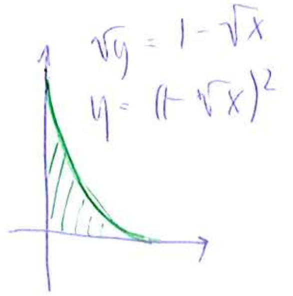
$$U'_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2} = P$$

$$U'_y = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(\frac{1 \cdot x}{x \cdot x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} = Q$$

Genomgång av duggan

1) Tänk på att riktningsderivatan är en skalär, ej en vektor!

2) $\iint_D \sqrt{xy}\, dxdy$ $\quad \sqrt{x} + \sqrt{y} \le 1 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$



$$I = \int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}\, dy = \frac{1}{45}$$

variabelbyte funkar också!

$$= \int_0^1 \sqrt{x} \left[\frac{2}{3} y^{3/2}\right]_0^{(1-\sqrt{x})^2} dx = \int_0^1 \frac{2}{3}\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})^3\, dx = \frac{2}{3}\int_0^1 x^{1/2} - 3x + 3x^{3/2} - x^2\, dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{3x^2}{2} + \frac{6}{5}x^{5/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + \frac{6}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{45}$$

16|2

3 a) f C^3-fkn med $\nabla f = 0$ i (a,b)

Alla $f'' > 0$ i (a,b) lok min?

Falskt! Ex $h^2 + 4hk + k^2 = (h+2k)^2 - 3k^2$

b) $f''_{yy} = 0$ resten > 0. Sadelp?

$h^2 + 2Bhk = (h + Bk)^2 - B^2h^2$ indef.

Sant! $\neq 0$

c) f'_v kont i a. i alla riktn. v ($|v| = 1$)

$\Rightarrow$ f diff-bar i a?

d) $x^5 - x^2y - y^3 = 1$

def lokalt y som fkn av x i varje pkt

på kurvan?

Implicita funk-satsen: $f'_y(a,b) \neq 0 \Rightarrow$ y

en fkn av x kring (a,b)

$F'_y = -x^2 - 3y^2 \leq 0$ med likhet $\Leftrightarrow x = y = 0$,

ej på kurvan!

Rep

- Konservativa fält.

  Flera sätt att hantera $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

  1) Beräkna via param. av C
  2) Byt till "bättre" kurva
  3) Potential $\int = U(B) - U(A)$

- Ytor $\mathbf{r}(s,t)$ C^1 $\quad (s,t) \in D$

  Normal $\mathbf{r}_s' \times \mathbf{r}_t'$ $\quad \mathbf{N} = \dfrac{\mathbf{r}_s' \times \mathbf{r}_t'}{|\mathbf{r}_s' \times \mathbf{r}_t'|}$

  Area $\iint_D \underbrace{|\mathbf{r}_s' \times \mathbf{r}_t'| \, ds\,dt}_{dS}$

  Ytintegral av $f(x,y,z)$: $\iint_Y f \, dS =$

  $\iint_D f(\mathbf{r}(s,t)) |\mathbf{r}_s' \times \mathbf{r}_t'| \, ds\,dt$

  Speciell: $f = \mathbf{u} \cdot \mathbf{N}$ $\quad \iint \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint \mathbf{u} \cdot (\mathbf{r}_s' \times \mathbf{r}_t') \, ds\,dt$

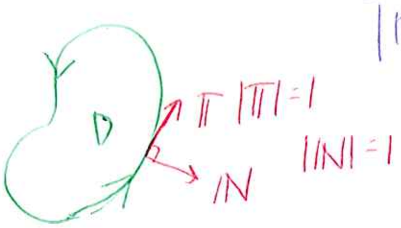
  Specialfall: $z = f(x,y)$ $\quad Y \quad (x,y) \in D \quad D$

  $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$

  $\mathbf{r}_x' \times \mathbf{r}_y' = (-f_x', -f_y', 1)$

GAUSS SATS (Divergenssatsen)

1) I planet $\quad \mathbb{T} = \frac{\mathbb{r}'(t)}{|\mathbb{r}'(t)|} = \frac{x'(t), y'(t)}{|\mathbb{r}'(t)|}$



$$\mathbb{N} = \frac{y'(t), -x'(t)}{|\mathbb{r}'(t)|}$$

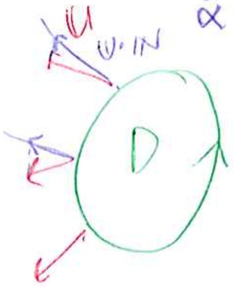
Med tangentiell proj $\int_{\partial D} \mathbb{F}\cdot\mathbb{T}\,ds = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy =$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} (Px' + Qy')\,dt \overset{\text{Green}}{=} \iint_D Q'_x - P'_y\,dx\,dy$$

Med normal proj: $\int_{\partial D} \mathbb{U}\cdot\mathbb{N} = \int (u_1, u_2)\cdot\frac{(y', -x')}{|\mathbb{r}'|}\underbrace{ds}_{|\mathbb{r}'|dt}$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} (u_1 y' - u_2 x')\,dt = \int_{\partial D} -u_2\,dx + u_1\,dy = \iint \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)dx\,dy$$

Gauss sats



2) Gauss sats i rummet

$$\boxed{\iint_{\partial K} \mathbb{U}\cdot\mathbb{N}\,dS} = \iiint_K \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz =$$

$$\boxed{\iiint_K \underbrace{\operatorname{div}\mathbb{U}}_{\text{även } \nabla\cdot\mathbb{U}}\,dx\,dy\,dz}$$ — divergensen av $\mathbb{U}$

$$\nabla\cdot\mathbb{U} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(u_1, u_2, u_3)$$

Villkor

$u \in C^1(\Omega)$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ öppen

K kompakt $\subset \Omega$

∂K styckvis C^1 eller ändl. union av sådana

Normalen är riktad ut från K

EX $u = (4x+y, 0, 2x+5z)$

K enhetssfären ∂K med normal utåt.

$$\iint_{\partial K} u \cdot N \, dS \underset{\text{Gauss}}{=} \iiint_K \nabla \cdot u \, dxdydz = \iiint_K (4+0+5) \, dxdydz$$

$$= 9 \cdot \operatorname{vol}(K) = \underline{12\pi}$$

Beviset genomförs för områden K som kan delas upp i ändligt många "enkla" områden i x- y- ~~resp~~ resp z-led.

Vi tittar bara på fallet då mängden K_i är enkel i z-led:

$$K_1 = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$$

VL: $\displaystyle\iint_{\partial K_i} (0,0,u_3) \cdot N \, dS =$

$$\iint_{Y_1} (0,0,u_3) \cdot N \, dS + \iint_{Y_2} (0,0,u_3) \cdot N \, dS + \underbrace{\iint_{Y_3} (0,0,u_3) \cdot N \, dS}_{0}, \quad N = (a,b,0)$$

$$= \iint_D (0,0,u_3) \cdot (-\psi'_x, -\psi'_y, 1) \, dxdy + \iint_D (0,0,u_3) \cdot (+\varphi'_x, +\varphi'_y, -1) \, dxdy$$

$$= \iint_D u_3(x,y,\psi(x,y)) \, dxdy - \iint_D u_3(x,y,\varphi(x,y)) \, dxdy$$

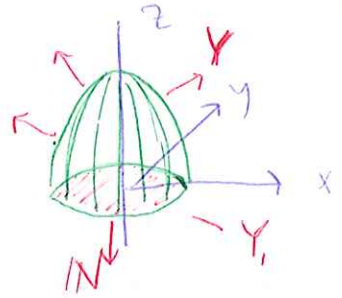
$$HL = \iiint_{K_1} \underbrace{\nabla \cdot (0,0,u_3)}_{\frac{\partial u_3}{\partial z}} \, dx\,dy\,dz = \iint dx\,dy \underbrace{\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial u_3}{\partial z}\, dz}_{\left[u_3\right]_{\varphi}^{\psi}} =$$

$$= \iint_D u_3(x,y,\psi(x,y)) - u_3(x,y,\varphi(x,y))\, dx\,dy = \underline{\underline{VL}}$$

EX (Tentauppg. 2012-01-11)

$\mathbf{u} = (xz^2 - yz,\ x^2 - z^2,\ y^2 + z^3)$

$Y = \{(x,y,z) : z = 1 - x^2 - y^2 \quad x^2+y^2 \le 1\}$ Normal uppåt, positiv z-komp.



Låt $K = \{(x,y,z) \quad 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2 \quad \underbrace{x^2+y^2 \le 1}_{D}\}$

Normal utåt.

Då är $\iint_Y + \iint_{Y_1} = \iint_{\partial K} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N}\, dS \underset{\text{Gauss}}{=}$

$$= \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{u}\, dx\,dy\,dz = \iiint \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(xz^2 - yz)}_{= z^2} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - z^2)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}(y^2 + z^3)}_{= 3z^2} \, dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_K 4z^2\, dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_0^{1-x^2-y^2} 4z^2\, dz =$$

$$\iint \frac{4}{3}(1 - x^2 - y^2)^3\, dx\,dy = \left\{ \begin{matrix} \text{pol.} \\ \text{koord} \end{matrix} \right\} = \dots = \frac{\pi}{3}$$

N pekar nedåt

$$\iint_{Y_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint_D (x \cdot 0^2 - y \cdot 0,\ x^2 - 0^2,\ y^2 + 0^3) \cdot (0,0,-1)\, dx\,dy$$

$z = 0$

$\mathbf{N} = \mathbf{r}_s' \times \mathbf{r}_t' = (0,0,1)$

$$= \iint_D -y^2\, dx\,dy = \dots = -\frac{\pi}{4}$$

2012
LV6

En annan vidareutveckling av Green till $\mathbb{R}^3$ är

Stoke sats.

Vi utgår från tangentprojektion av $\mathbf{u}$.

$$\int_{\partial D} \mathbf{u}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_D \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) dx\,dy$$

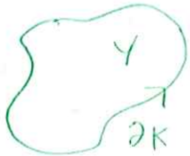
$u_1 dx + u_2 dy$

Om vi är i $\mathbb{R}^3$ med D i (x,y)-planet

$$= \iint_D \Big(\overbrace{\ldots\ldots,\ \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}}^{f}\Big)(0,0,1)\,dx\,dy = \text{ett flöde av } f$$

genom D uppåt ↗

Vår nya sats (Stokes) ska uttrycka $\displaystyle\int_{\partial Y} \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r}$
som en ytintegral över Y



generellt ej plan yta.

Förberedelser för Stokes

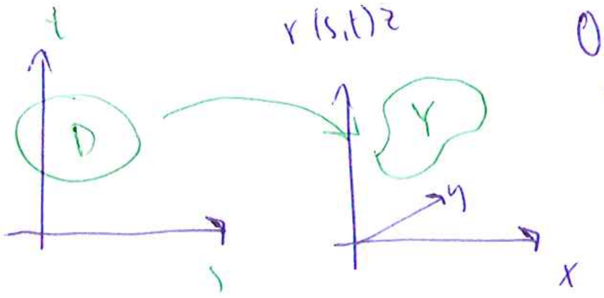
1) Kurvintegral över kurva i $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad \alpha \le t \le \beta$$

$$\int_C \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r} = \int_\alpha^\beta \mathbf{u}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$ (exakt som förut men med 3 vektorer)

2) Orienterad yta Y med tillhörande orientering av ∂Y.

$Y: (s,t) \to r(s,t)$ $\quad \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t$ normalvektor - ger en orientering av ytan



Om ∂D är positivt orienterad så ger parametriseringen en orientering av bilden ∂Y av ∂D, som är den naturliga orienteringen av ∂Y

Detta innebär att $\mathbb{N} \times \mathbb{T}$ är riktad in mot Y.

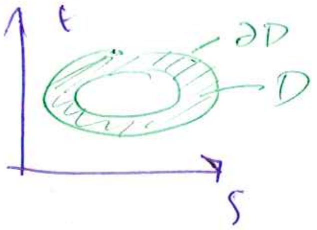
enhetsnormal till Y

$\dfrac{\mathbb{r}'_s \times \mathbb{r}'_t}{|\mathbb{r}'_s \times \mathbb{r}'_t|}$

enhetstangent till ∂Y (dess genomloppsriktn.)

$\dfrac{\mathbb{r}'}{|\mathbb{r}'|}$

Gå runt ∂Y med $\mathbb{N}$ uppåt (huvudetsriktning), då ligger Y till vänster



3) Orienterbar yta Y: ytan kan ges av en normalvektor som varierar kontinuerligt över hela Y

4) Rotation av $\mathbb{u}$.

Def rot $\mathbb{u} = \nabla \times \mathbb{u} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \left(\dfrac{\partial u_3}{\partial y} - \dfrac{\partial u_2}{\partial z}, \dfrac{\partial u_1}{\partial z} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x}, \dfrac{\partial u_2}{\partial x} - \dfrac{\partial u_1}{\partial y} \right)$

[Möbiusbandet $\mathbb{r}(s,t) = ((1 + t\cos\frac{s}{2})\cos s, (1+t\cos\frac{s}{2})\sin s, t\sin\frac{t}{2})$
$0 \le s \le 2\pi$, $-\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}$]

EX

$\mathbb{u} = (-y, x, z)$ rot $\mathbb{u} = (0,0,2) = 2e_z$

rot $\mathbb{u}$ = curl $\mathbb{u}$

EX $\mathbb{u} = (x,y,z)$ rot $\mathbb{u} = (0,0,0) \Rightarrow \mathbb{u}$ är virvelfritt

rot $\mathbb{u} = 0$

Stokes sats

$\mathbb{u} \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ öppen. Y en yta i Ω som är C^1 och orienterad (orienterbar)

Med tillhörande orientering* av ∂Y gäller

$$\boxed{\int_{\partial Y} \mathbb{u} \cdot d\mathbb{r} = \iint_Y (\text{rot } \mathbb{u}) \cdot \mathbb{N} \, dS}$$

* dvs enligt tidigare beskriven regel

Vad är rot u?

Tolkas analogt med div u genom integralmedelvärdes-satsen:

$$\frac{1}{\pi\varepsilon^2} \iint (\text{rot } \mathbb{u}) \cdot \mathbb{N} \, dS = (\text{rot } \mathbb{u} \cdot \mathbb{N})\, x_\varepsilon = \underbrace{\int_{\partial Y_\varepsilon} \mathbb{u} \cdot \mathbb{N} \, d\mathbb{r}}_{\text{cirkulationen av } \mathbb{u}} \cdot \frac{1}{\pi\varepsilon^2}$$

kontinuerlig   m.v-sats

∂Y_ε, Y_ε

$\varepsilon \to 0$ $\quad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{\partial Y_\varepsilon} \mathbb{u} \cdot \mathbb{N} \, d\mathbb{r} = \boxed{\text{rot } \mathbb{u} \cdot \mathbb{N}}$

i medelp. av Y_ε

maximal om $\mathbb{N}$ har samma riktning som rot $\mathbb{u}$, då $= |\text{rot } \mathbb{u}|$

rot $\mathbb{u}$ mäter virveltendensen hos $\mathbb{u}$ (storlek & riktning)

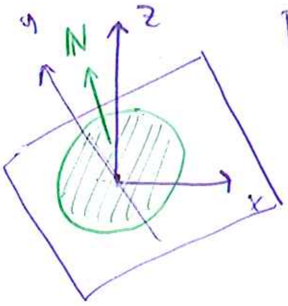
EX $\mathbb{u} = (y, 2x - z, 3\cancel{y}x + 2y)$

C = cirkel i planet $z = x$ med centrum i $(0,0)$, radie 1.

C genomlöps så att x-koordinaten avtar vid passagen av punkten $(0,1,0)$

Beräkna $\int_C \mathbb{u} \cdot d\mathbb{r}$

Ta Y = cirkelskivan med $\mathbb{N}$ som har positiv z-koordinat.



Planets ekvation $z = x \to -1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 0$

$$\mathbb{N} = (-1, 0, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(= \frac{\mathbb{r}'_x \times \mathbb{r}'_y}{|\mathbb{r}'_x \times \mathbb{r}'_y|} \quad \mathbb{r}(x,y,x) \; z = x \right)$$

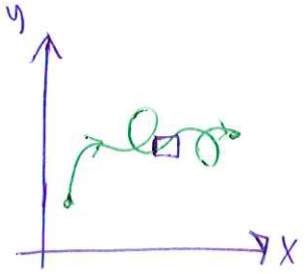
$$\text{rot}(y, 2x - z, 3x + 2y) = (3, -3, 1)$$

Stokes

$$\int_{\partial Y} \mathbb{u} \cdot d\mathbb{r} = \iint_Y \underbrace{(3,-3,1)}_{\text{rot } \mathbb{u}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)}_{\mathbb{N}} \, dS = -\sqrt{2} \iint_Y dS = -\sqrt{2} \, \underbrace{\text{area}(Y)}_{\pi \cdot 1^2} = \boxed{-\sqrt{2}\,\pi}$$

- Varför är kraftfält bra? // Hur funkar det?

Låt $\mathbb{F}(x,y)$ vara ett kraftfält i två dimensioner, och antag att vi vill flytta partikel i detta kraftfält längs kurva γ

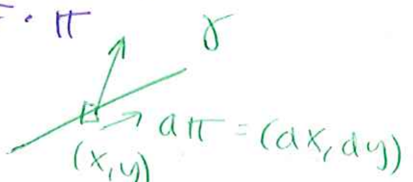


$\mathbb{F}(x,y)$ Vad blir totala arbetet?

Vid rätlinjig rörelse gäller att

$W = \mathbb{F}\cdot \mathbb{r}$

Zooma in vid $\boxed{}$:



lokalt ↓

Arbetet uträttat under "sträckan" $d\mathbb{r}$ ges av $dW = \mathbb{F}(x,y)\cdot d\mathbb{r}$, ty $\mathbb{F} \approx$ konstant hela vägen.

Totala arbetet ges då av

$$W = \sum_{\gamma} \mathbb{F}(x,y)\cdot d\mathbb{r} \longrightarrow \boxed{\int_{\gamma} \mathbb{F}(x,y)\cdot d\mathbb{r}}$$

Om $\mathbb{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) \Rightarrow \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$

"Nabla-räkning / kalkyl"

$$\underset{\text{nabla}}{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Jämför Taylors formel:
$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}(h\cdot\nabla)^n f(a) + R_n(h)$$

- $\operatorname{div} u = \nabla\cdot u = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(u_1, u_2, u_3) = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}$
- $\operatorname{rot} u = \nabla\times u$

$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \nabla\times(\nabla u)$ Funkar inte alltid. Aschtung!

EX rot(grad u) = $\nabla \times (\nabla u)$

$$= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right)$$

är de kontinuerliga så är de lika!

$= 0$ om $M \in C^2$

EX div (rot u) = $\nabla \cdot (\nabla \times u)$ =

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) =$$

$$\cancel{\frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 u_3}{\partial y \partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 u_2}{\partial z \partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial y}} = 0$$

om $u \in C^2$

Lite om konservativa fält, oberoende av väg och virvelfrihet i $\mathbb{R}^3$.

Def $\mathbb{F}$ kallas konservativt i Ω (öppen $\subseteq \mathbb{R}^3$) om det finns U så att $\nabla U = \mathbb{F}$

Då har vi $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_C \nabla U \cdot d\mathbb{r} = U(B) - U(A)$

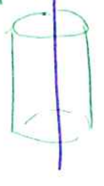
Enkelt sammanhängande mängd Ω: Ω bågvis sammanhängande och varje enkel sluten kurva kan kontinuerligt ~~skra~~ deformeras inom Ω till en punkt.

EX

$\Omega = \{(x,y,z): 1 < x^2+y^2+z^2 < 4\}$

enkelt sammanhängande

EX



$\Omega = \{(x,y,z): x^2+y^2 > 0\}$ hela $\mathbb{R}^3$ utom z-axeln

$= \left\{ \begin{matrix} x^2+y^2 > 0 \\ x^2+y^2 < 1 \end{matrix} \right\}$

de som omsluter z-axeln kan inte deformeras till en punkt i Ω ej enkelt sammanhängande
Om γ omsluter z-axeln kan den ej definieras kontinuerligt till en punkt i Ω

Satser

$\mathbb{F} \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ öppen

- $\mathbb{U}$ konservativt i $\Omega \rightarrow \operatorname{rot} \mathbb{F} = 0$ i Ω (virvelfritt)
- $\operatorname{rot} \mathbb{F} = \mathbb{O}$ i Ω, Ω enkelt sammanhängande $\longrightarrow$ $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$ är oberoende av vägen i Ω.
- $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$ är oberoende av vägen i Ω, bågvis sammanhängande $\longrightarrow$ $\mathbb{F}$ konservativt i Ω.

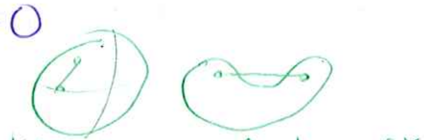
Alltså: om Ω är enkelt sammanhängande har vi ekvivalens mellan
1) $\mathbb{F}$ konservativ
2) $\operatorname{rot} \mathbb{F} = 0$
3) $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$ oberoende av vägen.

Orientering om vektorpotential mm.

Om $\nabla \times \mathbb{A} = \mathbb{F}$ i Ω så kallas $\mathbb{A}$ en vektorpotential för $\mathbb{F}$. Vi har sett att $\nabla(\nabla \times \mathbb{A}) = 0$

Sats

Om Ω är konvex så gäller:



$\operatorname{div} \mathbb{F} = 0$ i $\Omega \rightarrow \exists$ vektorpot i $\mathbb{A}$ (dvs m. $\operatorname{rot} \mathbb{A} = \mathbb{F}$) i Ω.

Helmotz sats

Under lämpliga villkor kan ett fält skrivas

$\mathbb{F} = \nabla U + \text{rot } \mathbb{A}$

skalär potential

vektorpotential

Om U är potential till $\mathbb{F}$ (i $\mathbb{R}^2$, t.ex) så är ju $\nabla U = \mathbb{F}$ och differentialen av U är $dU = U'_x\,dx + U'_y\,dy = P\,dx + Q\,dy$ som då kallas exakt differential.

En differentialekvation skrivs ibland $P\,dx + Q\,dy = 0$.

Om denna diff-ekv är exakt, dvs om $\exists U: \nabla U = (P, Q)$ så är

$P\,dx + Q\,dy = 0 \Leftrightarrow dU = 0 \Leftrightarrow U = \text{konstant}$ $\boxed{\text{exakt diffekv}}$

$\boxed{\text{EX}}$ $\underbrace{(3x^2 + 2xy - y^2)}_{P}dx + \underbrace{(x^2 - 2xy - 3y^2)}_{Q}dy = 0$

Kontrollera $Q'_x = 2x - 2y$, $P'_y = 2x - 2y$ lika $\rightarrow \exists U$ med $\nabla U = (P, Q)$

$U'_x = P \longrightarrow U = x^3 + x^2y - xy^2 + f(y)$

$U'_y = Q \longrightarrow x^2 - 2xy + f'(y) = x^2 - 2xy - 3y^2$

välj $f(y) = -y^3$

$U = x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$

Lösningen ges av ekvationen: $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 = 0$

Kapitel 4: Optimering

I) Kompakta mängder (enl. sats fr. kap 1) har varje kont. funktion både max och min)

II Allmännare mängder (vanlig teknik: "kompakt avskärning")

III Att söka max/min av f på en mängd M under bivillkoret $g=0$.

$$\max_M f = \max\{f(x) : x \in M\}$$

I <u>Kompakta mängder</u>

f kontinuerlig, M kompakt.

$\overset{\text{sats}}{\Rightarrow} \max_M f$ och $\min_M f$ finns.

Antag a är en av dessa (max eller min)

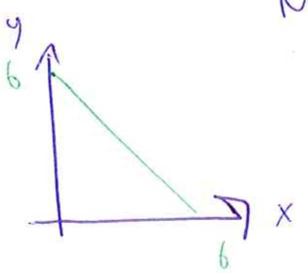
1) f saknar partiella derivator i a. ← ovanlig

2) a är en inre pkt i M där f har partiella derivator. Då är $f'_x(a) = f'_y(a) = 0$.

3) a är en randpunkt, randen ∂M undersöks separat (max/min kan ju finnas på kanten där man skurit av)

$\boxed{\text{EX}}$ $f(x,y) = x^2y(4-x-y)$ $M = \{(x,y) : x \geq 0\ y \geq 0\ x+y \leq 6\}$

Sök $\max_M f$ och $\min_M f$



<u>Viktigt!</u> f kont. M kompakt → $\max_M f$ o $\min_M f$ finns.

f diffbar två fall:

1) Stat pkt i det inre.

2) Randpunkter

1) $f = 4x^2y - x^3y - x^2y^2$

$$\begin{cases} f'_x = 8xy - 3x^2y - 2xy^2 = 0 \\ f'_y = 4x^2 - \cancel{x^3} - 2x^2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

stat. punkt ligger i M

$\boxed{f(2,1) = 4}$ – störst

($x \neq 0$ $y \neq 0$ i det inre av M)

2) ∂M 3 delar:

$x = 0$ $f(0,y) = 0$

$y = 0$ $f(x,0) = 0$

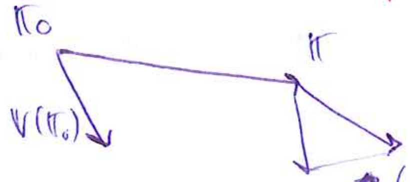
$x + y = 6$ $f(x, 6-x) = 2x^3 - 12x^2 = u(x)$

$u'(x) = 6x^2 - 24x = 6x(x-4)$ $x = 4$ intressant!

$\boxed{f(4,2) = -64}$ — minst.

$\Rightarrow$ $\max_M f = f(2,1) = 4$ $\min_M f = f(4,2) = -64$

Hubbles lag (för det expanderande universum)



$(\mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}$

Hubble: $\Delta \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e} = H|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$

Beräkna $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r})$!

$$(\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_0)) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = H|(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)|$$

$$(\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_0)) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = H|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2$$

m.v. egenskapen för trippelint.

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(B_\varepsilon(\mathbf{r}_0))} \iiint_{B_\varepsilon(\mathbf{r}_0)} \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx\,dy\,dz$$

$B_\varepsilon(\mathbf{r}_0) = \{\mathbf{r} : |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \varepsilon\}$

Boll m. radie

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{4\pi\varepsilon^2} \iiint_{B_\varepsilon(\mathbf{r}_0)} \operatorname{div}(\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_0))\,dx\,dy\,dz$$

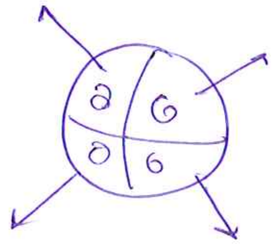
Gauss sats

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{4\pi\varepsilon^2} \iint_{S_\varepsilon(\mathbf{r}_0)} \underbrace{(\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_0)) \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}_{H\underbrace{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}_{\varepsilon}} \, dS =$$

enl. Hubble

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{4\pi\varepsilon^2} H\varepsilon \cdot \underbrace{\text{arean}(S_\varepsilon(\mathbf{r}_0))}_{4\pi\varepsilon^2} = \boxed{3H}$$

"Hubble bubble" är en 2-dim. analogi.



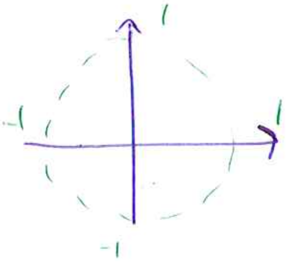
Här är $\mathbf{v} = H\mathbf{r}$ $\quad \mathbf{r}$ = sfärens koord.

$\mathbf{v}$ = expansionshastighet hos sfären.

$= H(x,y,z) \rightarrow$ div $\mathbf{v} = 3H$.

II Optimering på icke-kompakta mängder

Ex $f(x,y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$ $\quad M = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$



På $x^2+y^2 = r^2$ är $f = \frac{1}{1-r^2} \to \infty$ då $r \to 1$

Största värde saknas

$\frac{1}{1-r^2} \geq \frac{1}{1}$ dvs $\min_M f(0,0) = 1$

Ex Finns största o minsta värden av $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x-y}$ i 1:a kvadranten $(= M)$? $M : \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$

Eftersom $f(x,y) \geq 0$ i hela M, och $f(0,0) = 0$ så är $\min_M f = 0$.

återstår att söka ev max

Vi börjar med att leta stat. pkter i det inre

$f'_x = 2xe^{-x-y} - (x^2+y)e^{-x-y} = (2x - \cancel{x^2} y)e^{-x-y} = 0$

$f'_y = e^{-x-y} - (x^2+y)e^{-x-y} = (1-x^2-y)e^{-x-y} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y = -2x \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$ $\boxed{f(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = e^{-5/4}}$

Vi undersöker randen:

1) y-axeln: $f(0,y) = ye^{-y} = u(y)$

$u'(y) = e^{-y} - ye^{-y} = (1-y)e^{-y}$

$y=1$ intressant

$\boxed{f(0,1) = e^{-1} \text{ störst på y-axeln}}$

2) x-axeln $f(x,0) = x^2e^{-x} = v(x)$

$v'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$ $x=2$

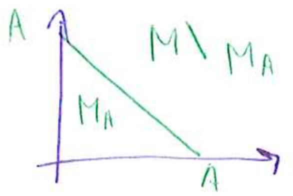
$\boxed{f(2,0) = 4e^{-2}}$ störst på x-axeln

3) Origo $f(0,0) = \min$

Betrakta $M_A = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0 \ x+y \leq A\}$ som är kompakt. Här har den kontinuerliga funktionen f ett största värde. Vi undersöker speciellt den del av randen som tillkommit: $x+y=A$

$f(x, A-x) = (x^2-x+A)e^{-A}$ har sitt största värde i en av ändpunkterna $(A,0)$ eller $(0,A)$

Välj $A > 2$ $f = A^2e^{-A} > f = Ae^{-A}$



Vi ser att $f < f(2,0)$ i $M \setminus M_A$

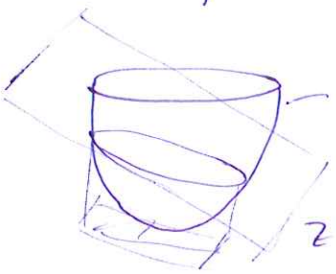
Störst värde i en av de hittade punkterna

$f(0,1) = e^{-1}$ $f(2,0) = 4e^{-2}$ $f(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = e^{-5/4}$

$\max_M f = f(2,0) = 4e^{-2}$ $\min_M f = f(0,0) = 0$

EX 10.56

γ = skärningskurvan mellan ytan $z = x^2+y^2$ och planet $z = 1+2x$.
Beräkna det arbete kraftfältet $\mathbb{F} = (0, x, -y)$ uträttar då γ genomlöps ett varv i positiv led kring z-axeln.



$\left.\begin{matrix} z = x^2+y^2 \\ z = 2x+1 \end{matrix}\right\}$ skärningskurva $\begin{cases} x^2+y^2 = 2x+1 \\ z = 2x+1 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} (x-1)^2+y^2 = 2 \; * \\ z = 2x+1 \end{cases}$ skärningen ges av båda ekvationerna!

Vi förbereder för Stokes sats:

$$\text{rot } \mathbb{F} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & x & -y \end{vmatrix} = (-1, 0, 1)$$

Den plana ytan Y vars rand är γ har parameterframställningen $\mathbb{r} = (x, y, 1+2x)$ z

$\mathbb{r}'_x \times \mathbb{r}'_y = (\underbrace{-2}_{-z'_x}, 0, \underbrace{1}_{-z'_y})$ ← Rätt håll

Stokes:

$$\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \iint_D (-1,0,1)\cdot(-2,0,1)\,dxdy =$$

radien på cirkeln i ekv *

$$3 \cdot \iint_D 1\,dxdy = 3\pi(\sqrt{2})^2 = \boxed{6\pi}$$

Optimering med bivillkor

Sats 1 (2 variabler)

$f, g \quad C^1$

Om f har max eller min under bivillkoret $g = 0$ i en pkt (a,b) i det inre av D_f och D_f så är ∇f och ∇g linjärt beroende (parallella)

Bevis

1) $\nabla g = 0$ Då är förstås ∇f och ∇g linjärt beroende.

2) $\nabla g \neq 0$ Enligt implicita funk.satsen finns en omg. till pkt (a,b) där kurvan $g=0$ framställer antingen y som C^1-funk av x eller

x - - - - y.

Alltså finns en lokal parametrisering av $g=0$ kring (a,b)

$x(t), y(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta$

$x(t_0), y(t_0) = (a,b) \quad \alpha \leq t_0 \leq \beta$

På denna bit $g=0$ har vi ett max/min av $\underbrace{f(x(t), y(t))}_{C^1 \text{ funk av } t}$ i t_0. Då är $\frac{d}{dt}(f(x(t_0), y(t_0)) = 0$

dvs enligt kedjeregeln $\nabla f \underbrace{(x(t_0), y(t_0))}_{(a,b)} \cdot \underbrace{(x'(t_0), y'(t_0))}_{\text{tangent till } g=0 \text{ i } (a,b)} = 0$

Även $\nabla g \cdot (x', y') = 0$ (grad $\perp$ nivåkurvan)

dvs $\nabla f, \nabla g$ är parallella $\blacksquare$

Problemlösning

1) Motivera existensen av max/min av f under bivillkoret $g=0$

2) Lös systemet $\begin{cases} \nabla f, \nabla g \parallel \\ g = 0 \end{cases}$

Hur hittar man pkt där $\nabla f, \nabla g$ $\parallel$?

1. Lagranges multiplikationsmetod.

a) a, b linjärt beroende $c_1 a + c_2 b = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \lambda b & c_1 \neq 0 \\ \text{elles} & \\ b = \lambda b & c_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = \lambda b \\ b = 0 \end{cases}$$

Lös $\begin{cases} \nabla f = \nabla g \lambda \\ g = 0 \end{cases}$ eller $\nabla g = 0$

2. Determinantmetoden

a, b linjärt beroende $\rightarrow \begin{vmatrix} - a - \\ - b \end{vmatrix} = 0$

$$= \frac{d(f,g)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix}$$

Lös $\begin{cases} \dfrac{d(f,g)}{d(x,y)} = 0 \\ g = 0 \end{cases}$

EX | Bestäm största och minsta värde av $f(x,y) = xy$ i ellipsskivan $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} \leq 1$.

Lösn:

Existens? f kont. $M = \{(x,y)\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} \leq 1\}$ kompakt.

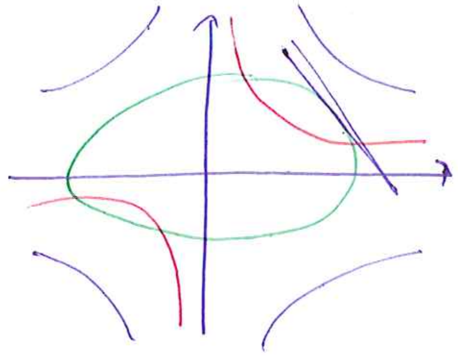
$\rightarrow \max_M f \quad \min_M f$ finns enl. sats.

Även på ∂D finns största och minsta värde.

i) Vi söker stat punkt i det inre.

Enda pkt är $(0,0)$ $\boxed{f(0,0) = 0}$

ii) Randen = ellipsen. Sök max/min av $f(x,y) = xy$ under bivillkoret $g(x,y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$



"$f = ?$"
Var tangeras $g=0$ av f:s nivåkurvor?

Lös ut de pkter där $\nabla f \parallel \nabla g$

Variant 1

$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \begin{cases} f'_x = \lambda g'_x \\ f'_y = \lambda g'_y \end{cases}$ eller $g'_x = g'_y = 0$

eller $\nabla g = 0$

$g'_x = g'_y \rightarrow \frac{x}{4} = y = 0$ origo ej på kurvan.

$\begin{cases} y = \lambda \frac{x}{4} \\ x = \lambda y \end{cases} \rightarrow \lambda xy = \boxed{4y^2 = x^2}$

Variant 2

$\begin{vmatrix} y & x \\ \frac{x}{4} & y \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y^2 - \frac{x^2}{4} = 0 \rightarrow \boxed{4y^2 = x^2}$

Sätt in i bivillkoret $g=0$

$\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ x^2 = 4y^2 \end{cases} \rightarrow y^2 = 1 \quad x^2 = 4$

Lösningar $(2,1)$ $(-2,-1)$ $(-2,1)$ $(2,-1)$
$f=2$ $f=2$ $f=-2$ $f=-2$

Max $f = 2$ Min $f = -2$
M M

EX 1 Minimera $x+y+z$ under bivillkoret $xyz=1$
$x>0$ $y>0$, $z>0$

$M = \{(x,y,z) : x>0, y>0, z>0\}$. obegr. $g = xy^2-1$

Vi kollar var ∇f, ∇g är parallella

Då är $\nabla f \times \nabla g = 0$

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = (\underbrace{x(y-z)}_{=0}, \underbrace{y(z-x)}_{=0}, \underbrace{z(x-y)}_{=0}) = 0$$

$x>0, y>0, z>0 \rightarrow x=y=z$

$g=1 \rightarrow x^3=y^3=z^3=1 \rightarrow \boxed{x=y=z=1}$

Låt $x+y+z=4$ vara "locket i avskärningen"
Då är $3 \leq f \leq 4$ på M_1.
Utanför M_1 $f>4$
Minsta värdet $f(1,1,1)=3$

Sats 2

$f, g \ldots g_n$ C^1 funk av n-variabler.
a max/min-pkt för f då $g_1 = \cdots g_p = 0$
$\rightarrow \nabla f, \nabla g_1, \ldots \nabla g_p$ linjärt beroende.

$$\iint_{Y} \mathbb{u} \cdot \mathbb{N} \, dS = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{7\pi}{12}}$$

27/2 | # Partiella Differentialekvationer

LV7

Partiella diffekvationer (PDE) av 1:a ordningen

Vi söker en funktion av flera variabler som löser en diffekv.

$$P(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + b(x,y)u = f(x,y)$$

Denna PDE är linjär. Vi vill hitta lösn. $z = u(x,y)$

Vi skriver om: $Pu'_x + Qu'_y = \underbrace{R}_{R(x,y,u)} = f(x,y) - b(x,y)u$

Om vi har lösningsyta $z = u(x,y)$. Tangentplanet till denna yta i en given punkt är

$z - u(a,b) = u'_x(a,b)(x-a) + u'_y(a,b)(y-b)$

En normal är $(u'_x, u'_y, -1)$

Skriv $Pu'_x + Qu'_y = R$ som $(u'_x, u'_y, -1)\cdot\underbrace{(P,Q,R)}_{\mathbb{F}} = 0$

$\mathbb{F}(x,y,z) = (P(x,y), Q(x,y), R(x,y,z))$

dvs $\mathbb{F}$ ligger i tangentplanet till $z = u(x,y)$

Def

En karakteristik till fältet $\mathbb{F}$ är en kurva som är parallell med fältet i varje punkt på kurvan, dvs om kurvan ges av $\mathbb{r} = \mathbb{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ så gäller att $\mathbb{r}'(t) = \mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = P(x(t), y(t)) \\ y'(t) = Q(x(t), y(t)) \\ z'(t) = R(x(t), y(t), z(t)) \end{cases}$

Sats

Om $u(x,y)$ är lösning till $Pu'_x + Qu'_y = R$ och om punkten (a,b,c) ligger på lösn. ytan $(c = u(a,b))$, då gäller att $z(t) = u(x(t), y(t))$ där $(x(t), y(t), z(t))$ är karakteristiken genom (a,b,c)

Bevis

Vi definierar $X(t), Y(t)$ som lösning till systemet

$$\begin{cases} \boxed{X'(t) = P(X(t), Y(t))} & X(0) = a \\ \boxed{Y'(t) = Q(X(t), Y(t))} & Y(0) = b \end{cases}$$

Definiera $Z(t) = u(X(t), Y(t))$. Då gäller

$$Z'(t) = u'_x X'(t) + u'_y Y'(t) = Pu'_x + Qu'_y = R(x,y,u)$$

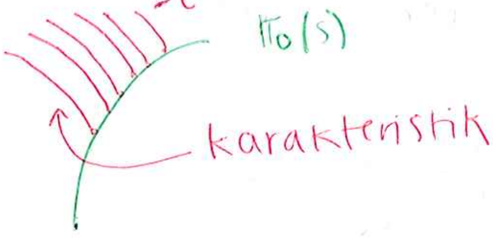
$$R(X,Y,Z)$$

kedjeregeln

dvs
$$\begin{cases} X'(t) = P(X,Y) & X(0) = a \\ Y'(t) = Q(X,Y) & Y(0) = b \\ Z'(t) = R(X,Y,Z) & Z(0) = c \end{cases}$$

vilket är den entydiga karakteristiken genom (a,b,c).

Ofta har man ett villkor, ex en viss kurva ligger i lösn. ytan. Om vi har parametrisering av denna $(\pi_0(s) = (x_0(s), y_0(s), z_0(s))$ så vill vi bestämma karakteristiken genom denna.



$$\frac{\partial x}{\partial t} = P(x(s,t), y(s,t)) \qquad x(s,0) = x_0(s)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = Q(x(s,t), y(s,t)) \qquad y(s,0) = y_0(s)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = R(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) \qquad z(s,0) = z_0(s)$$

Vi får parametrisering av lösningskurvan

$$\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \\ z = z(s,t) \end{cases}$$

Om vi kan lösa ut s,t uttryckt i x,y så har vi samband $z = u(x,y)$

EX. Metod 1

$-x^2 u'_x + u'_y = 0$ $\quad z = y \quad x = 1$ skall ligga i lösningsytan.

$P = -x^2$, $Q = 1$

karakteristiker:

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t)^2 & x(0) = 1 \\ y'(t) = 1 & y(0) = s \\ z'(t) = 0 & z(0) = s \end{cases}$$

$\int \frac{dx}{x^2} = \int -1\,dt \iff -\frac{1}{x} = -t + C_1 \iff -1 = C_1 \iff x = \frac{-1}{-t-1} = \boxed{\frac{1}{t+1}}$

$y'(t) = 1 \quad y = t + C_2 \Rightarrow \boxed{y = t + s}$

$z'(t) = 0 \quad z = C_3 \Rightarrow \boxed{z = s}$

$\frac{1}{x} = t + 1 \quad y = t + s \quad s = y - t = y - \frac{1}{x} + 1$

dvs $\boxed{z = y - \frac{1}{x} + 1}$

Metod 2 (samma ekv)

$P u'_x + Q u'_y = R$

Karakteristikernas ekv på parameteroberoende form: (P,Q)

$\boxed{\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}}$ $\quad$ om tex $R = 0$ så $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$, $dz = 0$

I vårt fall $\frac{dx}{-x^2} = \frac{dy}{1}$, $dz = 0$

$\frac{dx}{-x^2} = dy \Rightarrow \int \frac{dx}{-x^2} = \int dy + C$

$\frac{dx}{dt} = P$, $\frac{dy}{dt} = Q \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{P}{Q}$

$\frac{1}{x} = y + C$

Variabelbyte

$\underbrace{\frac{1}{x} - y}_{\text{kalla detta } s} = C$ $\quad s = \frac{1}{x} - y \quad t = h(x,y)$

Sätt in i $-x^2 u'_x + u'_y \overset{=0}{=} -x^2(u'_s \cdot s'_x + u'_t \cdot t'_x)$

$+ (u'_s \cdot s'_y + u'_t \cdot t'_y)$

$= (\underbrace{-x^2 s'_x + s'_y}_{=0 \text{ alltid!}}) u'_s + (-x^2 t'_x + t'_y) u'_t = 0$

$s'_x = \frac{-1}{x^2}$

$s'_y = -1$

$\Rightarrow (-x^2 t'_x + t'_y) u'_t = 0$

$\Rightarrow u'_t = 0 \Rightarrow u = C_1(s) = C_1(\frac{1}{x} - y)$

$u(x,y) = C_1(\frac{1}{x} - y)$ $\quad C_1$ är en C^1-funktion.

Villkor: $u(1,y) = y \Rightarrow C_1(\underbrace{\frac{1}{1} - y}_{y}) = \underbrace{y}_{1-y}$

$\Rightarrow C_1(y) = 1 - y$

$\Rightarrow u(x,y) = C_1(\frac{1}{x} - y) = 1 - (\frac{1}{x} - y) = \boxed{1 - \frac{1}{x} + y}$

Kvasilinjär

$$P(x,y,u)\,u'_x + Q(x,y,u)\,u'_y = R(x,y,u)$$

Rep Bivillkorsproblem

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(p<n)$

Sök max/min av f då $g_1 = 0 \ldots g_p = 0$

1) Säkra existensen
2) $\nabla f, \nabla g_1 \ldots \nabla g_p$ linjärt beroende i max/min

Lös $\begin{cases} \nabla f, \nabla g_1 \ldots \nabla g_p \text{ linjärt beroende} \\ g_1 = g_2 = g \ldots = 0 \end{cases}$

A: • En metod: rank $\dfrac{\partial(f_1, g_1 \ldots g_p)}{\partial(x_1 \ldots x_n)}$ ej max.

EX rank $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$ ej max $\iff \dfrac{d(f,g)}{d(x,y)} = 0$

• En annan metod:

$\boxed{\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 \ldots \lambda_p \nabla g_p}$ eller $\nabla g_1 \ldots \nabla g_p$ lin. beroende.

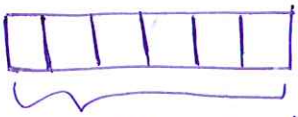
Ibland skriver man $\Phi = f + \lambda_1 g_1 \ldots \lambda_p g_p$

och kräver $\boxed{\text{grad } \Phi = 0}$

$\Phi'_x = 0 \quad \Phi'_y = 0 \quad \ldots \quad \Phi'_{\lambda_i} = 0 \Rightarrow g_1 = 0$

EX: Statistisk Mekanik

n partiklar, fördelas på g tillstånd



g tillstånd fack.

Om inte 2 partiklar får ligga i samma fack

((fermioner) - lyder Pauliprincipen)

n partiklar kan då fördelas på $\binom{g}{n}$ sätt.

$$\left(= \frac{g!}{n!(g-n)!}\right)$$

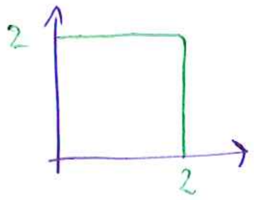
Om $n << g$ ($\frac{n}{g}$ nära 0) blir det istället

$\frac{g^n}{n!}$ sätt.

EX. 4.6

$f(x,y) = 4x^2y^2 - 2xy^4 - 3x^2$

$D = [0,2] \times [0,2]$



Bestäm $\max_D f$ och $\min_D f$!

$\exists$ max och min eftersom f kontinuerlig och D kompakt.

i) Stat. punkter $\nabla f = 0$ (i det inre av D

ii) Randen ∂D

Här finns både max och min.

---

i)
$$\begin{cases} ① \ f'_x = 8xy^2 - 2y^4 - 6x = 0 \\ ② \ f'_y = 8x^2y - 8xy^3 = 0 \end{cases}$$

$\underbrace{8xy}_{\neq 0 \text{ i det inre}}(x - y^2) \Rightarrow x = y^2$

$① \ 8y^4 - 2y^4 - 6y^2 = 0$

$6y^4 - 6y^2 = 0$

$y^2(y^2 - 1) = 0$

$y^2 \neq 0$ i det inre

$\rightarrow y = 1 \rightarrow x = 1$

Enda stationära punkt i det inre är $x = 1 = y$

$\boxed{F(1,1) = -1}$

ii) Randen

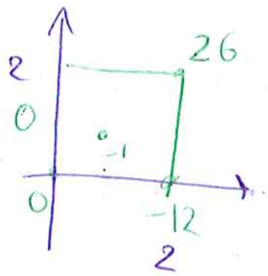
1) $y=0 \quad 0 \le x \le 2 \quad f(x,0) = -3x^2$

Avtagande från 0 till −12.

2) $x=0 \quad 0 \le y \le 2 \quad f(0,y) = 0$

3) $y=2 \quad 0 \le x \le 2 \quad f(x,2) = \underbrace{13x^2 - 32x}_{u(x)}$

4) $x=2 \quad 0 \le y \le 2 \quad f(2,y) = \underbrace{16y^2 - 4y^4 - 12}_{v(y)}$



Kolla eventuella nollställen till $u'(x)$ i $(0,2)$

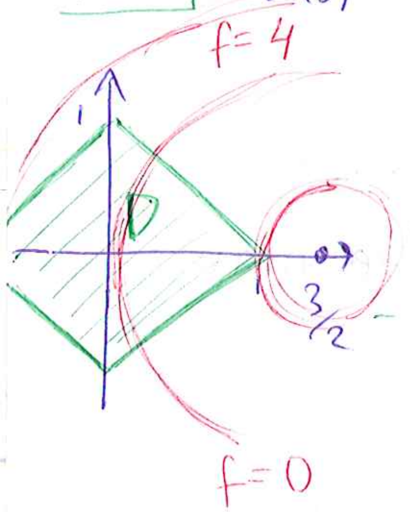
−||− $v'(y)$ i $(0,2)$

Alla hörnpunkter kollas (gjort)

Jämför sedan värdena och kolla största/minsta!

Vi hittar då $\max_D f$, $\min_D f$

4.42 $f(x,y) = x^2+y^2-3x$ Sök max o min av f i $D = \{(x,y) : |x|+|y| < 1\}$



$f(x,y) = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{9}{4}$

Nivåkurvor:

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = C + \frac{9}{4}$

$f(x,y) = C$

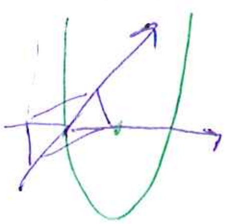
rotationssymmetrisk kring $(3/2, 0)$

→ minsta: −2

största: 4

Lägsta nivån av f i D inträffar i (1,0) f = −2

Högsta nivån i (−1,0)



29/2

Statistisk mekanik

N partiklar ska fördelas på ett antal energinivåer $E_1, \dots E_k$

Till varje nivå hör ett antal ($= g_i$) tillstånd

$E_1 + E_2 \dots + E_k = E$

$n_1 + \dots \; n_k = N$

Fermioner: Två partiklar kan inte vara i samma tillstånd.

Bosoner: ingen sådan restriktion.

Antal kombinationer av n_i partiklar på energinivån E_i:

- Fermioner: $\binom{g_i}{n_i} = \frac{g_i!}{(g_i - n_i)!\, n_i!}$
- Bosoner: $\binom{g_i + n_i - 1}{n_i}$

Om $n_i << g_i$, $\frac{n_i}{g_i}$ nära 0, så är båda $\hat{=} \frac{g_i^n}{n_i!}$

produkt

För varje partition $n_1 \dots n_k$ av N finns $P = \prod \frac{g_i^n}{n_i!}$ möjligheter. P är proportionell mot sannolikheten för just denna partition.

Vi vill maximera P med bivillkor $\sum n_i = N$, $\sum n_i E_i = E$.

$P_{max} \Leftrightarrow \ln P$ max

$\ln P = \sum \ln \frac{g_i^n}{n!} = \sum n_i \ln g_i - \ln n_i!$

$\approx \sum n_i \ln g_i - n_i \ln n_i + n_i$

Stora n: $\ln n! \hat{=} n \ln n - n$
Uppskatta $\hat{\sum_{k=1}} \ln k$ m. integral

Maximera detta då $\sum n_i E_i - E = 0$ $\sum n_i - N = 0$

I maximum gäller

$\nabla \ln P = \alpha \nabla(\sum n_i - N) + \beta \nabla (\sum n_i E_i - E)$

variabler $n_1 \dots n_k$

eller HL=0 med α, β ej båda noll. vilket dock skulle ge $0 = \alpha + \beta E_i \; \forall i$

motsägelse!

Återstår $\nabla(\ln P) = \alpha(\nabla \ldots) + \beta(\nabla \ldots)$

För varje koordinat n_i får vi

$$\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\sum n_i \ln g_i - n_i \ln n_i + n_i\right) = \frac{\partial}{\partial n_i}\left(\alpha\left(\left(\sum n_i\right) - N\right) + \beta\left(\left(\sum n_i E_i - E\right)\right)\right)$$

$$\ln g_i - 1 \cdot \ln n_i - \cancel{n_i \frac{1}{n_i} + 1} = \alpha + \beta E_i$$

$$\underbrace{\ln n_i - \ln g_i}_{\ln \frac{n_i}{g_i}} = -\alpha - \beta E_i$$

$$\frac{n_i}{g_i} = e^{-\alpha - \beta E_i} \qquad \left(\beta = \frac{1}{kT}\right)$$

Bolzmann-statistik

$$N = \sum n_i = e^{-\alpha} \underbrace{\sum g_i e^{-\beta E_i}}_{Z = \text{tillståndssumma}}$$

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{Z} \qquad \frac{n_i}{g_i} = \frac{N}{Z} e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

Fermioner (prova själv)

$$\frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\alpha + \beta E_i} + 1}$$

Fermi-Dirac statistik

Bosoner

$$\frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\alpha + \beta E} - 1}$$

Bose-Einstein-statistik

Att derivera integraler

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(t)\,dt = 0$$

~~[illegible]~~ kan heta vad som helst

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$ om f är kontinuerlig

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = f(b(x))\cdot b'(x) - f(a(x))\cdot a'(x)$$

Man kan också tänka sig

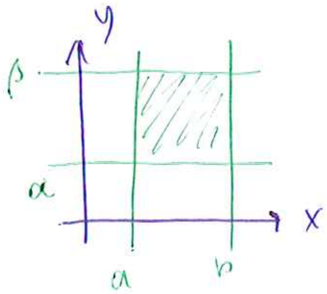
$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx \overset{?}{=} \int_a^b f'(x,y)\,dx$$

T.ex. är $\frac{d}{dy}\int_0^\infty e^{-xy}\,dx = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-xy}\right)dx = \int_0^\infty -xe^{-xy}\,dx$?

Sats 1

Antag att funktionerna $(x,y) \longmapsto f(x,y)$, $(x,y) \longmapsto f'_y(x,y)$ är kontinuerliga för $a \le x \le b$, $\alpha < y < \beta$

($\alpha = -\infty$, $\beta = \infty$ tillåts)



Då är $$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx$$

Bevis

Sätt $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$

$$\frac{F(y+h)-F(y)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^b f(x,y+h)\,dx - \int_a^b f(x,y)\,dx\right) =$$

$$\frac{1}{h}\int_a^b \underbrace{\left(f(x,y+h) - f(x,y)\right)}_{h\cdot f'_y(x,\,y+\theta h)\quad 0<\theta<1 \text{ (m.v-sats)}}dx =$$

$$= \int_a^b f'_y(x, y+\theta h)\,dx = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx + \underbrace{\int_a^b f'_y(x, y+\theta h) - f'_y(x,y)\,dx}_{R(h)}$$

(kont.)

Fixera $\alpha_1 > \alpha$, $\beta_1 < \beta$ s.a. y och $y+\theta h$ ryms i rektangeln $[a,b] \times [\alpha_1, \beta_1]$ som är en kompakt mängd.

Sats 5 (s. 41): f'_y kontinuerlig i kompakt mängd $\rightarrow$ likformigt kont. i mängden.

Då gäller $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ |h| < \delta \rightarrow$

$$|f'_y(x, y+\theta h) - f'_y(x,y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$|R(h)| \leq \int_a^b \underbrace{|f'_y(x, y+\theta h) - f'_y(x,y)|}_{< \frac{\varepsilon}{b-a}}\,dx < \varepsilon \text{ om } |h| < \delta$$

$R(h) \rightarrow 0$ då $h \rightarrow 0$, dvs $F'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx$

Generaliserad integral

Sats: Antag
- $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ är konv. för varje $y \in (\alpha, \beta)$.
- f och f'_y är kontinuerliga i $[a, \infty] \times (\alpha, \beta)$

Till varje kompakt delintervall $[\alpha_1, \beta_1]$ av (α, β) finns $g(x)$ s.a $|f'_y(x,y)| \leq g(x)$ och $\int_a^\infty g(x)\,dx$ är konvergent.

Då gäller: $\displaystyle \frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^\infty f_y'(x,y)\,dx$

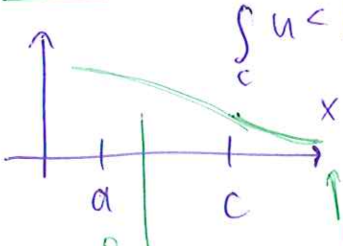
Bevis

Sätt $F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ och kopiera starten av föreg. sats bevis:

$$\frac{F(y+h)-F(y)}{h} = \int_a^\infty f_y'(x,y)\,dx + \underbrace{\int_a^\infty f_y'(x,y+\theta h) - f_y'(x,y)\,dx}_{R(h)}$$

Idé

$\int_c^\infty u < \frac{\varepsilon}{2}$



$R_1(h) < \frac{\varepsilon}{2}$ om $|h|<\delta$

$R_2(h) < \frac{\varepsilon}{2}$ om $c > c_0$

$$R(h) = \underset{[a,c]}{R_1(h)} + \underset{[c,\infty)}{R_2(h)}$$

$$|R_2(h)| \leq \int_c^\infty \underbrace{|f_y'(x,y+\theta h) - f_y'(x,y)|}_{\substack{\leq |f_y'(x,y+\theta h)| + |f_y'(x,y)| \\ \leq g(x) + g(x)}}\,dx$$

$$\leq 2\cdot\int_c^\infty g(x)\,dx$$

$\int_c^n \to \int_c^\infty$

$\int_n^\infty \to 0$

Tag $\varepsilon > 0$, välj c

så att $2\int_c^\infty g(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$ Möjligt pga konvergensen hos $\int^\infty g(x)\,dx$

Krav: $R_1(h) = \int_a^c (f_y'(x,y+\theta h) - f_y'(x,y))\,dx$

Välj $\alpha_1 > \alpha$, $\beta_1 < \beta$ så att $y, y+\theta h \in [\alpha_1, \beta_1]$

Enl. föreg. bevis kan vi då hitta $\delta > 0$ s.a
$|h| < \delta \Rightarrow |R_1(h)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|R(h)| < \varepsilon \quad F'_y = \int_a^\infty f'_y(x,y)\,dx$ Klart!

EX Beräkna $\int_a^\infty x^n e^{-xy}\,dx$, $(y>0,\ n=1,2\ldots)$
genom att derivera $\int_0^\infty e^{-xy}\,dx$

Idé $\int_0^\infty e^{-xy}\,dx = \left[\frac{e^{-xy}}{-y}\right]_0^\infty = \frac{1}{y}$

Derivera båda leden, VL enl. sats 3:

$\int_0^\infty -x e^{-xy}\,dx = -\frac{1}{y^2}$, $\int_0^\infty (-x)^2 e^{-xy}\,dx = (-1)\cdot(-2)\cdot y^{-3}$

$\int_0^\infty (-x)^3 e^{-xy}\,dx = (-1)(-2)(-3)\,y^{-4}$

$\vdots$

$\int_0^\infty \underbrace{(-x)^n}_{(-1)^n x^n} e^{-xy}\,dx = (-1)^n n!\,y^{-n-1}$

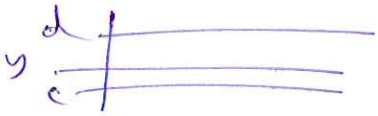
$\int_0^\infty x^n e^{-xy}\,dx = \frac{n!}{y^{n+1}}$ = svar.

Var detta ok enl. sats 3?

- Är $\int_0^\infty e^{-xy}\,dx$ konv. för alla $y>0$? Ja!
- Är e^{-xy} och dess derivator kont. i $\underset{x}{[0,\infty)} \times \underset{y}{[0,\infty)}$
  Ja!
- Finns majorant $g(x)$ med konv. integral

för varje derivata (i kompakt delintervall av $(0,\infty)$)?

$|f'_y(x,y)| = xe^{-xy} \le xe^{-cx}$ osv.



OK!