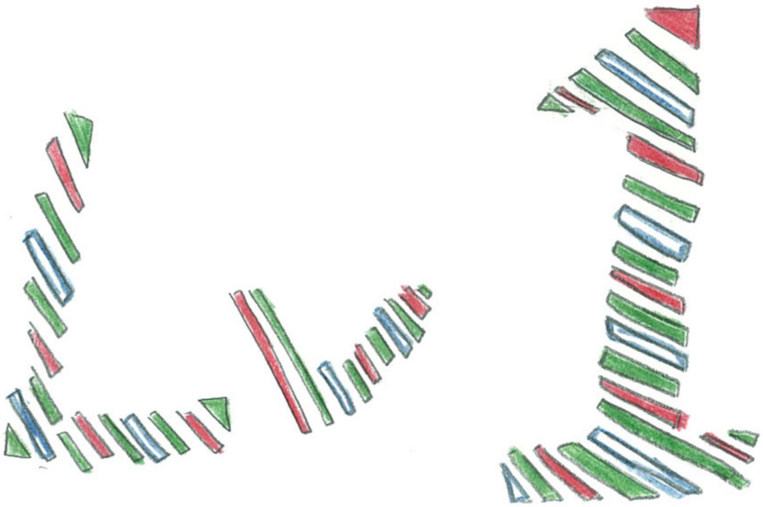


Flervariabelanalys

Med Bernhard Behrens

MVE 035 F1 10 3 2010

Förkunskaper

Differentialkalkyl

DEF: partiellt deriverbar

DEF: differentierbar

DEF: tangentplan

differentierbarhet ⇒ kontinuitet

SATS: kedjeregeln]] BEVIS[

högre derivator

DEF: C^p-funktioner

SATS: (I) $C^1 \Rightarrow$ differentierbar]] BEVIS[

(II) då $f''_{xy} = f''_{yx}$

SATS: kedjeregeln (utvidgad)

DEF: gradientvektor

DEF: rihtningsderivata

SATS: då $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$]] BEVIS[

SATS: gradientvektorns egenskaper]] BEVIS[

nivåytan $F(x,y,z)$

DEF: max och min

SATS: Fermats kriterium]] BEVIS[

DEF: stationär

DEF: sadelpunkt

SATS: Taylorpolynomet]] BEVIS[

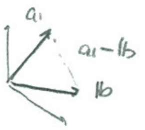
I denna kurs (mve 035) behandlar vi funktioner
$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ("fält")

Förkunskaper: kunna derivera/integrera (MVS, enkla diffekv...)
lin-alg: (Lp1, Lp2)

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} \quad \ldots \quad \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

$$\left.\begin{matrix}\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots) \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots)\end{matrix}\right\} \quad \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \overset{\text{vinkeln mellan } \mathbf{a}, \mathbf{b}}{\varphi} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots$$

- $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots}$ "avståndet mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$"
  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{a} - \vec{0}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots}$



- $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ dvs. $|f(\mathbf{x}) - \mathbf{a}| \to 0$ då $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| \to 0$

inre punkt i $D \subseteq \mathbb{R}^n$, randpunkt

$$\left.\begin{matrix}\text{öppen} \\ \text{sluten} \\ \text{kompakt}\end{matrix}\right\} \text{ mängd } D \subseteq \mathbb{R}^n$$

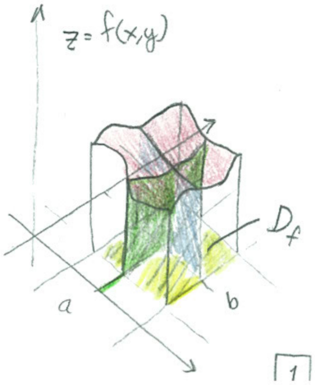
Börjar med differentialkalkylen (PB kap 2)
för $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (reellvärda fkt av flera variabler) först $n=2$:

Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, (a,b) en inre punkt i D_f
Om man håller $y=b$ fixt så fås funktionen

$$\left.\begin{matrix} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(x) = f(x,b)\end{matrix}\right\} \text{ grafen är en kurva i planet } y=b$$

Om man håller $x=a$ fixt ...

$$\left.\begin{matrix} h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y \longmapsto h(y) = f(a,y)\end{matrix}\right\} \quad \text{- - - - - - - - - - - -} \quad x=a$$



Om $g'(a)$ resp. $h'(b)$ existerar så är dessa tal ett mått för den relativa förändringen av $f(x,y)$ då (x,y) varierar längs linjen (x,b) resp. (a,y).

DEF En funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är PARTIELLT DERIVERBAR i (a,b) om (a,b) är inre punkt i D_f och gränsvärdena

$$(g'(a)=) \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x, b) - f(a,b)}{\Delta x} = f'_x(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

och

$$(h'(b)=) \quad \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(a, b+\Delta y) - f(a,b)}{\Delta y} = f'_y(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

existerar, i så fall betecknas de ↑ så här och kallas

$\begin{cases} \text{den partiella derivatan av } f \text{ m.a.p. } x \\ \text{. . . . . m.a.p. } y \end{cases}$ i punkt (a,b)

Om f är partiellt deriverbar i alla $(x,y) \in D$, så kallas funktionerna

$$f'_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f'_x(x,y)$$

$$f'_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f'_y(x,y)$$

$D_{f'_x} = D_{f'_y} = D$, för $\begin{cases} \text{den partiella derivatan av } f \text{ m.a.p. } x \\ \text{———— '' ———— m.a.p. } y \end{cases}$

Ex (1) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}\cosh(xy^3)$:

$$f'_x = 2xe^{x^2+y^2}\cosh(xy^3) + e^{x^2+y^2}\sinh(xy^3)\cdot y^3$$

$$f'_y = 2ye^{x^2+y^2}\cosh(xy^3) + e^{x^2+y^2}\sinh(xy^3)\cdot 3xy^2$$

!!! (2) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Visa: f är partiellt deriverbar i $(0,0)$

$$\begin{cases} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \frac{0-0}{\Delta x} = 0 \to 0 \text{ då } \Delta x \to 0 \\ \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \frac{0-0}{\Delta y} = 0 \to 0 \text{ då } \Delta y \to 0 \end{cases} \quad \text{dvs.} \quad \begin{matrix} f'_x(0,0) = 0 \\ f'_y(0,0) = 0 \end{matrix}$$

Men f är <u>INTE</u> kontinuerlig i (0,0) ty t.ex.

$$f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0 \text{ då } (x,x) \longrightarrow (0,0) \text{ !!}$$

För att hitta det rätta deriverbarhetsbegreppet hittar vi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
f är deriverbar i en inre punkt $a \in D_f$ om

$$\rho(\Delta x) = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a) = \frac{f(0+\Delta x) - (\overbrace{f(a) + f'(a)\Delta x}^{\text{tangent}})}{\Delta x} \longrightarrow 0 \text{ då } \Delta x \to 0$$

Det ser ut så här för $n=2$:

DEF En funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kallas DIFFERENTIERBAR i (a,b) om f är partiellt deriverbar i (a,b) och

$$\rho(\Delta x, \Delta y) = \frac{f(a+\Delta x, b+\Delta y) - (f(a,b) + f'_x(a,b)\Delta x + f'_y(a,b)\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} 0$$

Som vanligt:
$\Delta x = x - a$
$\Delta y = y - b$

dvs. f är differentierbar i (a,b) om f approximeras av avbildningen $z = \underbrace{f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)}_{\text{en linjär avbildning } \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\text{, vars graf är ett plan.}}$ <u>så bra</u>

att det <u>relativa felet</u> $\frac{f(x,y) - z}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ går mot 0 då $(x,y) \longrightarrow (a,b)$

DEF Om $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är differentierbar i (a,b) så kallas planet $z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$ för TANGENTPLAN TILL ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(a,b,f(a,b))$.

Ex tangentplan till paraboloiden $z = x^2+y^2 = f(x,y)$ i $(1,1,2)$:

$f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$:

$$z = f(1,1) + f'_x(1,1)(x-1) + f'_y(1,1)(y-1) = 2 + 2(x-1) + 2(y-1)$$

Svar: $2x + 2y - z = 2$

"differentierbarhet" används oftast så:

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är differentierbar i (a,b) om f är partiellt deriverbar i (a,b) och

$$f(x,y) - f(a,b) = f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) + \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\cdot \rho(x-a,y-b)$$

där $\rho(x-a, y-b) \to 0$ då $(x,y) \to (a,b)$

Det visar: $f(x,y) - f(a,b) \to 0 + 0 + 0$ då $(x,y) \to (a,b)$, dvs. f är kontinuerlig i (a,b)!!

Räkneregler:

SATS Om $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är differentierbara i (a,b) så är $f+g$, $f \cdot g$ och $\frac{f}{g}$ (om $g(a,b) \neq 0$) differentierbara i (a,b).

Bevis räkneregler för gränsvärden (addition, multiplikation och division är kontinuerliga, dvs.: "bevarar gränsvärden")

sammansatt fkt:

SATS (2.3, kedjeregeln)

Föruts.: a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differentierbar i $\mathbb{R}^2$

b) $\mathbb{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha \leq t \leq \beta$ är en deriverbar kurva i D

$t \mapsto \mathbb{r}(t) = (x(t), y(t))$

[dvs. x, y är deriverbara i $]\alpha,\beta$
$\mathbb{r}(t) = (x(t), y(t)) \in D$ för $t \in [\alpha,\beta]$

Påst: $h = f \circ \mathbb{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är deriverbar i $]\alpha,\beta[$ med

$t \mapsto h(t) = f((x(t), y(t)))$

$$h'(t) = f'_x(x(t), y(t) \cdot x'(t) + f'_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

Bevis Skall beräkna $h'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t}$ $\overset{\text{"existerar"}}{\downarrow}$ (ex!), $t \in]\alpha,\beta[$:

$$\frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\Big(f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) - f(x(t), y(t))\Big) \overset{f \text{ diff.bar}}{=}$$

$$= \frac{f'_x(x(t),y(t))\cdot(x(t+\Delta t)-x(t))}{\Delta t} + \frac{f'_y(x(t),y(t))(y(t+\Delta t)-y(t))}{\Delta t} \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{(x(t+\Delta t)-x(t))^2}{\Delta t^2}+\frac{(y(t+\Delta t)-y(t))^2}{\Delta t^2}}\cdot\rho(\quad)$$

$$\rho(\quad)\to 0$$

då $\Delta t\to 0$: $f'_x(x(t),y(t))\cdot x'(t)+f'_y(x(t),y(t))\,y'(t)\pm\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\cdot 0$

V.S.V. ∎

Onsdag
2010-01-20

Rep: $f:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}$, $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_n)$

- f partiellt deriverbar i $\mathbf{a}$ om $\mathbf{a}$ inre pkt i D_f och alla gränsvärden

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(a_1,\dots,a_i+\Delta x_i,\dots a_m)-f(a_1,\dots,a_i,\dots,a_m)}{\Delta x_i}=f'_{x_i}(\mathbf{a})=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$$

existerar.

- f differentierbar i $\mathbf{a}$ om f är part. deriverbar i $\mathbf{a}$ och

$$\rho(\mathbf{x}-\mathbf{a})=\frac{f(\mathbf{x})-(f(\mathbf{a})+f'_{x_1}(\mathbf{a})(x_1-a_1)+\dots+f'_{x_m}(\mathbf{a})(x_m-a_m))}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|}\longrightarrow 0 \text{ då } \mathbf{x}\to\mathbf{a}$$

Högre derivator: Om f'_x, f'_y, f'_z … är (partiellt) deriverbara så skriver vi:

$$(f'_x)'_x=f''_{xx}\;,\quad (f'_y)'_y=f''_{yy}\quad\Big|\quad (f'_x)'_y=f''_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\;;\;(f'_y)'_x=f''_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

"ordning 2"

$$(f''_{xy})'_z=f'''_{xyz}=\frac{\partial^3 f}{\partial z\partial y\partial x}$$

"ordning 3"

Ofta (för snälla fkt) är de lika

DEF $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$; $D \subseteq \mathbb{R}^m$; vi säger:

f är C^p i D om alla part. derivator t.o.m. ordningen p är kontinuerliga i D.
[$p=0$: f är C^0 om f är kontinuerlig]

differentierbar $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ kontinuerlig, ty

$$f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a}) = f'_{x_1}(\mathbf{a})\underset{\substack{\downarrow\\0}}{(x_1-a_1)} + \ldots + f'_{x_m}(\mathbf{a})\underset{\substack{\downarrow\\0}}{(x_m-a_m)} + \underset{\substack{\downarrow\\0}}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|}\,\rho\underset{\substack{\downarrow\\0}}{(\mathbf{x}-\mathbf{a})} \longrightarrow 0 \text{ då } \mathbf{x}\to\mathbf{a}$$

SATS $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$

!! **(I)** Om f är C^1 i $\mathbf{a}$ så är f differentierbar i $\mathbf{a}$.
Omvändningen gäller ej!

(II) Om f är C^p i $\mathbf{a}$ $(2 \leq p \in \mathbb{N})$ så gäller det för de part. derivatorna t.o.m. ordningen p att det inte spelar någon roll i vilken ordning man deriverar.

Bevis

(I) räcker för $m=2$. $\mathbf{a}=(a,b)$, $\delta>0$ så att $B_\delta(\mathbf{a}) = \{(x,y):(x-a)^2+(y-b)^2<\delta\} \subseteq$ ($\mathbf{a}$ inre pkt!!)
$h=\Delta x$, $k=\Delta y$ så små att $(a+h, b+k) \in B_\delta(\mathbf{a})$

$$f(a+h,b+k)-f(a,b) = \underbrace{f(a+h,b+k)-f(a,b+k)}_{\text{MVS för } f(x,\ldots)} + \underbrace{f(a,b+k)-f(a,b)}_{\text{MVS för } f(\ldots,y)} =$$

[typiskt: dela upp det i en differens i x-led, och i y-led]

ty f'_x, f'_y är C^0

$$= f'_x(\xi, b+k)\cdot h + f'_y(a,\eta)\cdot k = (f'_x(a,b)+\rho_1(h,k))h + (f'_y(a,b)+\rho_2(h,k))k$$

$\rho_1(h,k) \to 0$ då $(h,k)\to(0,0)$
$\rho_2(h,k) \to 0$

[ξ mellan a och $a+h$
η mellan b och $b+k$]

det ger f diff.bar i a

$$= f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)\cdot k + \sqrt{h^2+k^2}\underbrace{\left(\rho_1(h,k)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + \rho_2(h,k)\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)}_{\rho(h,k)\to 0 \text{ då } (h,k)\to(0,0)}$$

(ty $\rho_1, \rho_2 \to 0$ och
$\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq 1$ ty $|h| \leq \sqrt{h^2+k^2}$
$\left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq 1$ ty $|k| \leq \sqrt{h^2+k^2}$)

Omvändningen gäller ej:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(ex. 4
DO IT)
(dugga 06!)

f är differentierbar men ej C^1 i (0,0).

II $f''_{xy} = f''_{yx}$ om f är C^2 (dvs f''_{xy} och f''_{yx} är kontin.):
<u>se boken</u> (liknande, vi visar det med integral).

Rep: (kedjeregeln): $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ differentierbar,
$C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$ en deriverbar kurva i D_f:

$$\frac{d}{dt} f(x_1(t), .., x_m(t)) = f'_{x_1}(..)x'_1 + f'_{x_2}x'_2 + \ldots + f'_{m}x'_m,$$ utvidga:

SATS (n=2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v))$

f och xy är C^1-fkt, $V_g \subseteq D_f$

Då är $h = f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är C^1 med

$(u,v) \longmapsto h(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$

(C^1 ty HL är C^0

$$\begin{cases} h'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u & \leftarrow \text{kedjeregeln: variabeln är } (t=)\ u \\ h'_v = f'_x \cdot x'_v + f'_y y'_v & \leftarrow \text{ - - - - - } (t=)\ v \end{cases}$$

Ex på "g": polära koordinater

$g: (r, \varphi) \longmapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$g^{-1}: (x,y) \longmapsto (\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x})$

(för $x>0$)

[g skall vara (lokalt) injektiv, dvs: $g^{-1}: (x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$]

då har vi: (skriver inte en ny symbol för $f \circ g^{-1}$):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

Ö 23 Lös problemet $y f'_x - x f'_y = x^3 y + x y^3$ för $\begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix}$

ledn.: inför nya variabler $\begin{matrix} u = x^2+y^2 \\ v = x^2-y^2 \end{matrix}$

Lösning: $f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v v'_x = 2x f'_u + 2x f'_v$

$f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = 2y f'_u + 2y f'_v$ Sätt in i DE!

$y f'_x - x f'_y = 0 + 4xy f'_v = xy(x^2+y^2)$ dvs $f'_v = \frac{1}{4} \cdot u$

(i uv-planet)

Lösn: $f(u,v) = \frac{1}{4} u \cdot v + g(u)$ (g godt. deriverbar fkt, konst. m.a.p. v) back to x,y: $f(x,y) = \frac{1}{4} \cdot (x^2+y^2)(x^2-y^2) + g(x^2+y^2)$

Spec. : sök lösn. som satisfierar $f(x,x) = x^2$:

$f(x,x) = 0 + g(2x^2) \overset{!}{=} x^2$, dvs. $g(t) = \frac{1}{2}x$

<u>Svar:</u> $\boxed{f(x,y) = \frac{1}{4}(x^4-y^4) + \frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ ← kolla!

DEF

Om $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ är part. deriverbar i $\mathbf{a}$

så kallas vektorn $\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = (f'_{x_1}(\mathbf{a}), \dots, f'_{x_m}(\mathbf{a}))$

för GRADIENT TILL f i $\mathbf{a}$

Skall (in)se att differentialoperatorn $\operatorname{grad}: f \longmapsto (\frac{\partial}{\partial x_1} f, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} f)$

generaliserar (spelar samma roll som) deriveringsoperatorn $D: f \longmapsto \frac{d}{dx} f$ för $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

"grad" kommer från latin: gradie = gå

Nu skall vi se varför (hur) grad f motsvarar D: Titta på:

(I) Kedjeregeln : för $f(x(t), y(t))$: $\left(f(\underbrace{x(t), y(t)}_{\mathbf{r}(t)})\right)' = f'_x x' + f'_y y' = (f'_x, f'_y) \overset{\text{skalär}}{\cdot} \underbrace{(x', y')}_{\mathbf{r}'(t)}$

gäller för godt. m: $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \longrightarrow$ $\boxed{(f(\mathbf{r}(t)))' = \operatorname{grad} f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)}$

(II) Differentierbarhet: för $f(x,y)$, $\mathbf{a} = (a,b)$:

$(x,y) = (a+h, b+k)$

$$f(x,y) - f(a,b) = f'_x(a,b)\overset{h}{(x-a)} + f'_y(a,b)\overset{k}{(y-b)} + \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \cdot \rho(x-a, y-b) \xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} 0$$

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = f'_x(\mathbf{a})\cdot h + f'_y(\mathbf{a})\cdot k + \sqrt{h^2+k^2}\,\rho(h,k) =$$

f diff-bar i $\mathbf{a}$ om

$\mathbf{h} = (h,k)$

$$\boxed{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) \circ \mathbf{h} + |\mathbf{h}|\rho(\mathbf{h}), \text{ där } \rho(\mathbf{h}) \to 0 \text{ då } \mathbf{h} \to 0}$$

↖ gäller för godt. m: $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

(III) riktningsderivata:

Problemställning:

Vad är den relativa förändringen av $f(\mathbf{x})$ i $\mathbf{a}$ då $\mathbf{x}$ avlägsnar sig från $\mathbf{a}$ i riktningen $\mathbf{v}$, dvs. då plt $\mathbf{x}$ rör sig längs linjen $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$

OBS: För att få ett korrekt mått måste $|\mathbf{v}| = 1$. Då anger t avståndet mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{a}$. $(|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = |t\mathbf{v}| = |t||\mathbf{v}| = |t|)$

DEF

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a}$ inre punkt i D_f. Om gränsvärdet

$$(\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m, |\mathbf{v}|=1) \to \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} = f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) \text{ existerar,}$$

så kallas detta gränsvärde för RIKTNINGSDERIVATA AV f i $\mathbf{a}$ I RIKTNINGEN $\mathbf{v}$, skrives $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$.

a) $f'_x = f'_{(1,0,0)}$

$f'_y = f'_{(0,1,0)}$

$f'_z = f'_{(0,0,1)}$

b) $f'_{-\mathbf{v}} = -f'_{\mathbf{v}}$

SATS {beräkning av $f'_{\mathbf{v}}$!}

Ⓣ Om $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar i $\mathbf{a}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, $|\mathbf{v}|=1$ så är $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{v}$ [← längden av projektionen av grad $f(\mathbf{a})$ på $\mathbf{v}$]

Bevis

$$\frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{v})-f(\mathbf{a})}{t} \underset{\underset{\text{f är diff-bar}}{\uparrow}}{=} \frac{\text{grad } f(\mathbf{a})\bullet(t\mathbf{v}) + |t\mathbf{v}|\rho(t\mathbf{v})}{t} =$$

$$= \text{grad } f(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{v} \pm 1 \cdot \rho(t\mathbf{v}) \xrightarrow[\text{då } t\to 0]{} \text{grad } f(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{v} + 0$$

V.S.V. ■

Fler tillämpningar av gradientvektorn:
egenskaper

SATS $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, f är C^1 i $D \subseteq \mathbb{R}^m$

(1) Om D är bågvis shgd och grad $f(\mathbf{x}) = \vec{0}$ för alla $\mathbf{x} \in D$ så är f konstant på D.

(2) grad $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ är ett normalfält, dvs.
$(\mathbf{x} \in D)$ $\mathbf{x} \longmapsto \text{grad } f(\mathbf{x})$

$m=2$: grad $f(\mathbf{a}) \perp$ nivåkurvan $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ ← $\perp$ tangent

$m=3$: grad $f(\mathbf{a}) \perp$ nivåytan $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ ← $\perp$ tangentplanet (grad $f(\mathbf{a}) \neq \vec{0}$)

(3) I en punkt $\mathbf{a} \in D$ växer $f(\mathbf{x})$ snabbast i riktningen grad $f(\mathbf{a})$ och $\overset{\text{avtar}}{\text{den}}$ maximala tillväxten är $|\text{grad } f(\mathbf{a})|$.

Bevis

(1) Välj $\mathbf{a} \in D$ (fixt), till varje $\mathbf{b} \in D$ finns en C^1-kurva $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t),\ \alpha \leq t \leq \beta$ från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{b}$ $\begin{pmatrix} \mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{a} \\ \mathbf{r}(\beta) = \mathbf{b}, \mathbf{r}(t) \in D \end{pmatrix}$

(ty D är öppen!!)

Då gäller för $h(t) = f(\mathbf{r}(t))$:

$$h'(t) = \underbrace{\text{grad } f(\mathbf{r}(t))}_{= \vec{0}} \bullet \mathbf{r}'(t) = 0 \Rightarrow h \text{ konstant (på } [a,b] \text{ ty } h \text{ är } C^0)$$

alltså $\underbrace{h(\alpha)}_{f(\mathbf{a})} = \underbrace{h(\beta)}_{f(\mathbf{b})}$ V.S.V.

(2) (slags omvändning)

För en C^1 kurva $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ i nivåytan $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ gäller

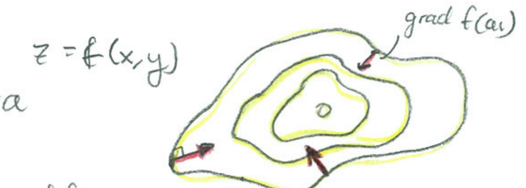
$$(f(\mathbf{r}(t)))' = \text{grad } f(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t) = 0 \quad (f(\mathbf{r}(t)) \text{ är konstant})$$

dvs. $\text{grad } f(\mathbf{r}(t)) \perp \mathbf{r}'(t)$

V.S.V.

väldigt åskådligt:

m=2: grad f ⊥ nivåkurva ("diretissima")



m=3:

③ i en riktning $\mathbb{v}$, $|\mathbb{v}|=1$, och en punkt $\mathbb{a}\in D$:

$$f'_{\mathbb{v}}(\mathbb{a}) = \text{grad } f(\mathbb{a}) \bullet \mathbb{v} = |\text{grad } f(\mathbb{a})| \cdot \overbrace{|\mathbb{v}|}^{=1} \cdot \cos\varphi$$

är störst / minst då $\cos\varphi = 1$ / $\cos\varphi = -1$, dvs. då $\varphi = 0$ (grad $f(\mathbb{a}) \parallel \mathbb{v}$) / $\varphi = \pi$ (. . . . $\parallel -\mathbb{v}$) v.s.v. !!!

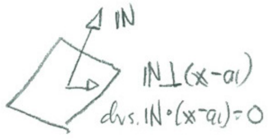
$\left(\mathbb{v} = \dfrac{\text{grad } f(\mathbb{a})}{|\text{grad } f(\mathbb{a})|}\right.$ då $\left.\cos\varphi = 1\right)$

För nivåytan $F(x,y,z) = F(a,b,c)$: grad $F(a,b,c)$ är normalvektor till tangentplanet, alltså planets ekv.:

grad $F(\mathbb{a}) \cdot (\mathbb{x} - \mathbb{a}) = 0$, skriv ut:

$$\boxed{F'_x(a,b,c)(x-a) + F'_y(a,b,c)(y-b) + F'_z(a,b,c)(z-c) = 0}$$

(ex. $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$)



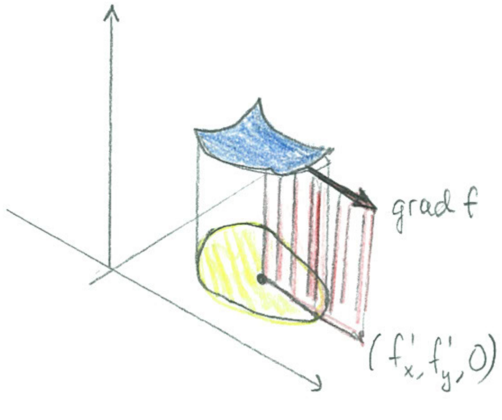
specialfall: funktionsyta $z = f(x,y)$! det är nivåytan $F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$

tangentplan: $\underbrace{F'_x}_{}(x-a) + F'_y(y-b) + F'_z(z - f(a,b)) = 0$

$f'_x(x-a) + f'_y(y-b) + (-1)(z - f(a,b)) = 0$ ← som haft !!!

sambandet:

grad f = projektionen av grad F i xy-planet



Ö 42 $Y: \quad F(x,y,z) = xyz - \arctan(x+y+z) = 0$, $F(1,-1,0) = 0-0$, dvs. $(1,-1,0) \in Y$

tangentplan till Y i punkten $(1,-1,0)$ $\Big\}$ $F'_x(1,-1,0)(x-1) + F'_y(1,-1,0)(y+1) + F'_z(1,-1,0)\cdot z = 0$

$$F'_x = yz - \frac{1}{1+(x+y+z)^2} \overset{i\,(1,-1,0)}{=} -1$$

$$F'_y = xz - \frac{1}{1+(x+y+z)^2} = -1$$

$$F'_z = xy - \frac{1}{1+(x+y+z)^2} = -2$$

$-(x-1) - 1(y+1) - 2z = 0$ eller

$\underline{x+y+2z = 0}$ Svar: ..

Kap 2 **Ö 14** VET: $f'_x - 3f'_y = 0$

linjen $\ell: 3x+y=1$ är en nivåkurva, dvs. $\ell: \begin{cases} x = t \\ y = 1-3t \end{cases}$

$f(t, 1-3t)$ är konstant, ty $\frac{d}{dt}\left(f(t,1-3t)\right) = f'_x \cdot 1 - 3f'_y = 0$!

$\boxed{\text{Ö } 35}$ $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $a = (2,3,6)$:

vilka värden antar $f'_v(2,3,6)$ för $v \in \mathbb{R}^3$, $|v| = 1$??

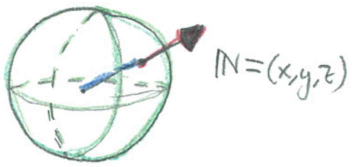
Låt $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ ("enhetssfär")

Avbildningen $\begin{array}{l} S \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \longmapsto f'_v(2,3,6) \\ \qquad \| \\ \quad \operatorname{grad} f(2,3,6) \bullet v \end{array}$ är kontinuerlig,

antar $\begin{array}{l} \text{största} \\ \text{minsta} \end{array}$ värdet $\begin{array}{l} |\operatorname{grad} f(2,3,6)| \\ -|\operatorname{grad} f(2,3,6)| \end{array}$, S är bågvis shgd, alltså antar funkt. alla värden mellan min och max (s.o.m.v.)

grad $f = (2x, 2y, 2z) = 2(2,3,6)$

$|\text{grad } f(2,3,6)| = 2\sqrt{4+9+36} = \boxed{14}$



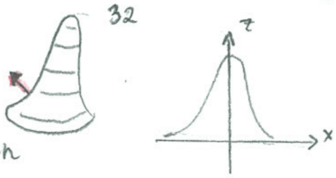
Svar: Värdemängden är $[-14,14]$.

Torsdag
2010-01-21

Rep:
- grad $f(a) = (f'_x(a), f'_y(a), f'_z(a))$: anger den riktning i vilken $f(x,y,z)$ växer snabbast
- grad $f(a) \perp$ nivåytan $f(x,y,z) = f(a)$
- $\left(f(\mathbb{r}(t))\right)' = \text{grad } f(a) \bullet \mathbb{r}'(t)$
- $f'_{\mathbb{v}}(a) = \text{grad } f(a) \bullet \mathbb{v}$

Ö 38 ytan Y: $z = f(x,y) = \frac{32}{1+x^2+y^2}$, nivåkurvor är cirklar x^2+y^2

På vilken höjd är Y brantast?



I en pkt (x,y) växer $f(x,y)$ snabbast i riktningen grad $f(x,y)$, den maximala ökningen är $|\text{grad } f(x,y)|$

$$|\text{grad } f(x,y)| = \sqrt{(f'_x(x,y))^2 + (f'_y(x,y))^2} = 32\sqrt{\left(\frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2}\right)^2 + \left(\frac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2}\right)^2} =$$

$= \frac{128}{2} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(1+x^2+y^2)^2}$: För vilket r är $h(r) = 64\frac{r}{(1+r^2)^2}$ störst?

$$h'(r) = 64\frac{(1+r^2)^2 - r \cdot 4(1+r^2)r}{(1+r^2)^4} = \frac{1-3r^2}{(1+r^2)^3} \quad \begin{matrix} >0, & r^2 < \frac{1}{3} \\ <0, & r^2 > \frac{1}{3} \end{matrix}$$: alltså :

max är $h(\sqrt{\frac{1}{3}})$, höjden är då $z = \frac{32}{1+\frac{1}{3}} = \boxed{24}$ Svar: ...

DEF $f:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R},\ a \in D_f$: vi säger:

a) f antar i a ett $\begin{matrix}\text{största}\\ \text{minsta}\end{matrix}$ värde $\begin{pmatrix}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{pmatrix}$ om $\begin{matrix} f(a) \geq f(x) \\ f(a) \leq f(x)\end{matrix}$ för alla $x \in$.

["strängt"... $f(a) > f(x)$ för $a \neq x \in D_f$

b) f antar i a ett lokalt $\begin{matrix}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{matrix}$ om det finns en omgivning U till a så att $\begin{matrix} f(a) \geq f(x) \\ \leq f(x)\end{matrix}$ för alla $x \in D_f \cap U$

c) Om f antar i a ett (lokalt) $\begin{matrix}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{matrix}$ så kallas

a (lok.) $\begin{matrix}\text{maximi}\\ \text{minimi}\end{matrix}$ pkt $\}$ "(lok.) extrempkt"

och $f(a)$ (lok.) $\begin{matrix}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{matrix}$ $\}$ "(lok.) extremvärde"

Ett nödvändigt villkor för "extrempunkt" borde vara $\text{grad}\, f(a) = \vec{0}$:

SATS {Fermats krit.}

Om $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ är partiellt deriverbar i a och antar i a ett (lok.) extremvärde så är $\text{grad}\, f(a) = \vec{0}$.

Bevis

För varje $i \in \{1, 2, .., m\}$ antar funktionen $h(x_i) = f(a_1, a_2, .., x_i, .., a_m)$ ett (lok.) extremvärde i a_i, dvs. $h'(a_i) = 0 = f'_{x_i}(a)$

V.S.V. ■

DEF $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$:

En punkt $a \in \mathbb{R}^m$ i vilken f är partiellt deriverbar med grad $f(a) = \vec{0}$ kallas STATIONÄR (till f).

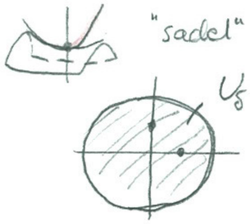
Fermat säger: Inre extrempunkter i vilka f är partiellt deriverbar, är stationära. Omvändningen gäller inte:

Ex $f(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow \text{grad } f(x,y) = (2x, -2y) = (0,0)$ i $(0,0)$ dvs. $(0,0)$ är stationär

men $(0,0)$ är ej lok. extrempunkt, ty i varje omgivning $U_\delta : x^2 + y^2 < \delta^2$ finns punkten (x_0, y_0) och (x_1, y_1)

där $f(x_0, y_0) > f(0,0) = 0$ ta t.ex. $\left(\frac{\delta}{2}, 0\right)$

$f(x_1, y_1) < f(0,0) = 0$ och $\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$



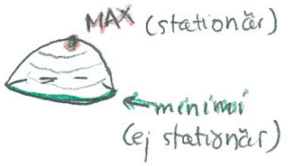
(lok.) extrempunkter finns bland:

(I) inre punkt: stationära

(II) inre punkt, i vilka f inte är part. deriverbar

(III) randpkt

Ex



För att "se" vilken typ (karaktär) en stationär pkt har tar man <u>högre ordn.</u> derivator till hjälp.

DEF $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

En stationär punkt som inte är (lok.) extrempkt. kallas SADELPUNKT.

Ex (0,0) är sadelpkt till $z = x^2 - y^2$.

SATS { Taylorpolynomet }

<u>Föruts.:</u> $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är C^3 i en omgivning U till $a = (a,b)$

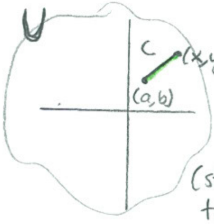
<u>Påst.:</u> För $(x,y) \in U$ gäller:

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) + \\ & + \frac{1}{2}\left\{ f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)(y-b)^2 \right\} + \end{aligned}\right\}$$ Taylorpolynom av ordning 2 till f i (a,b)

$$\underbrace{+\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)^3 B(x,y)}_{\underbrace{R_2(x,y)}_{\text{se beviset}} \text{ (resttermen)}}$$

B(x,y) är en fkt som är begränsad i en omgivning till (a,b)

$h = x-a$
$k = y-b$



$(x,y) = (a+h, b+k)$

$C: (x,y) = (a+th, b+tk),\ 0 \le t \le 1$

(sträckan från (a,b) till (x,y) |h|, |k| så små att $C \subseteq U$

Bevis

Betrakta $F(t) = f(a+th, b+tk)$, $0 \le t \le 1$ (dvs. beräkna f(x,y) för $(x,y) \in C$)

F är C^3 i ett öppet intervall $I \supseteq [0,1]$

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(0)t^2 + \frac{1}{3!}F'''(\tau)\cdot t^3$$ för ngt $\tau \in [0,t]$,

för t=1 fås

$$\underbrace{F(1)}_{} = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \frac{1}{6}F'''(\tau), \quad 0 \le \tau \le 1$$

$$f(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)\cdot k + \frac{1}{2}\left(f'''_{xx}(a,b)\cdot h^2 + 2f''_{xy}(a,b)h\cdot k + f''_{yy}(a,b)k^2\right) +$$

$$\left[\begin{aligned} & \left(f(a+th, b+tk)\right)' = f'_x(a+th, b+tk)\cdot h + f'_y(a+th, b+tk)\cdot k \\ & \left(f'_x(a+th,b+tk)h + f'_y(a+th,b+tk)\cdot k\right)' = f''_{xx}(a+th,b+tk)\cdot h^2 + f''_{xy}(a+th,b+tk)\cdot h\cdot k\cdot 2 \\ & + f''_{yy}(a+th,b+tk)\cdot k\cdot h \end{aligned}\right]$$

$$+ \frac{1}{6}\Big(f'''_{xxx}(\ )\cdot h^3 + \underbrace{f'''_{xxy}(\ )h^2\cdot k + 2f'''_{xyx}(\ )}_{\text{lika ty } f \text{ är } C^3}h^2k + 2f'''_{xyy}(\ )hk^2 + f'''_{yyx}(\ )k^2h + f'''_{yyy}(\ )k^3\Big)$$

$$\boxed{(\xi,\eta) = (a+\tau h, b+\tau k)}$$

där $$R_2(x,y) = \frac{1}{6}\left(f'''_{xxx}(\xi,\eta)h^3 + 3f'''_{xxy}(\xi,\eta)h^2k + 3f'''_{xyy}(\xi,\eta)hk^2 + f'''_{yyy}(\xi,\eta)k^3\right) =$$

$$= \left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3 \underbrace{\left(\frac{h^3}{(\sqrt{h^2+k^2})^3}f'''_{xxx}(\xi,\eta) + \frac{3h^2k}{(\ )^3}f'''_{xxy}(\xi,\eta) + \frac{3hk^2}{(\ )^3}f'''_{xyy}(\xi,\eta) + \frac{k^3}{(\ )^3}f'''_{yyy}(\xi,\eta)\right)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} |h| &\le \sqrt{h^2+k^2} \\ |k| &\le \sqrt{h^2+k^2} \end{aligned}}$$

= B(x,y), begränsad nära (a,b), ty alla tredje deriv. begränsade (C^3!) och |faktorerna| ≤ 3

V.S.V. ■

För beräkning av Taylorpolynomet: försök att utnyttja Taylorutv. för fkt i en variabel:

Ex Ange McLaurin-polynomet till $f(x,y) = e^x \sin y$ t.o.m. ordn. 3.

Lösn.

(B_1 ↓ begränsad)

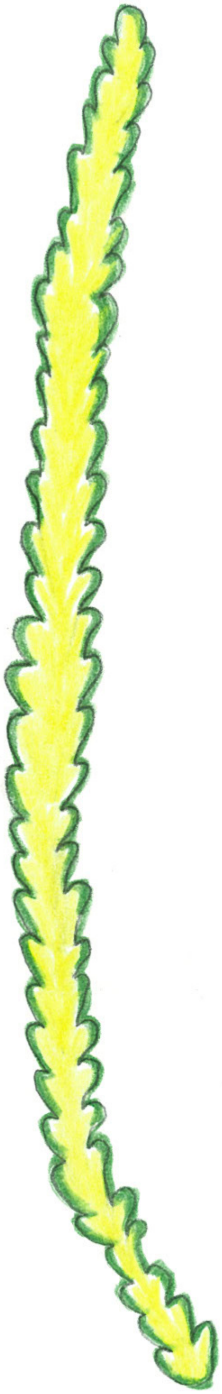
$$e^x \cdot \sin y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3 B_1(x)\right)\left(y - \frac{y^3}{6} + y^4 B_2(y)\right)$$

$$= \underbrace{y + xy + \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{6}y^3}_{\text{Svar}} + R_2(x,y)$$

Lv2

Flervariabelanalys

Med Bernhard Behrens



DEF: (1) kvadratisk form

(2) ... definit

DEF och SATS: homogen av ordn. 2

SATS: maximi-/minimi-/sadelpunkt ⟧BEVIS[

TYPEX på kvadratisk form

massa exempel

Fält

DEF: fält och...

(1) partiell deriverbarhet

(2) differentierbarhet

(3) C^p

DEF: Jacobimatris och funktionaldeterminant

Historik

ex: transformation med polära koord.

Tillämpningar (Jacobimatris):

A) differentierbar

DEF: differential

B) kedjeregeln

SATS: (1) kedjeregeln ⟧BEVIS[

(2) lokal bijektion

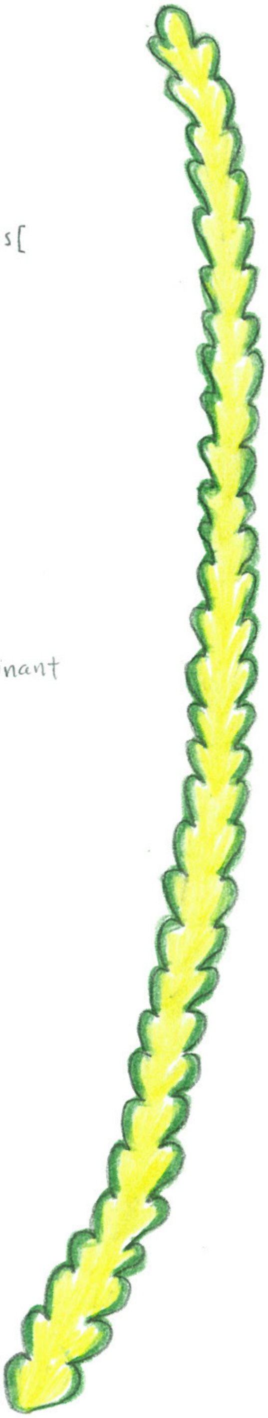
(3) invers Jacobimatris

SATS: inversa funktionsatsen

SATS: implicita funktionsatsen ⟧BEVIS[

Integralkalkyl

DEF: dubbelintegral



Mandag
2010-01-25

Rep

Om $\underset{(f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R})}{f}$ C^3 i en öppen mängd $U \subseteq \mathbb{R}^2$

så gäller $(x,y),\ (a,b) \in U$:

$$\begin{cases} h = x-a \\ k = y-b \end{cases}$$

$$f(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k +$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{ f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)\,h\cdot k + f''_{yy}(a,b)k^2 \right\} +$$
$$\underbrace{+\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3 B(x,y)}_{R_2(x,y)}$$

, om (a,b) är stationär (dvs. $\text{grad}\, f(a,b) = (f'_x(a,b), f'_y(a,b)) = (0,0)$) så har vi:

$$f(x,y) - f(a,b) = \frac{1}{2}\underbrace{\left\{ f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)\,h\cdot k + f''_{yy}(a,b)k^2 \right\}}_{\text{sätt det } = Q(h,k)} + R_2(x,y)$$

Eftersom R_2 går snabbare mot 0 än Q så borde väl gälla:

"snabbare":
av ordn. 3: innehåller $(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}$
av ordn. 2: innehåller $h^2, k^2, h\cdot k$

Om $Q(h,k) > 0$ för alla (h,k) så är (a,b) en lok. minimipkt
$ < 0$ för alla (h,k) så är (a,b) en lok. maximipkt
Om Q antar positiva och negativa värden så är (a,b) sadelpkt

Först definierar vi (viktiga) begreppet:

DEF

(1) En avbildning $\begin{aligned} Q: \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R} \\ \mathbb{h} &\longmapsto \mathbb{h}\mathbb{A}\mathbb{h}^T \end{aligned}$, $\mathbb{A}$ en symmetrisk $m \times m$-matris kallas

KVADRATISK FORM (i $\mathbb{h}$) (quadratic form, form = avbildning till $\mathbb{R}$)

Ex

m=2: $Q(h,k) = [h \ k]\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$

m=3: $Q(h,k,l) = [h \ k \ l]\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ k \\ l \end{bmatrix} = Ah^2 + Dk^2 + Fl^2 +$
$+ 2Bhk + 2Chl + 2Ekl$

(2) En kvadratisk form $Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ kallas

POSITIVT DEFINIT om $Q(\mathbb{h}) > 0$ för $\mathbb{h} \neq \vec{0}$

NEGATIVT DEFINIT om $Q(\mathbb{h}) < 0$ för $\mathbb{h} \neq \vec{0}$

INDEFINIT om Q antar (minst ett) positivt och ett negativt värde.

POSITIVT SEMIDEFINIT om $Q \geq 0$ för alla $\mathbb{h}$ och $Q(\mathbb{h}_0) = 0$ för en $\mathbb{h}_0 \neq \vec{0}$

NEGATIVT - - ≤ 0 - -

DEF och **SATS**

En kvadratisk form $Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ är HOMOGEN AV ORDNING 2, dvs: $Q(t\mathbb{h}) = t^2 Q(\mathbb{h})$ ("se det").

SATS

Föruts.:
- $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ är C^3 i en öppen mängd U
- $(a,b) \in U$ är en stationär punkt
- $Q(h,k) = f''_{xx}(a,b)\,h^2 + 2 f''_{xy}(a,b)\,h \cdot k + f''_{yy}(a,b)\,k^2$

Påst:

(1) Om Q är positivt definit så är (a,b) en sträng lok. minimipkt.

(2) Om Q är negativt definit ——— " ——— maximipkt.

(3) Om Q är indefinit så är (a,b) en sadelpunkt.

[OBS: Ingen utsaga om Q är semidefinit]

Bevis

$$f(x,y) - f(a,b) = \frac{1}{2} Q(h,k) + \left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3 \overset{\text{begränsad nära } (a,b)}{\overbrace{B(x,y)}}$$

(1) Q är kontinuerlig på $\delta^1 = \{(x,y) : x^2+y^2=1\}$ (enhetscirkel)
δ^1 är kompakt, alltså antar Q på δ^1 ett minsta värde δ_1, dvs.
det finns (h_0, k_0), $h_0^2 + k_0^2 = 1$, med $Q(h_0,k_0) = \delta_1 \leq Q(h,k)$
för alla $(h,k) \in \delta^1$, alltså:

för godt. $(h,k) \neq (0,0)$ gäller: $Q\Big(\underset{\in \delta^1}{\underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}, \frac{k}{\sqrt{k^2+k^2}}}}\Big) \overset{\text{homogen}}{=} \frac{1}{h^2+k^2} Q(h,k) \geqslant \underbrace{\delta_1 > 0}_{\text{ty } Q \text{ pos. def.}}$

alltså:
$$f(x,y) - f(a,b) = \frac{1}{2} Q(h,k) + (h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}\, B(x,y) \geqslant$$
$$\geqslant (h^2+k^2)\Big(\frac{1}{2}\delta_1 + \underbrace{\sqrt{h^2+k^2}\, B(x,y)}_{\downarrow \atop 0}\Big) \quad \text{då } (h,k) \to (0,0)$$

det ger: det finns R_{δ_1} så att
$$\left|\sqrt{h^2+k^2}\, B(x,y)\right| < \overset{\text{t.ex.}}{\frac{\delta_1}{4}} \quad \text{för } (h,k) \text{ så att } h^2+k^2 < R_{\delta_1}^2$$

det visar

det visar: $f(x,y) - f(a,b) > 0$ för alla $(x,y) \in \underbrace{B_{R_{\delta_1}}(a,b)}_{(x-a)^2+(y-b)^2 < R_{\delta_1}^2}$

$\Rightarrow$ (a,b) är lokal (sträng) minimipkt. v.s.v.

(2) som ovan: Q antar ett maximum δ_2 på S^1:

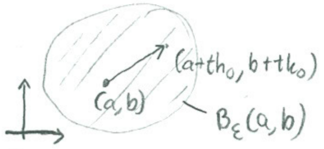
$Q(h,k) < (h^2+k^2)\,\delta_2$ ....

(3) liknande:

finns $\left.\begin{matrix} Q(h_0,k_0) > 0 \\ Q(h_1,k_1) < 0 \end{matrix}\right\}$ för varje $B_\varepsilon(a,b)$: $(x-a)^2+(y-b)^2 < \varepsilon^2$ finns t (tillr. litet) så att

$(a+th_0, b+tk_0) \in B_\varepsilon(a,b)$

$(a+th_1, b+tk_1) \in B_\varepsilon(a,b)$



då är $f(a+th_0, b+tk_0) - f(a,b) = t^2(Q(h_0,k_0) + t\cdot(\quad)^3 B(x,y)) > 0$

och $f(a+th, b+tk) - f(a,b) = t^2(Q(h_1,k_1) + \ldots \to 0$ då $t \to 0 < 0$

(t tillr. litet)

dvs.: (a,b) är sadelpkt

v.s.v. ■

TYPEX på kvadr. form: (standard)

Ex (a) $Q_1(h,k) = h^2+k^2$: positivt definit

$Q_2(h,k) = -h^2-k^2$: negativt definit

(b) $Q_3(h,k) = h^2-k^2$:

$Q_4(h,k) = h\cdot k$: indefinit ty t.ex. $\left\{\begin{matrix} Q_3(1,0)>0, \ Q_3(0,1)<0 \\ Q_4(1,1)>0, \ Q_4(1,-1)<0 \end{matrix}\right.$

(c) $\left\{\begin{matrix} Q_5(h,k) = h^2 \pm hk + k^2 = \left(h \pm \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}h^2 \\ Q_6(h,k) = h^2 \pm 4hk + k^2 = (h \pm 2k)^2 - 3k^2 \end{matrix}\right.$: positivt definit ; indefinit (t.ex. $Q_6(1,0)>0$, $Q_6(1,\mp\frac{1}{2})<0$)

Kvadratkomplettera (kan bli besvärligt för $m \geq 3$, enklast: lin-alg)

(d) $Q_7(h,k) = h^2 \pm 2hk + k^2 = (h \pm k)^2$: (bara!) positivt <u>semidefinit</u>

($Q_7(1,\mp 1) = 0$!)

Ex Bestäm alla stationära pkt till $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ och deras typ.

Lösning

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ \text{och} \quad f'_y = 6xy - 12 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases} \underset{\text{subtrahera}}{\iff} (x-y)^2 = 1$$

fall1 $x - y = 1$: $f'_y = 0$ ger $xy - 2 = x(x-1) - 2 = x^2 - x - 2 =$
$= (x-2)(x+1) = 0$:

fall2 $x - y = -1$: $f'_y = 0$ ger $xy - 2 = x(x+1) - 2 = x^2 + x - 2 =$
$= (x-1)(x+2) = 0$:

kandidater:
$(2,1)$
$(-1,-2)$
$(1,2)$
$(-2,-1)$

Typ? Beräkna $Q(h,k)$ för dessa pkt :

	(a,b)	$(2,1)$	$(-1,-2)$	$(1,2)$	$(-2,-1)$
$f''_{xx} =$	$6x$	12	-6	6	-12
$f''_{yx} =$	$6y$	6	-12	12	-6
$f''_{yy} =$	$6x$	12	-6	6	-12

$f''_{xx} + 2f''_{xy} + f''_{yy}$

för $(2,1)$: $Q(h,k) = 12h^2 + 12hk + 12k^2 = 12(h^2 + hk + \overset{\text{s.o.}}{k^2})$: positiv defin.

Svar: $(2,1)$ är lok. minimi...

$(-1,-2)$: $Q(h,k) = -6h^2 - 24hk - 6k^2 = -6(h^2 + 4hk + k^2)$: indefinit

$(-1,-2)$ är sadelpkt

± (gör det)

Onsdag
2010-01-27

Rep

$f \; C^3$. $\; f(x,y) - f(a,b) = \frac{1}{2} \underbrace{\left(f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2 \right)}_{Q(h,k)} + \; + R_2(x,y)$

$a = (a,b)$ stationär

ordn. ≥ 3

Om Q positivt definit så är (a,b) str. lok. minimipunkt
negativt ... maximipunkt
indefinit ... sadelpunkt

Ex (a) $f(x,y) = (x-y)^2 + y^3$: ← stat. pkt, typ?

$$\begin{cases} f'_x = 2(x-y) = 0 \\ f'_y = -2(x-y) + 3y^2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{sätt in}} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0 :$$

(0,0) är enda stationära pkt. , typ?

$f(x,y) = (x-y)^2 + y^3$: $Q(x,y) = 2(x-y)^2$ är bara positivt semidefinit.

Kriteriet ger inget!

Vi ser: I varje omgivning $B_\varepsilon(0,0)$: $x^2+y^2 < \varepsilon^2$ till (0,0)
finns (x_0, y_0) resp. (x_1, y_1) med $f(x_0,y_0) > f(0,0) = 0$
och $f(x_1,y_1) < f(0,0) = 0$
t.ex. $(x_0,y_0) = (\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$ resp. $(x_1,y_1) = (-\frac{\varepsilon}{2}, -\frac{\varepsilon}{2})$,
dvs.: (0,0) är en sadelpunkt.

Ö 9.1 $f(x,y) = x^2 + 2xy + xy^2$ ← stat. pkt, typ?

Lösn.: ser direkt: (0,0) är stationär ($f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$!),
typ: sadelpunkt ty

$$2\,Q(x,y) = x^2 + 2xy \quad \text{är indefinit} \quad (Q(1,1) > 0,\ Q(1,-1) < 0).$$

Övriga:
$$\begin{cases} f'_x = 2x + 2y + y^2 = 0 \\ f'_y = 2x + 2xy = 0 = 2x(1+y) \end{cases}$$

Kandidater:
(0,0)
(0,-2)
$(\frac{1}{2}, -1)$

fall 1: $x = 0$: $\underset{f'_x=0}{\Longrightarrow}$ $y(2+y) = 0$

fall 2 $x \neq 0$: då är $y = -1$
och $f'_x = 0$ ger $2x = 1$, dvs. $x = \frac{1}{2}$

Typ:

(a,b)	$(0,-2)$	$(\frac{1}{2},-1)$
$f''_{xx} = 2$	2	2
$f''_{xy} = 2+2y$	-2	0
$f''_{yy} = 2x$	0	1

i $(0,-2)$: $Q(h,k) = 2h^2 - 4hk$:
indefinit $\begin{pmatrix} Q(1,1) < 0 \\ Q(1,-1) > 0 \end{pmatrix}$
ger: $(0,-2)$ är sadelpunkt

i $(\frac{1}{2},-1)$: $Q(h,k) = 2h^2 + k^2$:
positivt definit,
ger: $(\frac{1}{2},-1)$ är str. lok. minimipkt

Ö 68c

$$f(x,y,z) = e^{xyz}\left(1 - \arctan\left(x^2+y^2+2z^2\right)\right)$$

Visa att origo är en stationär pkt och bestäm dess typ.

Lösn.: "Maclaurinutveckla" t.o.m. ordn. 2

VET: $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots$
$\arctan t = t \ (-\frac{t^3}{3} + \ldots)$

$$e^{xyz}\left(1-\arctan(x^2+y^2+2z^2)\right) =$$
$$= (1 + xyz + \ldots)\left(1 - (x^2+y^2+2z^2) + \ldots\right) = 1 - \underbrace{(x^2+y^2+2z^2)}_{Q(x,y,z)} +$$

$Q(x,y,z)$ negativt def. $\Rightarrow$ origo är str. lok. maximipkt

inga ordn. 1 termer dvs. $f'_x = f'_y = f'_z = 0$ (i origo)
det visar: origo är stationär

Ö 68 d

$$f(x,y,z) = 1 + \underbrace{x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2xy + 6yz - 2xz}:$$

(0,0,0) är stationär
(inga ordn. 1 termer

2

$$Q(x,y,z) = (x-y-z)^2 + y^2 + 3z^2 + 4yz$$
$$= (x-y-z)^2 + (y+2z)^2 - z^2$$

är indefinit ty t.ex. $Q(1,1,0) > 0$
$Q(-1,-2,1) < 0$

Anm $Q(h,k,l) = (h+k)^2 + (k+l)^2 + (h+2k+l)^2$ är bara pos. semidefinit

t.ex. $Q(-1,1,-1) = 0$.

Ö61 b

$$f(x,y) = (x+1)^{y+1} = e^{(y+1)\ln(x+1)} =$$
$$= 1 + (y+1)\left(x - \frac{x^2}{2} + \ldots\right) + \frac{1}{2}(y+1)^2(x+\ldots)^2 =$$
$$= 1 + x - \frac{x^2}{2} + xy + \frac{1}{2}\,1\cdot x^2 + \ldots \text{ (högre ordn.)}$$
$$= 1 + x + xy + R_2(x,y)$$

$$e^t = 1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 + t^3 B_1(t)$$
$$\ln(x+1) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + x^3 B_2(x)$$

Fält

Nu behandlar vi fält $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x}))$$

f ges av sina koordinatfkt. $f_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$\mathbf{x} \longmapsto f_j(\mathbf{x}) = \text{j:te koordinaten av } \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

Ex

a) $Id_{\mathbb{R}^n} = f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$\mathbf{x} \to \mathbf{x}$, $f_j(\mathbf{x}) = x_j$ [projektionen: $p_j : \mathbf{x} \longmapsto (0, \ldots, x_j, \ldots, 0)$]

b) normering: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$\mathbf{x} \longmapsto \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$

$D_f = \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$

$V_f = S^1 = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| = 1\}$ (enhetssfären)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har vi $f'(a)$

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ har vi $\text{grad } f(a) = (f'_{x_1}(a), \ldots, f'_{x_m}(a))$

Vad motsvarar $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$?

DEF $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$: vi säger:

FÄLTET $\mathbf{f}$ är

(1) partiellt deriverbart i $\mathbf{a}$, om alla f_j är partiellt deriverbara i $\mathbf{a}$

(2) differentierbart i $\mathbf{a}$, - - - - - - - - differentierbara i $\mathbf{a}$

(3) C^p $(p \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ i $\mathbf{a}$, - - - - - - - C^p

$j \in \{1, 2, \dots, n\}$

Ex En kurva $\mathbf{r} : \underset{t \longmapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))}{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m}$ är deriverbar om alla x_i är deriverbara. $(m = 1)$

!! **DEF** $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$; om $\mathbf{f}$ är partiellt deriverbart i $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, så kallas matrisen

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}) =$$

utförligt

$$\frac{\partial (f_1, \dots, f_n)}{\partial (x_1, \dots, x_m)}(\mathbf{a}) =$$

$$\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(\mathbf{a}) \\ & \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \operatorname{grad} f_1(\mathbf{a}) - \\ - \operatorname{grad} f_2(\mathbf{a}) - \\ \vdots \\ - \operatorname{grad} f_n(\mathbf{a}) - \end{bmatrix}$$

för JACOBI MATRIS TILL $\mathbf{f}$ i $\mathbf{a}$.
(FUNKTIONAL-)

Det är en $n \times m$-matris, rad j = grad $f_i(\mathbf{a})$,
i rad j / kolonn k står elementet $[\quad]_{jk} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{a})$

Om $n = m$, så kalla determinanten av $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ för
JACOBI DETERMINANT TILL $\mathbf{f}$ i $\mathbf{a}$
(FUNKTIONAL-)

bet.: $\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{a}) = \frac{d(f_1, \ldots, f_n)}{d(x_1, \ldots, x_n)} = \det(\mathbf{f}'(\mathbf{a}))$

Euler (1755) skriver $\left(\frac{df}{dx_j}\right)$ (med parent.)
CAUCHY (1832) föreslog att lämna bort parent. $(D_{x_j} f)$
C.G. JACOBI införde en egen symbol ∂ (avrundat d)

Historik

Ex

(1) $m = n = 1$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f'(a) = [\, f'(a) \,]$: 1×1-matris (ett tal, = det.)

(2) $m = 1$: $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
$t \mapsto (x_1(t), \ldots, x_n(t))$: $\mathbf{r}'(a) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}$ = $n \times 1$ - matris
(= kolonnvektor =
= tangentvektor $\mathbf{r}'$)

(3) $n = 1$; $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
$\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = [\, f_{x_1}'(\mathbf{a}), f_{x_2}'(\mathbf{a}), \ldots, f_{x_n}'(\mathbf{a}) \,] =$
$= 1 \times m$ -matris (= radvektor = grad $f(\mathbf{a})$)

"transformation"

Ex (1) polära koordinater: $\mathbb{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$

$(x,y) \mapsto (r,\varphi)$ $\quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$ $(x>0)$

$$\mathbb{T}'(x,y) = \frac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} r'_x & r'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{bmatrix}$$ DO IT

$$\frac{d(r,\varphi)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r} \;!!$$

eller: (2) $\mathbb{T}^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(r,\varphi) \mapsto (x,y)$ $\quad \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$:

$$(\mathbb{T}^{-1})' = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{bmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix},$$

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$

Tillämpningar: A) diff. bar B) kedjeregeln C) inversa fkt. satsen

A) $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ är differentierbart i $\mathbf{a}$ om varje f_j är diff-bar i $\mathbf{a}$, dvs. för $j \in \{1, \dots, n\}$ gäller:

$$f_j(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f_j(\mathbf{a}) = \operatorname{grad} f_j(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{h} + |\mathbf{h}|\,\rho_i(\mathbf{h})$$

där $\rho_i(\mathbf{h}) \to 0$ då $\mathbf{h} \to \vec{0}$

Skriv upp alla dessa n-ekv. som ett ekv. system:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f_1(\mathbf{a}) \\ f_2(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f_2(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f_n(\mathbf{a}) \end{bmatrix}}_{} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} + |\mathbf{h}| \underbrace{\begin{bmatrix} \rho_1(\mathbf{h}) \\ \rho_2(\mathbf{h}) \\ \vdots \\ \rho_n(\mathbf{h}) \end{bmatrix}}_{\vec{\rho}(\mathbf{h})}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'(\mathbf{a}) \overset{\text{matrismult.}}{\cdot} \mathbf{h} + |\mathbf{h}| \cdot \vec{\rho}(\mathbf{h}) \quad \text{där } \vec{\rho}(\mathbf{h}) \to \vec{0} \text{ då } \mathbf{h} \to \vec{0}$$

dvs. $\mathbf{f}$ är differentierbart i $\mathbf{a}$ om den linjära avbildningen

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^n \\ \mathbf{h} &\mapsto \mathbf{f}'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} \end{aligned}$$

("linearisering av $\mathbf{f}$")

approximerar $\mathbf{f}$ i $\mathbf{a}$ så bra att det relativa felet

$$\vec{\rho}(\mathbf{h}) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{f}'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} \longrightarrow \vec{0} \quad \text{då } \mathbf{h} \to \vec{0}$$

den är så viktig att den fått ett eget namn:

DEF

Om $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ är part. deriverbart i $\mathbf{a}$ så kallas den linjära avbildningen

$$d\mathbf{f}(\mathbf{a}) : \begin{aligned} \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^n \\ \mathbf{h} &\mapsto \mathbf{f}'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} \end{aligned}$$

för DIFFERENTIAL AV $\mathbf{f}$ i $\mathbf{a}$, bet.

(totala derivatan)

Ex (1) $m=n=1$: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad df(a): h \longmapsto f'(a)h$ (ger tangent)

$m=2, n=1$: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\quad df(a): \mathbf{h} \longmapsto \operatorname{grad} f(a)\cdot\mathbf{h}$ (ger tangentplan)

(2) $m=n=1$: Identiteten $g(x)=x$ har i varje a $g'(a)=1$, dvs :

$dg(a)(h) = 1\cdot h$, skriver det utan a lämna bort h

$dg\,\cancel{(h)} = h$

$\boxed{dx = h}$

för godt. deriverbar f :

$df(a)(h) = f'(a)\cdot h$

$\boxed{df = f'dx}$

Analogt för $m\geq 2$: för $f(x,y)$:

$df = f'_x\,dx + f'_y\,dy \quad \ldots$

(PB 2.7 / 3.2)

Dessa linj. avbildningen kallas "differentialform"

("form" = avbildning till $\mathbb{R}$)

Användes gärna i fysik:

För att framhäva variabelns oberoende skriver man "lagar" på differentialform.

Ex (ö71 h ..?) Termodynamikens gaslag lyder :

$$f(p,V,T) = \frac{pV}{T} = \text{konstant} \quad \begin{pmatrix} p: \text{tryck} \\ V: \text{volym} \\ T: \text{temperatur} \end{pmatrix}$$

$$df = f'_p\,dp + f'_V\,dV + f'_T\,dT = 0$$

$$\boxed{\frac{V}{T}\,dp + \frac{p}{T}\,dV - \frac{pV}{T^2}\,dT = 0}$$

B) Kedjeregeln

SATS

Föruts.: $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ g, f är C^1, $V_g \subseteq D_f$: $(p, n, m \in \mathbb{N})$:

Påst.: (1) $h = f \circ g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ är C^1 med
$t \longmapsto f(g(t))$

!!! $\boxed{h'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)}$ OBS: ordningen

Jacobimatrisen till $f \circ g$ = Jacobimatrisen till f · Jacobimatrisen till g

Bevis kedjeregeln för varje koordinatfkt

(2) $p = m = n$:

Om f och g är lokalt bijektiva så är $f \circ g$ lok. bijektiv.
(bevis: se nedan)

(3) $m = n$: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: Om f är lokalt bijektiv (i a)
$(g = f^{-1})$ så är f^{-1} C^1 med

$$\boxed{(f^{-1})'(f(a)) = (f'(a))^{-1}}$$

dvs.

Jacobimatrisen till f^{-1} (f invers) = den till Jacobimatrisen till f inversa matrisen
↖ i $f(a)$ ↖ i a

för determinanterna: $(\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B)$

$$\frac{d(f \circ g)}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dg}{dx}, \quad \overset{\text{i } f(a)}{\downarrow}\frac{df^{-1}}{dx} = \overset{\text{i } a}{\downarrow}\frac{1}{\frac{df}{dx}}$$

$dt \rightarrow$ $dt \nearrow$

← se ex. ovan: polära koordinater!

Skriv $y = f(x(t))$

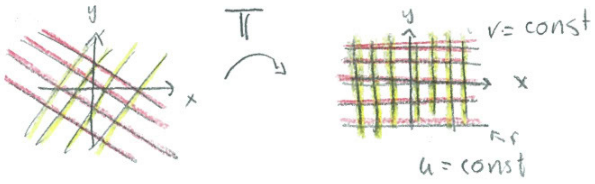
$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$$

WOW!!

Ex Linjär transformation ("basbyte"): $\mathbb{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (u,v)$ $\begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases}$

$$\mathbb{T}' = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$\frac{d\mathbb{T}}{d\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



Om $\frac{d\mathbb{T}}{d\mathbf{x}} \neq 0$ så är ekv. systemet $\begin{matrix} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{matrix}$ entydigt lösbart för varje u, v, dvs. $\mathbb{T}$ <u>är bijektiv</u>

Förmodar: Om $\mathbf{f}$ är differentierbart i $\mathbf{a}$, dvs. approximeras av den linjära avb. $d\mathbf{f}(\mathbf{a})$ $(\mathbf{h} \longmapsto \mathbf{f}'(\mathbf{a})\mathbf{h})$ så bra att..., om $d\mathbf{f}(\mathbf{a})$ är bijektiv $\leftarrow$ dvs. $\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{a}) \neq 0$ så är väl även $\mathbf{f}$ bijektiv (nära $\mathbf{a}$).

f?

Rep $f : X \rightarrow Y$ kallas

(1) injektiv om för $x_1, x_2 \in D_f$ gäller: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

(2) surjektiv om $Y = V_f$

(3) bijektiv, om $D_f = X$, $V_f = Y$ och f injektiv (inj + surj.)

SATS { inversa fkt. satsen }

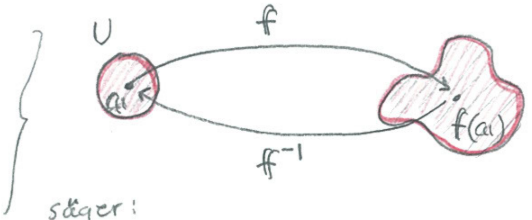
<u>Föruts.</u>: $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är C^1 i en omgivning till $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$

<u>Påst.</u>: Om $\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{a}) \neq 0$ så finns en omgivning U till $\mathbf{a}$ och en omgivning V till $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ så att (restriktionen av $\mathbf{f}$ till U):

$f|_U : U \longrightarrow V$ är bijektiv

och $(f|_U)^{-1} : V \longrightarrow U$ är C^1

(skriver bara f ist. f. $f|_U$)



säger:

f är lokalt i a bijektiv

Ex polär subst. (s.o.) $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = r$ ger: polär subst. $(r,\varphi) \longmapsto (x,y)$ är lokalt i varje pkt $(a,b) \neq (0,0)$ bijektiv

(ej ("globalt") bijektiv: sinus / cosinus har period 2π !!)

Kap.3 Ö.21

$\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$(x,y,z) \longmapsto (u,v,w)$

$u = x+y-z = x+(y-z)$ är lokalt bijektiv.
$v = x-y+z = x-(y-z)$
$w = x^2+y^2+z^2-2yz = x^2+(y-z)^2$

Lösn:

$$\frac{d\Pi}{d\mathbf{x}} = \frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2x & 2y-2z & 2z-2y \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ x & y-z & 0 \end{vmatrix} = 0,$$ (inversa funktions-) satsen ger inget !!

Π är ej injektiv

$\Pi(a,b,c) = \Pi(a, b+2, c+2)$

Torsdag
2010-01-28

Rep $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$:

funktional-matrisen:
Jacobi

$$\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \text{grad } f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \text{grad } f_n(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{rad } 1 \\ \vdots \\ \leftarrow \text{rad } n \end{matrix} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$$

- - - -determinant:
(m=n)

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} = \frac{d(f_1, \dots, f_n)}{d(x_1, \dots, x_n)}$$

$$\left(\underbrace{\frac{\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{f}'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}}_{\uparrow \text{ diff.bar}} \to 0 \right)$$

differentialen till $\mathbf{f}$ i $\mathbf{a}$ $\quad d\mathbf{f}(\mathbf{a})$

= den linjära avb: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$\mathbf{h} \mapsto \mathbf{f}'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}$

(3.4, sats 2): invers flts: $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}$ C^1

Om $\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{a}) \neq 0$ så är $\mathbf{f}$ lokalt i $\mathbf{a}$ bijektiv och $\mathbf{f}^{-1}$ är C^1

$\mathbf{h}'(t) = (\mathbf{f} \circ \mathbf{g})' = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{g}'(t)$ | utförligt för $m = n = 2$:

$$\mathbf{g}(u,v) = (x(u,v), y(u,v)), \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2)$$

$$\mathbf{h}(u,v) = (h_1(u,v), h_2(u,v)) = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}(u,v) = (f_1(x(u,v), y(u,v)), f_2(x(u,v), y(u,v)))$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{kolla !!}$$

Ex.
(jmf med föreg. Ö)

$$\mathbb{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \begin{cases} u = x+y-z \\ v = x-y+z \\ w = x^2+y^2+z^2 \end{cases} \qquad \text{lok. bij?}$$
$$(x,y,z) \longmapsto (u,v,w)$$

$$\frac{d\mathbb{T}}{d\mathbf{x}} = \frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix} \overset{\oplus}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ y & z \end{vmatrix} = -4(y+z),$$

inversa fkt.satsen ger: $\mathbb{T}$ är lokalt i varje punkt (a,b,c) med $b+c \neq 0$ bijektiv.

Problemställning

Definierar en ekvation ("ett implicit samband") en funktion, dvs: kan man lösa ut några variabler som en fkt. av de övriga?

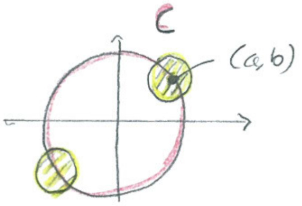
$m=2$: Definierar $F(x,y) = c$ y som en fkt. av x åtminstone lokalt
[dvs: är nivåkurvan $F(x,y)=c$ en fkt-kurva $y=f(x)$ (nära a)?]

$m=3$: Definierar $F(x,y,z)=c$ z som en fkt. av (x,y) lokalt?
[är nivåytan ... ...en funktionsytan $z=f(x,y)$ (nära (a,b))?]

Ex

$m=2$: a) $F(x,y) = xy$: nivåkurvan $xy=1$ kan skrivas $y=\frac{1}{x}$

b) $F(x,y) = x^2+y^2$: nivåkurvan C; $x^2+y^2=1$
kan skrivas nära en punkt (a,b)
med $b \neq 0$ $(a^2+b^2=1)$ är



C: $y=\sqrt{1-x^2}$ om $b>0$

$y = -\sqrt{1-x^2}$ om $b<0$

Det går inte om $b=0$:

I varje omgivning till $(1,0)$ ligger punkter (x,y_1) och (x,y_2) på C med $y_1 \neq y_2$.

Vad får inte inträffa? C får inte ha lodrät tangent
dvs. normalen // grad $F \neq (n,0)$ ↖ $F'_y \neq 0$

$m=3$: c) $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$: nivåytan $x^2+y^2+z^2=1$ (sfär)

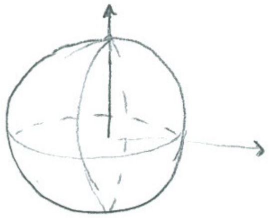
kan skrivas nära (a,b,c) med $c \neq 0$:

dvs. $F'_z(a) \neq \vec{0}$

$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ om $c>0$

$z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ om $c<0$

$c=0$: omöjligt: där tangentp $\perp$ xy-pl.
dvs.: grad $F \neq (n_1,n_2,0)$



SATS

{ 3.4, sats 3 : "implicita fkt. satsen" }

$m=2$: $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är C^1 i en omgivning till (a,b)
Om $F'_y(a,b) \neq 0$ så definierar ekvationen $F(x,y)=F(a,b)$
y som en C^1-funktion av x: $y=f(x)$, lokalt i (a,b)

[dvs.: det finns en omgivning U till (a,b) så att
$U \cap$ (nivåkurvan $F(x,y)=F(a,b)$) är fkt. kurva $y=f(x)$]
$(b=f(a))$

f' fås genom att derivera $F(x, f(x)) = F(a,b)$:

$$\frac{d}{dx} F(x, f(x)) = F'_x \cdot 1 + F'_y \cdot f' = 0 \Rightarrow f' = -\frac{F'_x}{F'_y} \quad \text{(nära } a\text{)}$$

m=3: $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ är C^1 i en omg. till (a,b,c):
Om $F'_z(a,b,c) \neq 0$ så definierar ekv. $F(x,y,z) = F(a,b,c)$
z som en C^1-fkt av (x,y): $z = f(x,y)$, lokalt i (a,b,c).

[det finns en omgivning U till (a,b,c) så att
$U \cap$ (nivåytan $F(x,y,z) = F(a,b,c)$) är fkt.ytan $z = f(x,y)$ (nära (a,b))]

z'_x, z'_y fås genom att derivera $F = c$:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y,f(x,y)) = F'_x \cdot 1 + F'_y \cdot 0 + F'_z \cdot f'_x = 0 \Rightarrow f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y,f(x,y)) = F'_x \cdot 0 + F'_y \cdot 1 + F'_z \cdot f'_y = 0 \Rightarrow f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Bevis

m=2: $\Pi : (x,y) \longmapsto (u,v) : \begin{cases} u = x \\ v = F(x,y) \end{cases}$

är lokalt i (a,b) bijektiv ty $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ F'_x & F'_y \end{vmatrix} = F'_y(a,b) \neq 0$

m=3: $\Pi : (x,y,z) \longmapsto (u,v,w) : \begin{cases} u = x \\ v = y \\ w = F(x,y,z) \end{cases}$

är lokalt i (a,b,c) bijektiv ty

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ F'_x & F'_y & F'_z \end{vmatrix} = F'_z(a,b,c) \neq 0 \;!$$

∎

Ex ovan:

m=2: $F(x,y) = x^2+y^2 = 1$; $F'_y = 2y \neq 0$ då $y \neq 0$:
implicita fkt.satsen ger att lokalt i punkter (a,b) med $b \neq 0$ är $x^2+y^2=1$ en funktionskurva $y=f(x)$ $\left[f' = \frac{x}{y}\right]$

m=3: $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 1$: $F'_z = 2z \neq 0$ då $z \neq 0$ ..
.. i (a,b,c) med $c \neq 0$ är $x^2+y^2+z^2=1$ en fkt.yta $z=f(x,y)$

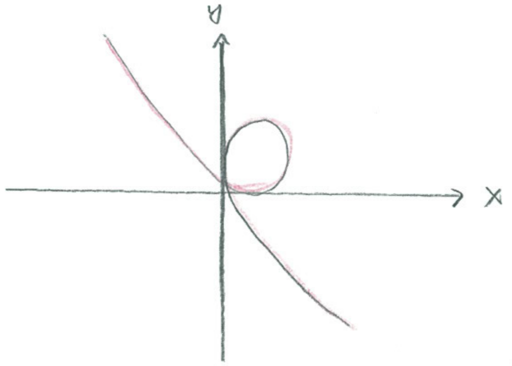
$$\left[\begin{array}{l} f'_x = -\frac{x}{z} \\ f'_y = -\frac{y}{z} \end{array}\right]$$

Ex Folium Cartesii:

C: $F(x,y) = x^3+y^3-3xy = 0$

$F'_y = 3y^2-3x = 3(y^2-x) \neq 0$ i alla punkter (a,b) med $b \neq a^2$
är C lokalt en fkt.kurva; om $b=a^2$:

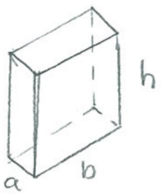
$$F(x^2,x) = 2x^3-3x^6 = x^3(2-3x^3) \quad \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}, \; y=\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2} \end{cases}$$



Integralkalkyl (6.1 - 6.3 ...)

Vi börjar med $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Utgångspkt: Volymen av ett rätblock är
med sidolängderna a, b, h



$$\underbrace{a \cdot b}_{\text{basytan}} \cdot \underbrace{h}_{\text{höjden}}$$

målet: Volymen av en kropp
(locket en fkt. kurva $z = f(x,y)$)

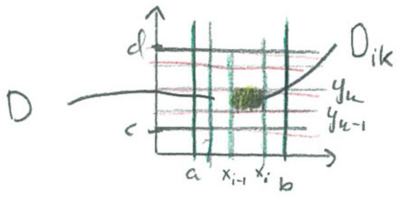
$$K = \left\{ (x,y,z) : \underbrace{\begin{matrix} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{matrix}}_{(x,y) \in D}, 0 \leq z \leq f(x,y) \right\}$$

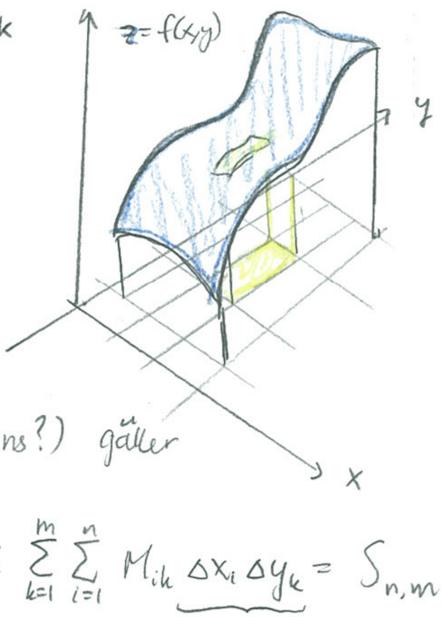
(beskriver allt "geometriskt")

Vi approximerar K med
axelparallella rätblock:

sönderdela D:

$$\begin{matrix} [a,b]: \\ [c,d] \end{matrix} \quad \begin{cases} a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \\ c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d \end{cases}, \text{ ger } D_{ik} : \begin{cases} x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ y_{k-1} \leq y \leq y_k \end{cases}$$





Om $f \geq 0$, och f kontin. på D:

f antar på varje $\underset{\text{kompakt!}\uparrow}{D_{ik}}$ ett $\begin{matrix} \text{max } M_{ik} \\ \text{min } m_{ik} \end{matrix}$

för volymmåttet $m(K)$ (om det finns?) gäller

$$\sigma_{n,m} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} m_{ik} \Delta x_i \Delta y_k \leq m(K) \leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} M_{ik} \underbrace{\Delta x_i \Delta y_k}_{\text{arean av } D_{ik}} = S_{n,m}$$

en undersumma

(godt. unders.: $n_{ik} \leq m_{ik}$

en översumma godt. övers: $H_{ik} \geq M_{ik}$,

D_{ik}: bibehåller befintliga delningslinje då vi gör sönderd. finare

$$S_{n,m} \leq I \leq S_{n,m}$$

DEF f kontin. på D: $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ Vi säger:

f är INTEGRERBAR ÖVER D om det finns precis ett tal I som ligger mellan alla under- och översummor.

I så fall skriver vi

$$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

läses: (DUBBEL) INTEGRAL AV f ÖVER D.

Lv3

Flervariabelanalys

Med Bernhard Behrens

SATS: kontinuitet $\Rightarrow$ integrerbar]] BEVIS[

DEF: (1) nollmängd
(2) mätbar

SATS: om integrerbarhet

DEF: volymmått

SATS: regler för dubbelintegraler

SATS: itererad integration (FUBINI)

massa exempel

Två underbara uppgifter

BEVIS(SKISS): itererad integration (Fubini)

Variabelsubstitution för dubbelintegral s. 56
- TYP A: linjär substitution
- TYP B: polär substitution

PROBLEMSTÄLLNING: sambandet mellan areorna $m(D)$ och $m(D')$
- för linjär transformation
- för godt. C^1-tranformation

SATS: variabelsubst. i dubbelintegral]] BEVIS[

DEF: uttömmande följd

DEF: generaliserad dubbelintegral
(a) konvergens
(b) divergens

SATS: om generaliserade dubbelintegraler

$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ >
SATS: jämförelsekriteriet
DEF: absolutintegrerbar, absolut konvergens för dubbelintegraler

Måndag
2010-02-04

6.1 ... 6.3 ..

Rep

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $D \subseteq D_f$:

f är integrerbar över D om det finns precis ett tal I som ligger mellan alla under- och översummor:

(samma bet.)

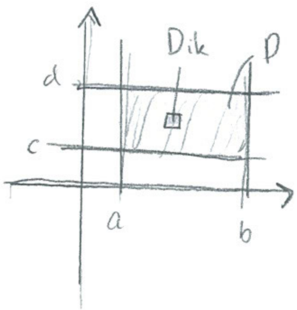
$$s_{n,m} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} h_{ik} \Delta x_i \Delta y_k \leq I \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} H_{ik} \Delta x_i \Delta y_k = S_{n,m}$$

$D: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$

$D_{ik}: \begin{cases} x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ y_{k-1} \leq y \leq y_k \end{cases}$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$



$m(D_{ik}) = \Delta x_i \Delta y_k$, $d_{ik} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_k)^2}$

(diagonalen i D_{ik})

SATS

Om f är kontinuerlig på D så är f integrerbar över D.

Bevis

$s_{n,m}$ (med $h_{ik} = m_{ik}$) är växande, begränsade uppåt (av varje $S_{n,m}$)
$S_{n,m}$ (med $H_{ik} = M_{ik}$) existerar! är avtagande, begränsade nedåt (av varje $s_{n,m}$)

alltså konvergerar $\begin{matrix} s_{n,m} \longrightarrow I_1 \\ S_{n,m} \longrightarrow I_2 \end{matrix}$ då $\max_{i,k} d_{ik} \to 0$,

då gäller:

$$\underbrace{0 \le S_{n,m} - s_{n,m} \longrightarrow 0 \quad \text{då} \quad \max_{i,k} d_{ik} \longrightarrow 0}$$ (alltså: det finns precis ett tal $I = I_1 = I_2 \dots$) v.s.v.

ty till varje $\varepsilon > 0$ finns δ_ε så att för alla i,k med $d_{ik} < \delta_\varepsilon$ gäller

(bibehåller befintliga delningslinjerna då vi gör finare sönderdelning)

$$M_{ik} - m_{ik} < \frac{\varepsilon}{m(D)}$$ [f är likf. kontinuerlig på D, ty D är kompakt]

och då:

$$S_{n,m} - s_{n,m} = \sum_k \sum_i (M_{ik} - m_{ik}) \Delta x_i \Delta y_k \le \frac{\varepsilon}{m(D)} \underbrace{\sum_k \sum_i \underbrace{\Delta x_i \Delta y_k}_{m_{ik}}}_{= m(D)} = \varepsilon$$ v.s.v.

("nu kommer det fina")

Tillägg:

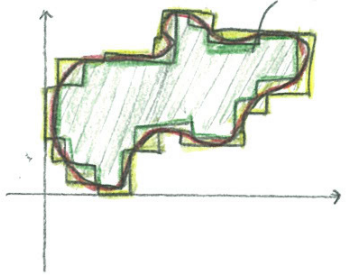
För godt. $(\xi_i, \eta_k) \in D_{ik}$ gäller

$m_{ik} \le f(\xi_i, \eta_k) \le M_{ik}$, alltså $s_{n,m} \le \underbrace{\sum_k \sum_i f(\xi_i, \eta_k) \Delta x_i \Delta y_k}_{\text{Riemann-summa } \sigma_{n,m}} \le S_{n,m}$; alltså (instängn.lagen)

$$\sigma_{n,m} = \sum_k \sum_i f(\xi_i, \eta_k) \Delta x_i \Delta y_k \xrightarrow[\max_{i,k} d_{ik} \longrightarrow 0]{} \iint_D f(x,y)\, dx\, dy$$

därför skrives detta gränsvärde I så!!

Anm $\boxed{2}$, D behöver ej vara "axelparallell rektangel" utan det räcker att man kan approximera D med (axelparallella) rektanglar inifrån- och utifrån, mera precist:



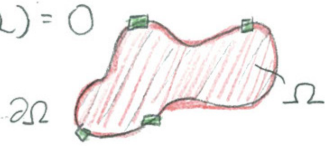
DEF $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, vi säger:

(1) Ω är en (JORDAN-) NOLLMÄNGD om det till varje $\varepsilon > 0$ finns ändligt många (axelparallella) rektanglar som övertäcker Ω och har sammanlagt area $< \varepsilon$.

(2) Ω är (JORDAN-) MÄTBAR om randen $\partial\Omega$
(KVADRERBAR)
är en nollmängd.

[åskådligt: skillnaden mellan inre och yttre approxim. har arean 0]

OBS: En nollmängd Ω har arean $m(\Omega) = 0$
["mindre än vilket $\varepsilon > 0$ som helst"]

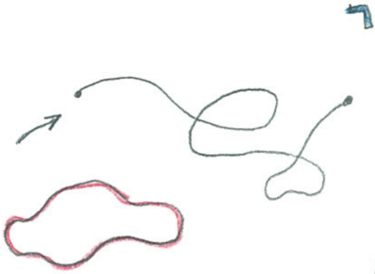


Ex på "nollmängd":

(1) punkter: $m(\{(a,b)\}) = 0$

(2) Grafer till C^0-fkt med ändlig längd är nollmängder

För oss: "randen till Ω" är nollmängd: $\partial\Omega$



SATS

Om $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är likformig kontinuerlig på D och D är begränsad och mätbar så är f integrerbar över D.

Man kan "approximera" så här:
Om Ω_j är begränsade, mätbara mängder $\subseteq \mathbb{R}^2$.
$j = 1, \ldots m$, och $\Omega = \biguplus_{j=1}^{m} \Omega_j$, så att $\Omega_i \cap \Omega_k$ är en nollmängd $(i,k \in \{1, \ldots, m\}, i \neq k)$
så gäller: välj godt. $(\xi_j, \eta_j) \in D_j$:

$$\sum_{j=1}^{m} \underbrace{f(\xi_j, \eta_j)}_{\text{höjd}} \underbrace{m(D_j)}_{\text{basytan}} \longrightarrow \iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$$

då $\max_{j=1,\ldots n} \operatorname{diam}(\Omega) \to 0$

$$\operatorname{diam}\Omega_j = \sup_{\substack{(x,y) \in \Omega_j \\ (x',y') \in \Omega_j}} |(x,y) - (x',y')| \quad (\text{exist., ty } \Omega_j \text{ begränsad})$$

("diameter")

$$\left(= \max_{\substack{(x,y) \in \Omega_j \cup \partial\Omega_j \\ (x',y') \in \Omega_j \cup \partial\Omega_j}} |(x,y) - (x',y')| \leftarrow \text{kompakt}: \right)$$

DEF

Om $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är integrerbar över $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, Ω begränsad och mätbar, så är

$$m(K) = \iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \text{VOLYMMÅTTET AV kroppen}$$

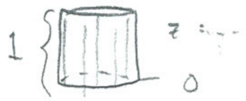
(mätetal, kat: volymen)

$$K = \{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

("cylindern med bas Ω och locket $z = f(x,y)$")

speciellt: $f(x,y) = 1$ (integrerbar!!)

$$m(K) = \iint_D dx\,dy = \underbrace{1}_{\text{höjd}} \cdot \underbrace{m(D)}_{\text{basytan}} \Bigg\}\ \underline{\underline{\text{arean av } D}}\,!$$



Regler

(följer direkt ur "integral = gränsvärde av summor")

SATS

Föruts.: $g, f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, deriverbara på D, $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$

(1) Om $\underset{(\text{på } D)}{f \geq 0}$ så är $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \geq 0$ (= volymen...!)

(2) Om $\underset{\text{"nollmängd"}}{m(D) = 0}$ så är $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$

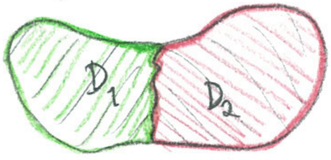
(3) Linearitet: för $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gäller:

$$\iint_D \big(c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y)\big)\,dx\,dy = c_1 \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + c_2 \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

(4) Additivitet

Om $D_1 \cap D_2$ är en nollmängd så gäller

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$



(Kvittar om $D_1 \cap D_2$ hör till D_1 eller D_2 eller båda)

(5) $$\left|\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy \qquad \left(|\Sigma\Sigma a_{ik}| \leq \Sigma\Sigma |a_{ik}|\right)$$

Till beräkning! (motsvarar $(f'_x)'_y = (f'_y)'_x \ldots$)

SATS (om itererad integration; satsen av FUBINI (1879-1943) (enkla versioner: Cauchy 100 år tidigare))

Föruts: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är integrerbar över D

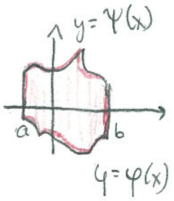
I) Om $D: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$: $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$ ← bevis ons ("skivformel")

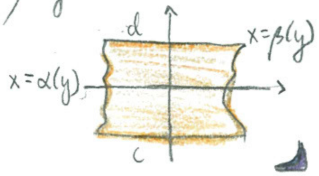
II) D ett standardområde:

A) Om $D: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \end{cases}$: $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

$\varphi, \psi : C^0$



B) Om $D: \begin{cases} \alpha(y) \leq x \leq \beta(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ [α, β C^0] : $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$



Ex

(1) $z = x+y$, $D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$: Beräkna $\iint_D (x+y)\,dx\,dy =$

$$= \int_1^2 \left(\int_1^3 (x+y)\,dx \right) dy = \int_1^2 \left[\tfrac{1}{2}x^2 + y \cdot x \right]_{x=1}^{x=3} dy = \int_1^2 (4+2y)\,dy = \left[4y+y^2\right]_1^2 = 7$$

OBS: skriv variabeln!

eller

(2) $$= \int_1^3 \left(\int_1^2 (x+y)\,dy \right) dx = \int_1^3 \left[x \cdot y + \tfrac{1}{2}y^2 \right]_{y=1}^{y=2} dx = \int_1^3 \left(x + \tfrac{3}{2}\right) dx =$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}x \right]_1^3 = 4+3 = 7$$ s.o.

Onsdag
2010-02-03

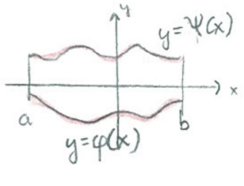
Rep

nollmängd
mätbar mängd ?

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \begin{cases} \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \\ \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy \end{cases}$$

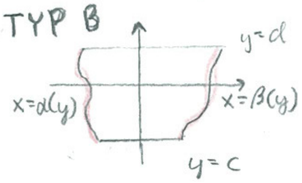
FUBINI
PB 238
246/247

TYP A



(C^0)

TYP B



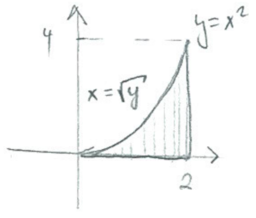
Ex

Beräkna $I = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ där $D: \begin{cases} 0 \leq y \leq x^2 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Rita alltid !!

Lösn 1:

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{x^2} (x^2+y^2)\,dy \right) dx =$$



$$= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^2 \left(x^4 + \frac{1}{3} x^6 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{1}{3 \cdot 7} x^7 \right]_0^2 = 32\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{21} \right) = \frac{32 \cdot 41}{105}$$

Lösn 2:

$$I = \int_0^4 \left(\int_{\sqrt{y}}^2 (x^2+y^2)\,dx \right) dy = \int_0^4 \left[\frac{1}{3} x^3 + x y^2 \right]_{x=\sqrt{y}}^{x=2} dy =$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{8}{3} + 2y^2 - \frac{1}{3} y^{3/2} - y^{5/2} \right) dy = \left[\frac{8}{3} y + \frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{15} y^{5/2} - \frac{2}{7} y^{7/2} \right]_0^4 \overset{\text{måste}}{=} \frac{32 \cdot 41}{105}$$

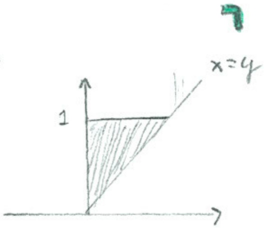
$\int \frac{\sin y}{y}\,dy$ går ej!

Ex

$$I = \iint_D \frac{x \cdot \overset{\text{kontin.!!}}{\sin y}}{y}\,dx\,dy \quad \text{där} \quad D: \; 0 \leq x \leq y \leq 1$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin y}{y} \left(\int_0^y x\,dx \right) dy = \int_0^1 \frac{\sin y}{y} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=y} dy =$$

D:

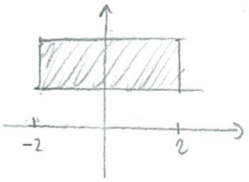


$$= \frac{1}{2} \int_0^1 y \sin y\,dy \overset{\text{p.i.}}{=} \frac{1}{2} \left[-y\cos y + \sin y \right]_0^1 = \frac{1}{2} (\sin 1 - \cos 1)$$

Kap6

Ö6

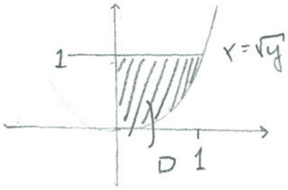
$$\iint_D \frac{y\sin x}{(1+x^2+y^2)^3}\,dx\,dy \quad \text{där } D: \begin{cases} |x|\leq 2 \\ 1\leq y\leq 2 \end{cases}$$



$$= \int_1^2 y\left(\underbrace{\int_{-2}^{2} \frac{\sin x}{(1+x^2+y^2)^3}\,dx}_{=0 \text{ ty udda !!}}\right)dy = 0$$

Ö12

$$\iint_D \frac{x}{1+y^2}\,dx\,dy \quad \text{där } D: \begin{cases} x^2\leq y\leq 1 \\ x\geq 0 \end{cases}$$



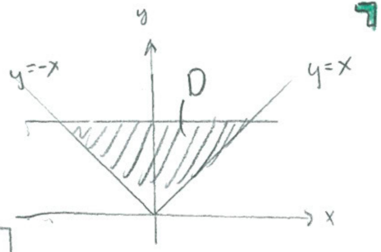
$$= \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{y}} \frac{x}{1+y^2}\,dx\right)dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\left[x^2\right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}}dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(1+y^2)\right]_0^1 = \boxed{\frac{\ln 2}{4}}$$

Ö14

$\int e^{-y^2}dy$ går ej

$$\iint_D e^{-y^2}\,dx\,dy \quad \text{där } D: \begin{cases} |x|\leq y \\ 0\leq y\leq 1 \end{cases}$$



$$= \int_0^1 e^{-y^2}\left(\int_{-y}^{y} dx\right)dy = \int_0^1 2ye^{-y^2}\,dy = \left[-e^{-y^2}\right]_0^1 = \boxed{1-\frac{1}{e}}$$

Två underbara uppgifter (DO IT!!):

1) (Clairant's theorem
Schwarz
(1834-1921))

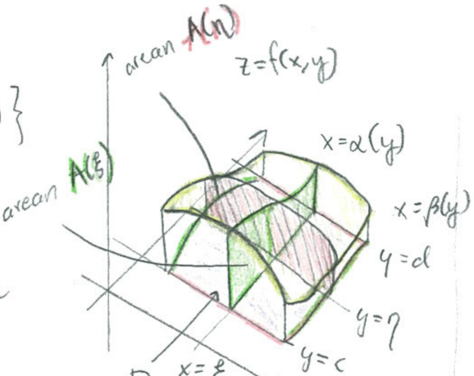
a) Om f är C^2 så gäller $\iint_D \left(f''_{xy}(x,y) - f''_{yx}(x,y)\right) dx\,dy = 0$
för alla axelparallella rektanglar $D \subseteq D_f$

b) Visa att detta med för $f''_{xy} = f''_{yx}$

2) (Föruts. i Fubini behövs): $f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$:

Visa $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy \;-\; \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx$

Bevis (-skiss) av Fubini



TYP B:

$K = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$

För $\eta \in [c,d]$ är

$A(\eta) = \int_{\alpha(\eta)}^{\beta(\eta)} f(x,y)\,dx$ = arean av tvärsnittsytan $K \cap$ (planet $y=\eta$)

$c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$: $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, $y_{k-1} \le \eta_k \le y_k$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{m} A(\eta_k)\Delta y_k}_{} \xrightarrow[\max \Delta y_k \to 0]{} \int_c^d A(y)\,dy = \underbrace{\int_c^d \left(\int_{\alpha(\eta)}^{\beta(\eta)} f(x,y)\,dx \right) dy}_{}$$

*) "skivor" som approximerar K

$\parallel$ volymen av

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

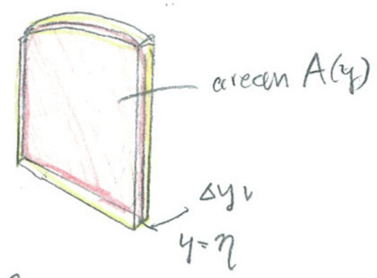
unders.

$\downarrow$

$$\left[s_{n,m} \le \sum_{k=1}^{m} A(\eta_k)\Delta y_k \le S_{n,m} \right]$$

ty $\underset{\substack{\uparrow \\ \min}}{\sum m_{ik}} \le A(\eta_k) \le \underset{\substack{\uparrow \\ \max}}{\sum M_{ik}} \Delta x_i$ av f på D_{ik}

* förslag på skivan



TYP A: på samma sätt:

För $\xi \in [a,b]$ är

$$A(\xi) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(\xi, y)\,dy$$ = arean av tvärsnittsytan $K \cap \{\text{planet } x = \xi\}$

Då: $$\sum_{k=1}^{n} A(\xi_k)\Delta x_k \xrightarrow[\max \Delta x_k \to 0]{} \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

för $f \ge 0$ ("volym"), godt. f skrives $f = \underbrace{f + |f|}_{\ge 0} - \underbrace{|f|}_{\ge 0}$

och $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D \left(f(x,y) + |f(x,y)| \right) dx\,dy - \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy$$

(linearitet!!)

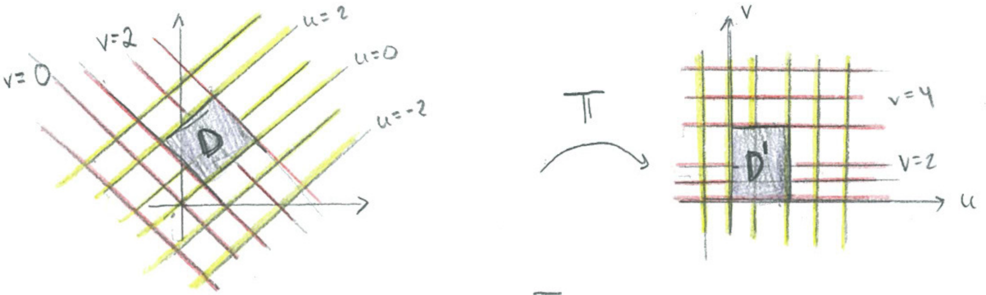
V.S.V. ■

Variabelsubstitution för dubbelintegral:

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto (u,v)$

Man gör "variabelbyte"

TYP A Linjär substitution (transformation, basbyte):

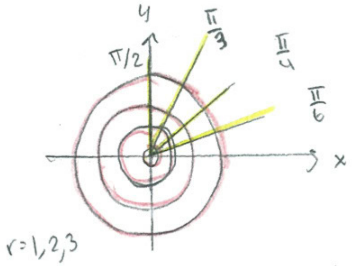


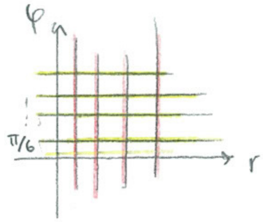
$u = ax+by$
$v = cx+dy$

t.ex. $D: \begin{cases} 0 \le ax+by \le 2 \\ 1 \le cx+dy \le 3 \end{cases} \xrightarrow[\text{avbildar bijektivt på}]{T} D': \begin{cases} 0 \le u \le 2 \\ 1 \le v \le 3 \end{cases}$

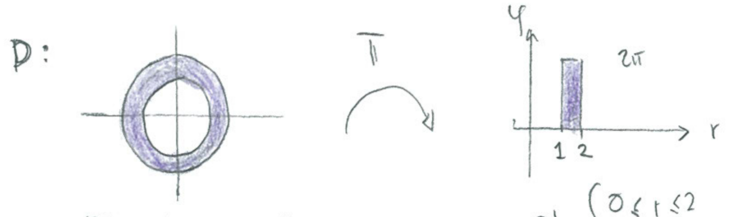
TYP B polär subst: $(x,y) \longmapsto (r,\varphi)$ $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$

$T^{-1}: (r,\varphi) \longmapsto (x,y)$ $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$



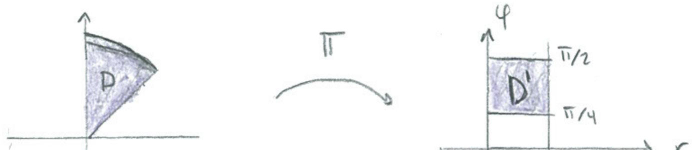


t.ex.



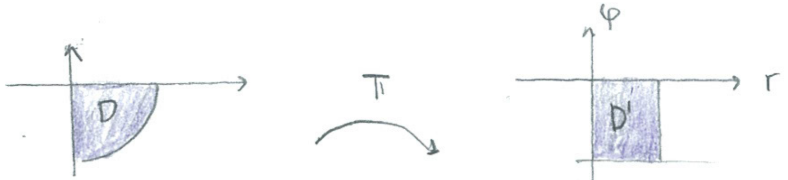
$D: 1 \le x^2+y^2 \le 4$

$D': \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$



$D: \begin{cases} 0 \le x \le y \\ x^2+y^2 \le 4 \end{cases}$

$D': \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$



$$D:\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 \leq x \\ y \leq 0 \end{cases}$$

$$D':\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0 \end{cases}$$

Problemställning

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Vad är sambandet mellan arean $m(D)$ och $m(D')$ vid en transformation T som avbildar D bijektivt på D'?

Vi skall motivera: (svaret)

$$m(D') \approx \left| \frac{d(u,v)}{d(x,y)} \right| m(D)$$

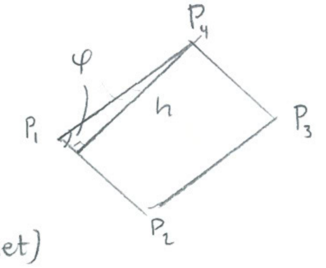
belopp: annars får man med "orientering": kan ju ta t.ex. → då byts 2 rader plats, ger "−" för delsum.

dvs. (beloppet av) funktionaldeterminanten är den skalfaktor som anger (lokalt) area förstoring förminskning då man går från xy-planet till u,v planet.

Rep

Arean av ett parallellogram D med hörn P_k $(k=1,2,3,4)$ är

$$|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_4}| = |\overrightarrow{P_1P_2}| \cdot \underbrace{|\overrightarrow{P_1P_4}| \sin\varphi}_{\text{höjden } h}$$



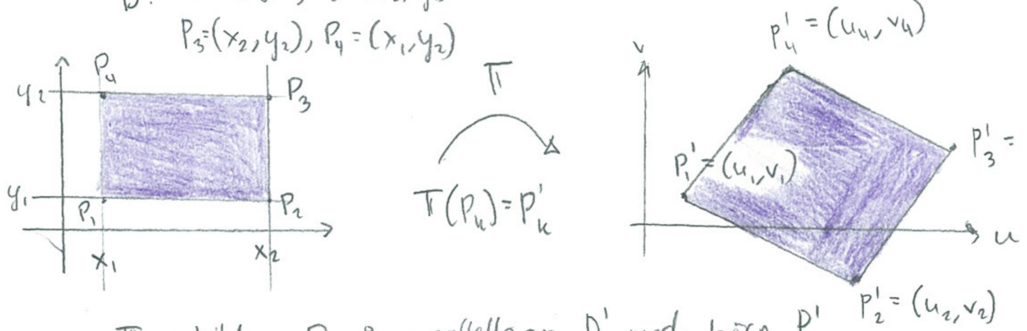
för punkter $P_k = (a_k, b_k, 0)$ (← i planet)

$$= \underset{\text{belopp}\nearrow}{\Bigg|} \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & 0 \\ a_4-a_1 & b_4-b_1 & 0 \end{vmatrix} \Bigg| = \left| \left(0, 0, \begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 \\ a_4-a_1 & b_4-b_1 \end{vmatrix}\right) \right| =$$

$$= \left| \begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 \\ a_4-a_1 & b_4-b_1 \end{vmatrix} \right|$$

För linjär transf. T: $\begin{array}{l} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{array}$:

D: $P_1=(x_1,y_1)$, $P_2=(x_2,y_1)$
$P_3=(x_2,y_2)$, $P_4=(x_1,y_2)$



T avbildar D på parallellogr. D' med hörn P'_k

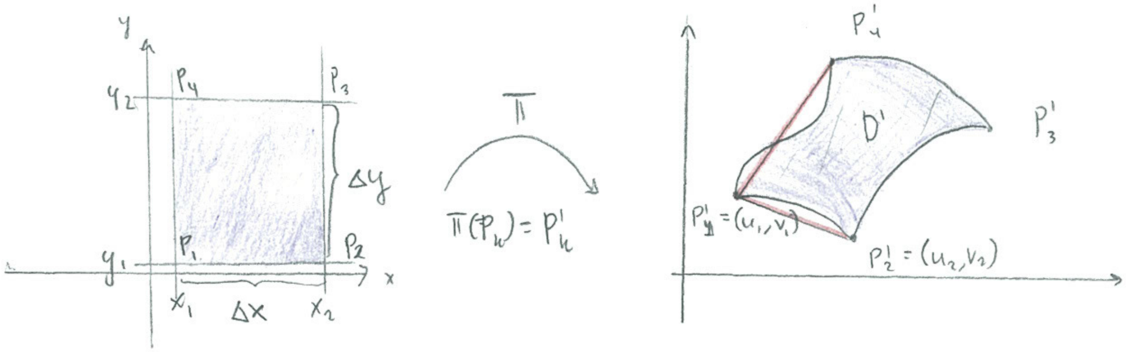
$$m(D) = (x_2-x_1)(y_2-y_1)$$

$$m(D') = \left| \begin{vmatrix} u_2-u_1 & v_2-v_1 \\ u_4-u_1 & v_4-v_1 \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} a(x_2-x_1) & c(x_2-x_1) \\ b(y_2-y_1) & d(y_2-y_1) \end{vmatrix} \right| = \quad \left\{ \begin{array}{l} u_2 = ax_2 + by_1 \\ u_1 = ax_1 + by_1 \\ v_2 = cx_2 + dy_1 \\ v_1 = cx_1 + dy_1 \\ u_4 = ax_1 + by_2 \\ v_4 = cx_1 + dy_2 \end{array} \right.$$

$$= \left| (x_2-x_1)(y_2-y_1) \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \right| = m(D) \cdot \left| \frac{d(u,v)}{d(x,y)} \right| \quad \nwarrow \left(\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right)$$

För godt. C^1-transf. Π : Π approximeras av den linjära avb. $df(a): \mathbb{h} \longmapsto \underset{\nwarrow\, f'(a)}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} \cdot \mathbb{h}$ ("differential") så bra att relativa felet $\to 0$ (lokalt i (a,b))

förmodan: $\left|\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)}\right|$ är den skalfaktor som anger areaförändringen för $df(a)$, alltså (approximativt) areaförändr. för Π:



Approximera D' med parallellogram som spänns upp av $\overrightarrow{P_1P_2}$ och $\overrightarrow{P_1P_4}$

$$m(D') = \left|\begin{vmatrix} u_2-u_1 & v_2-v_1 \\ u_4-u_1 & v_4-v_1 \end{vmatrix}\right| =$$

$$\left(\begin{array}{llll} u_2-u_1 = u(x_2,y_1)-u(x_1,y_1) \overset{\text{MVS}}{=} u'_x(\xi_1,y_1)\Delta x, & \xi_1 \text{ mellan } x_1 \text{ och } x_2 \\ v_2-v_1 = v(x_2,y_1)-v(x_1,y_1) = v'_x(\xi_2,y_1)\Delta x, & \xi_2 \text{ ------} \\ u_4-u_1 = u(x_1,y_2)-u(x_1,y_1) = u'_y(x_1,\eta_1)\Delta y, & \eta_1 \text{ mellan } y_1 \text{ och } y_2 \\ v_4-v_1 = v(x_1,y_2)-v(x_1,y_1) = v'_y(x_1,\eta_1)\Delta y, & \eta_2 \text{ ------} \end{array}\right)$$

$$= \left|\begin{vmatrix} u'_x(\xi_1,y_1)\Delta x & v'_x(\xi_2,y_1)\Delta x \\ u'_y(x_1,\eta_1)\Delta y & v'_y(x_1,\eta_2)\Delta y \end{vmatrix}\right| = \left|\underbrace{\Delta x \Delta y}_{m(D)} \begin{vmatrix} u'_x & v'_x \\ u'_y & v'_y \end{vmatrix}\right| = m(D)\left|\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right|$$

alltså: $m(D') \approx m(D) \left|\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)}\right| \longleftarrow$ (transpon.) i någon punkt $(\xi,\eta) \in D'$

[ovanstående] bekräftar igen "inversa fkt.satsen":

$$m(D) \neq 0 \Rightarrow m(D') \neq 0 \quad \text{om} \quad \frac{d(u,v)}{d(x,y)} \neq 0 \quad (\text{lokalt i } (a,b))$$

<u>vidare</u>

$$\boxed{m(D) \approx \left|\frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}}\right| m(D') = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| m(D')}$$

SATS {variabelsubst. i dubbelint.}

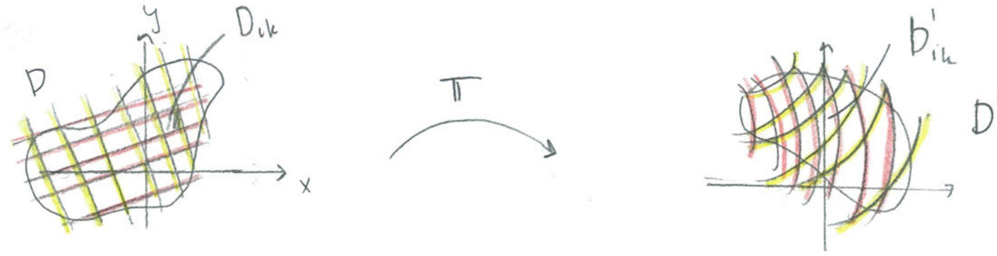
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kontinuerlig på D
- D begränsat, mätbart
- $\Pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är C^1 på en öppen mängd $\supseteq D$
  $(x,y) \longmapsto (u,v)$

$$\left.\begin{array}{l} \Pi \text{ avbildar } D \text{ bijektivt på } D' \\ \dfrac{d\Pi}{d\mathbf{x}} = \dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} \neq 0 \text{ i } D \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{bortsett från} \\ \text{en nollmängd}\end{array}$$

Då gäller:

OBS: glöm ej beloppet!!

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| du\,dv$$



Bevis

$(\xi_i, \eta_k) \rightarrow$ Riemanns.

$$\sum_k \sum_i f(\xi_i, \eta_k) \underbrace{\Delta x_i \Delta y_k}_{m(D_{ik})} \approx \sum_k \sum_i f(\xi_i(u,v), \eta_k(u,v)) \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| m(D'_{ik})$$

$$\left[\begin{array}{l} \max d_{ik} \to 0 \\ \Leftrightarrow \max \operatorname{diam} D'_{ik} \to 0 \end{array}\right]$$

$\Big\downarrow$ då $\max\limits_{i,k} \underbrace{d_{ik}}_{\text{diagonalen i } D_{ik}} \to 0$

$\Big\downarrow$ då $\max\limits_{i,k} \operatorname{diam} D'_{ik} \longrightarrow 0$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \underset{\uparrow \text{ borde väl}}{=} \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v) \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| du\,dv$$

$\blacksquare$

Ex

a) Volymen av klotet: $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$

$= 2 \cdot$volymen av $K: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \\ 0 \leq z \end{cases}$ $\curvearrowleft$ (övre halvklot)

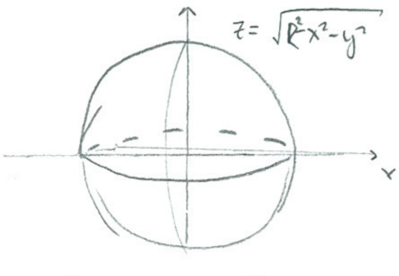
$= 2 \iint\limits_D \sqrt{R^2 x^2 - y^2}\, dx\,dy =$

$\nearrow$

$D: x^2+y^2 \leq R^2 \quad (z = 0',)$

(pol. koord.)

$$= \left[\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}, \quad \frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = \underset{\underset{0 \text{ alla } r \neq 0}{\#}}{r}, \quad D': \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \right] =$$

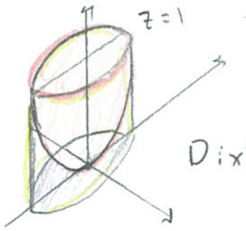


$$= 2 \cdot \iint_D \sqrt{R^2-r^2} \cdot r \cdot dr\,d\varphi = 2 \cdot \int_0^R \sqrt{R^2-r^2} \cdot r \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi}\, dr =$$

$$= 2 \cdot 2\pi \left[-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{3/2} \right]_0^R = \boxed{\frac{4\pi}{3} R^3}$$

b) Beräkna volymen av skålen $K: \begin{cases} x^2+y^2 \leq z \leq 1 \\ (z \geq 0) \end{cases}$

Lösn: $$m(K) = \underbrace{\iint_D 1\, dxdy}_{\text{hela cylindern}} - \underbrace{\iint_D (x^2+y^2)\, dxdy}_{\text{under paraboloiden utanför skålen}} \quad z = x^2+y^2$$



$D: x^2+y^2 \leq 1$

$$= \iint_D (1-(x^2+y^2))\, dxdy = \left[\text{pol. koord.} \right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2) r\, dr dy = 2\pi \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

Kap.6 **Ö45**

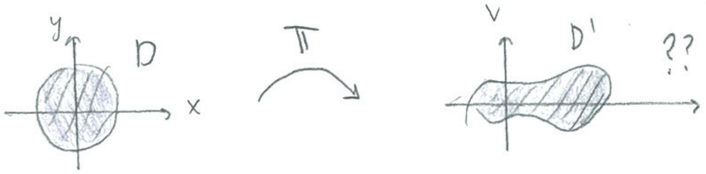
$$\Pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \begin{cases} u = x^3 \\ v = y^3 \end{cases} : \text{bijektiv!}$$
$$(x,y) \longmapsto (u,v)$$

Π avbildar $D: x^2+y^2 \leq 1$ på $D' = ?$

Beräkna arean $m(D') = ?$

hur ser D' ut?

Lösn.:

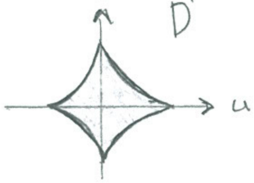


$$m(D') = \iint_{D'} du\,dv = \iint_D \left| \frac{d(u,v)}{d(x,y)} \right| dx\,dy = \iint_D \left| \begin{vmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{vmatrix} \right| dx\,dy =$$

$$= \iint_D 9x^2y^2\,dx\,dy = \left[\text{pol. koord.}\right] = \int_0^{2\pi}\int_0^1 9r^5 \overset{(\frac{1}{2}\sin 2\varphi)^2}{\cos^2\varphi \sin^2\varphi}\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{9}{6}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi = \boxed{\frac{3\pi}{8}}$$

cirkeln blir $x^2+y^2 = u^{2/3}+v^{2/3} = 1$
$\begin{pmatrix} x=u^{1/3} \\ y=v^{1/3} \end{pmatrix}$



- $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$: krävde $\left.\begin{matrix}\text{D begränsad, mätbar} \\ \text{f kontin. på D}\end{matrix}\right\}$ om det inte är fallet gör vi så här:

vi approximerar med mängden D_j :

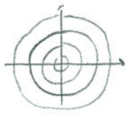
DEF

D_j $(j=1,\dots,n,\dots)$ kallas UTTÖMMANDE FÖLJD TILL f och D om: (exhausting sequence)

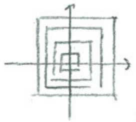
- Alla D_i är begränsade, mätbara
- $D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \setminus \Omega$, Ω en nollmängd
- $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \dots \subseteq D_n \subseteq D_{n+1} \subseteq \dots \subseteq \mathbb{R}^2$
- f är integrerbar över D_j

Ex uttömmande följd för $D=\mathbb{R}^2$ (f kontin.)

(1) $D_j = x^2+y^2 \leq n^2$



(2) $D_j : \begin{cases} |x| \leq n \\ |y| \leq n \end{cases}$



Torsdag
2010-02-04

Rep

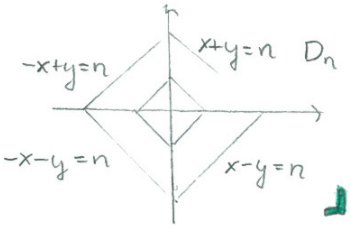
$D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$:

"Följden D_n kallas UTTÖMMANDE FÖLJD för D och f om:

- D_n är begränsad, mätbar
- $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \ldots \subseteq D_{n-1} \subseteq D_n \subseteq \ldots$
- $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \setminus$ nollmängd
- f kontinuerlig på D_n (alla $\iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$ existerar)

Ex uttömmande följd D_n för $\mathbb{R}^2$ (kontin. f):

$D_n = \{(x,y) : |x|+|y| \leq n\}$ $(n=1,2,..)$



DEF

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$; vi säger: $\boxed{f(x,y) \geqslant 0}$

(a) (DEN GENERALISERADE) INTEGRALEN $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ är KONVERGENT om det finns en uttömmande följd D_n för D och f så att $I_n = \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$ har ett gränsvärde då $n \to \infty$, och i så fall sätter vi

$$\iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$$

(b) (Den generaliserade) integralen $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ är DIVERGENT om det finns en uttömmande följd D_n till D, f så att $I_n = \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$ saknar gränsvärde då $n \to \infty$.

SATS (OBS: $f \geq 0$!!!)

(1) Definitionen är vettig, dvs. antingen är $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ divergent för alla uttömmande följder D_n eller konvergent för alla uttömmande följder D_n och alla uttömmande följder ger samma tal

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \quad [\leftarrow \text{oberoende av den uttömmande följden}]$$

(2) Fubini gäller även för generaliserade integraler:

$$D: \begin{cases} a<x<b & a,c \text{ får vara } -\infty \\ c<y<d & b,d \text{ ——"—— } \infty \end{cases}$$

Om en av integralerna

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\,, \quad \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy\,, \quad \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

är konvergent så är de övriga andra konvergenta och alla tre har samma värde.

[↑ även för "standardområden"]

{3} Räknereglerna gäller även för generaliserade integraler.

{4} $I_n = \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$ är växande (ty $f \geq 0$!!! $(D_n \subseteq D_{n+1} \cdots)$)

alltså gäller: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ konv. ⟺ $\iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$ begr. uppåt

Det ger (precis som i envariabelfallet)

SATS { jämförelsekriteriet, majorant-/minorant- krit }

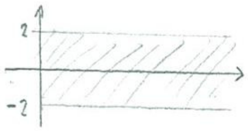
Om $f,g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $0 \leq f \leq g$ på D, så gäller

{1} $\iint_D g(x,y)\,dx\,dy$ konvergent $\Longrightarrow$ $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ konvergent

{2} $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ divergent $\Longrightarrow$ $\iint_D g(x,y)\,dx\,dy$ divergent

Ex 5 "$f \geq 0$" behövs: $I = \iint_D xy\,dx\,dy$ där $D: \begin{cases} 0 \leq x \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$

antingen $$I = \int_0^\infty \underbrace{\left(\int_{-2}^{2} xy\,dy\right)}_{=0 \text{ (udda!)}} dx = 0$$



eller $$I = \int_{-2}^{2} \left(\underbrace{\int_0^\infty yx\,dx}_{\text{div.}}\right) dy \quad \text{ex. ej!!!}$$

Ex Beräkna $I = \int_0^\infty \frac{e^{-3x} - e^{-6x}}{x}\,dx = ?$

$$\left[\text{Taylor: } -3\,\underset{\downarrow\atop 1}{\frac{e^{-3x}-1}{-3x}} + 6\,\underset{\downarrow\atop 1}{\frac{e^{-6x}-1}{-6x}} \to 3\right]$$

Lösn ej generalis. i 0, ty $\frac{e^{-3x} - e^{-6x}}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 3$

knep "se" $0 \leq \frac{e^{-3x} - e^{-6x}}{x} = \int_3^6 e^{-yx}\,dy \qquad \left[-\frac{1}{x}e^{-yx}\right]_3^6$

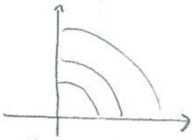
alltså: $$I = \int_0^\infty \left(\int_3^6 e^{-yx}\,dy\right) dx \overset{\text{FUBINI (ty konv.)}}{\underset{\downarrow}{=}} \int_3^6 \left(\int_0^\infty e^{-xy}\,dx\right) dy = \int_3^6 \left[-\frac{1}{y}e^{-xy}\right]_0^\infty dy =$$

$$= \int_3^6 \frac{1}{y}\,dy = [\ln y]_3^6 = \ln 2 \quad \text{konv.!!}$$

EX Nu ett viktigt ex (viktigt resultat! Ⓣ !) (Ex 17,21 i PB..)

Beräkna $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$

knep: $I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy \overset{\text{FUBINI (om konv.)}}{=} \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$: där $D: \begin{cases} 0 \le x \\ 0 \le y \end{cases}$



Välj som uttömmande följd $D_n: \begin{cases} x^2+y^2 \le n^2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$:

$D_n': \begin{cases} 0 \le r \le n \\ 0 \le \pi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = [\text{pol. koord.}] = \int_0^{\pi/2}\int_0^{n} e^{-r^2} r dr d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^n = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-n^2}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\pi}{4} \quad (\text{konv.!!})$$

<u>Svar:</u> $I^2 = \frac{\pi}{4}$, dvs. $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

[det ger (statistik): $\operatorname{errf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$

ger: $\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ är probability density distribution (fördelningsfkt)]

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} \right)$$

För godt. f:

DEF $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$: vi säger:

f är ABSOLUTINTEGRERBAR ÖVER D,
$\iint_D f(x,y)\,dxdy$ är ABSOLUT KONVERGENT,

om $\iint_D |f(x,y)|\,dxdy$ är konvergent

Vi sätter (om f är absolutintegrerbar):

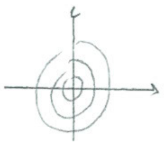
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D \left(f(x,y) + |f|(x,y)\right) dxdy - \iint_D |f|(x,y)\,dxdy$$

(kolla: $0 \le f+|f| \le 2|f|$, $\iint_D 2|f|\,dxdy$ konv. $\underset{\text{jmf.kr.}}{\Longrightarrow}$ $\iint (f+|f|)\,dxdy$ konv. !)

Kap.6

Ö 36 För vilka α konvergerar $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy$?

Lösn: Välj som uttömmande följd $D_n: x^2+y^2 \le n^2$:



$$I_n = \iint_{D_n} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy = \left[\text{pol. koord.}\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^n \frac{r}{(1+r^2)^\alpha}\,drd\varphi = \begin{cases} \pi\left[\ln(1+r^2)\right]_0^n = \pi\ln(1+n^2), & \text{om } \alpha = 1 \\ \frac{\pi}{1-\alpha}\left[(1+r^2)^{1-\alpha}\right]_0^n = \frac{\pi}{1-\alpha}\left((1+n^2)^{1-\alpha} - 1\right), & \text{om } \alpha \ne 1 \end{cases}$$

(gränsvärde då $n \longrightarrow \infty$ existerar:)

$\Longleftrightarrow \quad \alpha > 1$ Svar: $I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n = \dfrac{\pi}{\alpha-1} \quad (\alpha > 1)$

ö47

Beräkna $I = \iint\limits_D \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{|x-y|}}}_{f(x,y)\geq 0} dxdy$ där $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

↖ generaliserad på linjen $y=x$

$f(x,y) = f(y,x)$

Lösn

Välj som uttömmande följd

$D_n = D_n^- \cup D_n^+ \; : \; D_n^-: \begin{cases} 0 \leq x \leq y - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \leq y \leq 1 \end{cases} \;\Bigg|\; D_n^+: \begin{cases} 0 \leq y \leq x - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$

$$I_n = \iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_n^-} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_n^+} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_0^{y-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{y-x}}dx\right)dy + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_0^{x-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{x-y}}dy\right)dx = 2\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_0^{y-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{y-x}}dx\right)dy =$$

$$= 4\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[-\sqrt{y-x}\right]_{x=0}^{x=y-\frac{1}{n}} dy = 4\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\sqrt{y} - \sqrt{\tfrac{1}{n}}\right)dy = 4\left[\frac{2}{3}y^{3/2} - y\sqrt{\tfrac{1}{n}}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} =$$

$$= 4\left(\frac{2}{3}1 - \sqrt{\tfrac{1}{n}} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^{3/2} + \frac{1}{n}\sqrt{\tfrac{1}{n}}\right) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 4\left(\frac{2}{3} - 0 - 0 + 0\right)$$

Svar: $I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n = \boxed{\dfrac{8}{3}}$

Ö43 (ofullständigt)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \underbrace{\frac{x^2}{(1+x^2)(x^2+y^2)^{3/2}}}_{0 \leq f(x,y)} \, dxdy$$

konv. ?
div. ?

generaliserad även i (0,0) !!

Betrakta $\underbrace{\iint_{x^2+y^2\leq 1} f(x,y)\,dxdy}$ och $\underbrace{\iint_{x^2+y^2\geq 1} f(x,y)\,dxdy}$ (var för sig)

$\frac{x^2}{1+x^2} \leq x^2$: $0 \leq f(x,y) \leq \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

$0 \leq f(x,y) \leq \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy = \iint \frac{\cancel{r^3}\cos^2\varphi}{\cancel{r^3}}$$

konv.

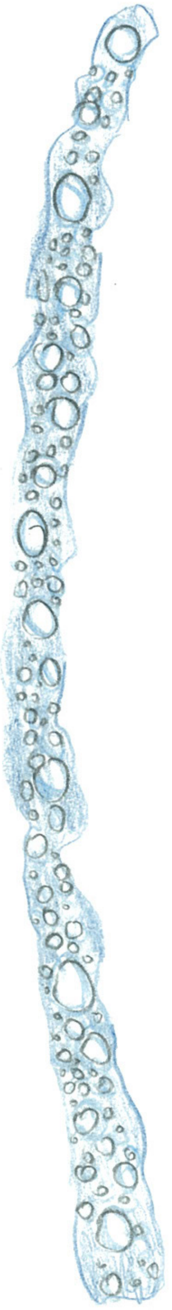
$$\iint \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \iint \frac{r}{r^3} \cdots$$

konv.

Lv4

Flervariabelanalys

Med Bernhard Behrens



Trippelintegraler

SATS: om beräkning av trippelintegraler
generaliserade trippelintegraler
DEF: uttömmande följd
DEF: konvergent/divergent
SATS: variabelsubstitution
funktionaldeterminant för sfäriska koordinater
SATS: medelvärdessats]] BEVIS [

Tillämpningar av trippelintegraler:
- total massa/laddning
- geometriskt moment
- tyngdpunkten
- geometriskt tröghetsmoment
- polärt tröghetsmoment

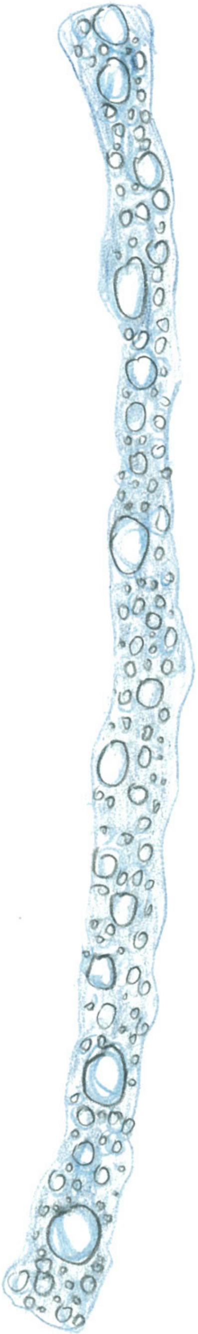
arbete
DEF: kurvintegral
SATS: om kurvintegraler]] BEVIS [

Nya begrepp:

A) för kurvor
DEF: $-C$, C_1+C_2, sluten, enkel, pos/neg orientering
SATS: självklara räkneregler

B) för mängder
DEF: enkelt shgd, positivt orienterad rand

C) för fält
DEF: konservativ, potential,
gradientfält, potentialfält, exakt,
oberoende av vägen



Måndag
2010-02-08

Kap 7 Trippelintegraler

Vi upprepar metoden

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \xrightarrow[\max \Delta x_i \longrightarrow 0]{} \int_a^b f(x)\,dx$$

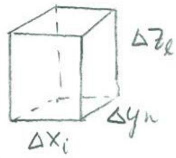
$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_k)\Delta x_i\Delta y_k \xrightarrow[\max \underbrace{\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_k)^2}}_{d_{ik}}\to 0]{} \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

för $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$K \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_k,\zeta_l)\underbrace{\Delta x_i\Delta y_k\Delta z_l}_{m(K_{ikl})} \xrightarrow[\max\ d_{ikl} \longrightarrow 0]{} \iiint_K f(x,y,z)\,dxdydz$$

$\uparrow$

K approximeras av axelparallella rätblock:



detta gränsvärde existerar om (likformigt)
f kontinuerlig på K
K begränsad, mätbar

[dvs. randen ∂K är en nollmängd, dvs. till varje $\varepsilon > 0$ finns ändligt många (axelparallella) rätblock vilkas sammanlagda volym är $< \varepsilon$]

[ex: nollmängd i $\mathbb{R}^3$: pkt, C^0-kurva, C^0-ytan, begränsade]

Beräkning: igen: itererad integration

TYP 1

(standardområde, det vanliga)

SATS

begränsat, mätbart

$$K = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\}$$

φ och ψ är C^0

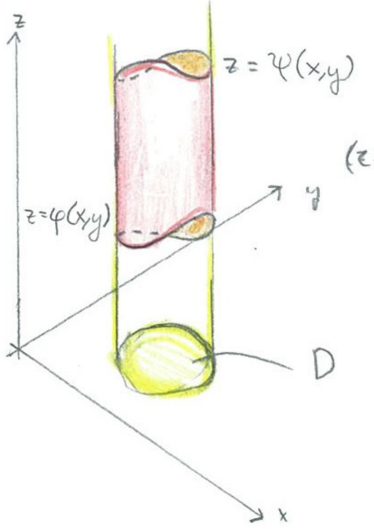
[cylinder ⊥ xy-planet, ovanför D, bottenytan $z = \varphi(x,y)$, locket $z = \psi(x,y)$]

(i z-led) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ kontinuerlig på K

på gäller:

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D \underbrace{\left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right)}_{F(x,y) \text{ är } C^0} dxdy$$

(analogt i y-led och i x-led)



$(z \leq z_0 \leq d)$

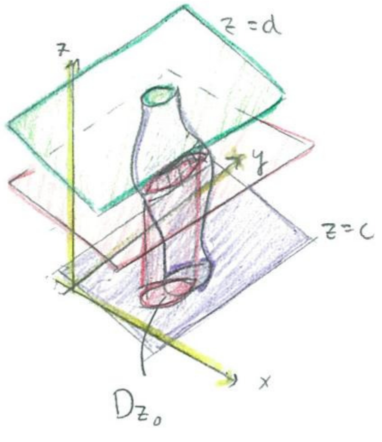
TYP 2

K begränsad, mätbar, K ligger mellan planen $z = c$ och $z = d$ $(c < d)$.

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dxdydz = \int_c^d \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy \right) dz$$

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
f är C^0 på K

där $D_{z_0} = \{(x,y,0) : (x,y,z_0) \in K\}$ = projektionen av tvärsnittsytan $K \cap (\text{planet } z = z_0)$



Generaliserade trippelintegraler

Alltid: $f \geq 0$

DEF

$K \subseteq \mathbb{R}^3$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: Följden K_n kallas UTTÖMMANDE FÖLJD FÖR K och f om:

- varje K_n är begränsad, mätbar, f är kontinuerlig på K_n $(n = 1, 2, 3, ..)$
- $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq .. \subseteq K_{n-1} \subseteq K_n \subseteq ...$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = K \setminus$ nollmängd

DEF

$K \subseteq \mathbb{R}^3$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Vi säger:

$f \geq 0$

Den generaliserade integralen $\iiint_K f(x,y,z)\,dxdydz$ är
konvergent
divergent
om det finns en uttömmande följd till K, f så att $I_n = \iiint_{K_n} f(x,y,z)\,dxdydz$
har ett gränsvärde då $n \longrightarrow \infty$.
saknar ett gränsvärde då $n \longrightarrow \infty$.

Om konvergent, så sätter vi:

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{n \to \infty} \iiint_{K_n} f(x,y,z)\,dxdydz$$

Alla räkneregler gäller: $\left(\text{linearitet, additivitet, } f \geq 0 \Rightarrow \iiint f \ldots \geq 0, \ \left| \iiint f \ldots \right| \leq \iiint |f|, \right.$ FUBINI! $\Big)$

Speciellt

$f \equiv 1$. Då är (typ I) $$\iiint_K dxdydz = \iint_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} dz \right) dxdy =$$

$$= \text{volymen av } K \ (0 \leq \varphi \leq \psi) = \iint_D (\psi(x,y) - \varphi(x,y)) dxdy = m(K)$$

SATS {variabelsubstitution}

Föruts.: $K \subseteq \mathbb{R}^3$, begränsad, mätbar

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ C^0 på K

$\mathbb{T}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ C^1 (på en öppen mängd $\supseteq K$) $(\leftarrow u,v,w$ är $C^1)$

$(x,y,z) \longmapsto (u,v,w)$

som avbildar K bijektivt på K', $\frac{d\mathbb{T}}{d\mathbf{x}}(a) \neq 0$ för $a \in K$ $\}$ bortsett från en nollmängd

Då gäller:

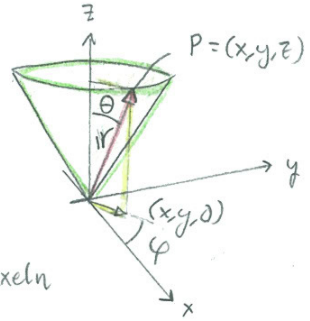
$$\iiint_K f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{K'} f(u,v,w) \overset{\text{belopp!}}{\left| \frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} \right|} dudvdw$$

dvs.: $\left| \frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} \right|$ är den skalfaktor som anger volymförändringen då man går från xyz-rummet till uvw-rummet.

Ex

rymdpolära
sfäriska koordinater: $P=(x,y,z)$ en punkt i $\mathbb{R}^3$

$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ (ortsvektor)



$\overrightarrow{OP}$ ges av
$$\begin{cases} r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \left(\begin{array}{l} = \text{avståndet till origo} \\ = \text{längden av } \mathbf{r} \end{array}\right) \\ \varphi = \text{vinkeln mellan } (x,y,0) \text{ och positiva x-axeln} \end{cases}$$

nytt $\rightarrow$ Θ = vinkeln mellan $\overrightarrow{OP}$ och positiva z-axeln

$$\left[\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta = r\cos\theta \end{array}\right]$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ ← OBS!!

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$\rho = |(x,y,0)|$ = avståndet till z-axeln $= r\sin\theta$

Funktionaldeterminanten för sfäriska koord.

(skall ni kunna,
skall ni kunna härleda)

$$\frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\sin\theta \cdot \left(\cos\theta \cdot \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} + \sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}\right) =$$

$$= r^2\sin\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \boxed{r^2\sin\theta}$$

Ex volymen m(K) av klotet: $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$:

$$m(K) = \iiint\limits_{K} dx\,dy\,dz \overset{(\text{BÄST})}{=} \left[\text{sfär. koord.}\right] = \iiint\limits_{K'} r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi = \quad (\sin\theta \geq 0\ !!)$$

$$K': \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \qquad = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi = \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{R} =$$

$$= 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \boxed{\frac{4\pi R^3}{3}}$$

Ex

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+2y^2+3z^2)} dx\,dy\,dz = \quad I_n \quad =$$

välj uttömmande följd: "ellipsoider" $K_n: x^2+2y^2+3z^2 \leq n^2$

$$= \iiint\limits_{K_n} e^{-(x^2+2y^2+3z^2)} dx\,dy\,dz = \begin{bmatrix} \text{sfäriska koord:} \\ x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} r\sin\theta\sin\varphi \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}} r\cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$\Rightarrow x^2+2y^2+3z^2 = r^2$$

$$\left(\text{DO } \pi \quad \begin{matrix} \text{rad } 2: \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{rad } 3: \frac{1}{\sqrt{3}} \end{matrix}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{n} e^{-r^2} r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{1}{\sqrt{6}} 2\pi \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \left(\left[-\frac{r}{2} e^{-r^2}\right]_0^n + \frac{1}{2}\int_0^n e^{-r} dr \right)$$

$$\Rightarrow I = \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \left(-0 + 0 + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-r^2} dr \right) = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\pi}$$

Fubini (konvergent!)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2y^2} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3z^2} dz = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\pi}$$

Onsdag
2010-02-18

sista teori:
- generaliserade int.: jämförelsekrit
- absolut integration...

SATS

{medelvärdessats}

Föruts: $K \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad$ ($K \subseteq \mathbb{R}^3$)

K kompakt, mätbar
bågvis sammanhängande

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

f kontin. på K

Påst: Det finns (ξ, η) $\quad$ (ξ, η, ζ)
så att

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta)\cdot \underbrace{m(K)}_{\text{area av } K} \qquad \iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = f(\xi,\eta,\zeta)\ \underbrace{m(K)}_{\text{volymen av } K}$$

Bevis

för $\mathbb{R}^3$: f antar $\begin{matrix}\text{minsta}\\ \text{största}\end{matrix}$ värde $\begin{matrix}\min\\ \mathrm{MAX}\end{matrix}$ $\left(\text{ty } \begin{matrix} f \text{ är } C^0 \\ K \text{ är kompakt}\end{matrix}\right)$

dvs. $\min \leq f(x,y,z) \leq MAX$ för alla $(x,y,z) \in K$

alltså $$\min \iiint_K dxdydz \leq \iiint_K f(x,y,z)\,dxdydz \leq MAX \iiint_K dxdydz$$

Om $\iiint_K dxdydz = 0$: då duger varje $(\xi, \eta, \zeta) \in K$

– – – $\neq 0$: då är $\min \leq \dfrac{\iiint_K f(x,y,z)\,dxdydz}{m(K)} \leq MAX$

$$\xRightarrow[\text{s.o.m.v.}]{} \text{ det finns } (\xi,\eta,\zeta) \in K \text{ så att } f(\xi,\eta,\zeta) = \frac{\iiint_K f(x,y,z)\,dxdydz}{m(K)}$$

[f är C^0, K bågvis shgd] v.s.v.

analogt för 2 funktioner ($\iiint f \cdot g \, dxdydz = \ldots$ om g ej växlar tecken) $\blacksquare$

Nu tillämpningar (andra än area, volym...):

$K \subseteq \mathbb{R}^3$, K begränsad, mätbar

$\rho : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $K \subseteq D_\rho$ = K:s masstäthet (densitet): "massa per volymenhet"

$q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $K \subseteq D_q$ = K:s laddningstäthet : "laddning per – – "

(1) $M(K) = \iiint_K \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ = K:s TOTALA MASSA

$Q(K) = \iiint_K q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ = ... LADDNING

$\left((a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right)$

(2) $I_{x=a} = \iiint_K \underbrace{(x-a)}_{\text{hävarm}} \cdot \underbrace{\rho(x,y,z)}_{\text{massa}}\,dx\,dy\,dz$ = K:s GEOMETRISKA MOMENT (m.a.p. $x=a$)

$I_{y=b} = \iiint_K \overbrace{(y-b)} \cdot \overbrace{\rho(x,y,z)}\,dx\,dy\,dz$ = ... $y=b$

$I_{z=c} = \iiint_K (z-c) \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ = ... $z=c$

(3) TYNGDPUNKTEN (av K) är den punkt (x_T, y_T, z_T) så
(MASSCENTRUM centroid om $\rho \equiv 1$) att $I_{x=x_T} = I_{y=y_T} = I_{z=z_T} = 0$

dvs. $x_T = \dfrac{\iiint_K x\,\rho(x,y,z)}{M(K)}\,dx\,dy\,dz$ (jämviktsläget)

$y_T = \dfrac{\iiint_K y\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{M(K)}$

$z_T = \dfrac{\iiint_K z\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{M(K)}$

(4) $J_{x=a} = \iiint_K \underbrace{(x-a)^2}_{\text{hävarm}^2} \underbrace{\rho(x,y,z)}_{\text{massa}}\,dx\,dy\,dz$ = K:s GEOMETRISKA TRÖGHETSMOMENT m.a.p. $x=a$

$J_{y=b} = \iiint_K \overbrace{(y-b)^2}\ \overbrace{\rho(x,y,z)}\,dx\,dy\,dz$ = ... $y=b$

$J_{z=c} = \iiint_K (z-c)^2 \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ = ... $z=c$

Spec! $J_{xy} = J_{x=0} + J_{y=0} = \iiint_K (x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)\,dxdydz =$ $= K$:s POLÄRA TRÖGHETSMOMENT m.a.p. z-axeln

J_{xz} , J_{yz} $\rightarrow$ y-axeln, x-axeln

$D \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$J_D = \iint_D (x^2+y^2)\,\rho(x,y)\,dxdy$$ = POLÄRA TRÖGHETSMOMENTET av (skivan!) D.

[$\rho \equiv 1$: mera spännande än "volymen under paraboloiden"]

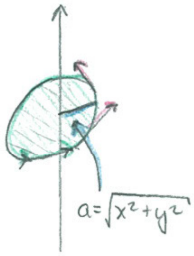
Anm polära tröghetsmom. behöver man t.ex. för "rörelseenergi" ("kinetisk en.")

energitätheten ("energi per volymenhet") är

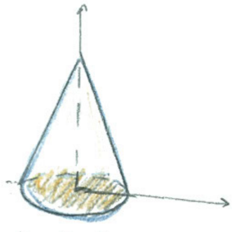
$\frac{1}{2} m v^2$ $\begin{pmatrix} m = \text{massa} \\ v = \text{hastighet} \end{pmatrix}$ $\qquad \frac{1}{2} m \cdot a^2 \cdot \omega^2 \leftarrow$

Vid en cirkulär rörelse (rotation) kring z-axeln med vinkelhastighet ω är $v = a \cdot \omega$, a = avståndet till z-axeln

Totala energin $= \iiint_K \frac{1}{2} \cdot (x^2+y^2)\,\omega^2\,\rho(x,y,z)\,dxdydz = \boxed{\frac{1}{2}\omega^2 J_{xy}}$



Ex Beräkna tyngdpunkten ("centroiden") av konen
$K: 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ $(\rho \equiv 1)$:



$D: x^2+y^2=1$

Lösn: $$m(K) = \iiint_K dxdydz = \iint_D \left(\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} dz \right) dxdy =$$

$$= \iint_D \left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy = [\text{pol. koord.}] =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r)\, r\, dr d\varphi = 2\pi\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right] = \boxed{\frac{\pi}{3}}$$

$x_T = y_T = 0$ (do it: $\iiint_K x\, dxdydz = \iiint_K y\, dxdydz = 0$)

$$z_T = \frac{\iiint_K z\, dxdydz}{m(K)} = \frac{3}{\pi} \cdot \iint_D \left(\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} z\, dz \right) dxdy = \frac{3}{2\pi} \iint_D \left[z^2\right]_{z=0}^{z=1-\sqrt{x^2+y^2}} dxdy =$$

$$= \frac{3}{2\pi} \iint_D \left(1+x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy = \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+r^2-2r)\, r\, dr d\varphi = 3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{4}}$$

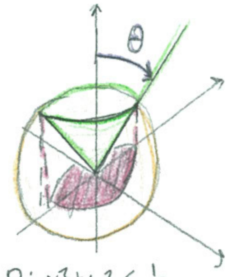
Ex K är den kropp som begränsas nedåt av $z=\sqrt{x^2+y^2}$, uppåt av $x^2+y^2+z^2=1$,

a) $\rho(x,y,z) = \dfrac{z}{1+x^2+y^2}$ b) $\rho(x,y,z) = z$ Beräkna $M(K)$ (massan av K)

Lösn: a) $M(K) =$

$$= \iiint_K \frac{z}{1+x^2+y^2}\, dxdydz =$$

skärningen:
$$\begin{cases} z^2 = 1-x^2-y^2 \\ z^2 = x^2+y^2 \end{cases}$$
$\Rightarrow 2(x^2+y^2)=1$
dvs. $x^2+y^2=\frac{1}{2}$



$D: x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}$

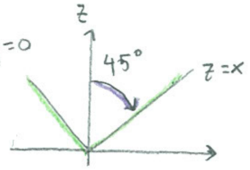
$$= \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz \right) dx\,dy = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\frac{1}{2}\left[z^2\right]_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\left(1-2(x^2+y^2)\right)dx\,dy \overset{\text{(pol. koord.)}}{=} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{1-2r^2}{1+r^2}\,r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi \left[-r^2 + \frac{3}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \;\dots \qquad (\text{"dela":})\;\; \frac{-2-2r^2}{1+r^2}\,r + \frac{3r}{1+r^2} = -2r + \frac{3r}{1+r^2}$$

b) p.s.s. eller med sfäriska koord.

$$K': \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$



$$\iiint_K z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{1} r\cos\theta\, r^2\sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/4} = \boxed{\frac{\pi}{8}}$$

Rep

C^m-kurva i $\mathbb{R}^n$: $\mathbb{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\qquad a \xrightarrow{t} b$

$t \longmapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$

[alla x_j är C^m]

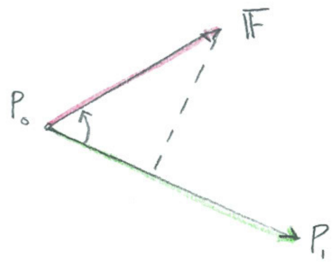
Punkterna $\mathbb{r}(t)$ genomlöper kurvan från startpkt $\mathbb{r}(a)$ till ändpunkten $\mathbb{r}(b)$

$\mathbb{r}' = (x_1', x_2', \dots, x_n')$ ("tangentvektor" om $\neq \vec{0}$)

Utgångspkt: "arbete = kraft · väg";

Om $\mathbb{F}$ är kraftvektorn i pkt P_0 så är den kraftkomponent som verkar i riktningen $\overrightarrow{P_0P_1}$ längden av projektionen av $\mathbb{F}$ på $\overrightarrow{P_0P_1}$:

$|\mathbb{F}|\cdot\cos\varphi$ $\quad$ φ = vinkeln mellan $\mathbb{F}$ och $\overrightarrow{P_0P_1}$



det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar då en partikel förflyttas från P_0 till P_1 är

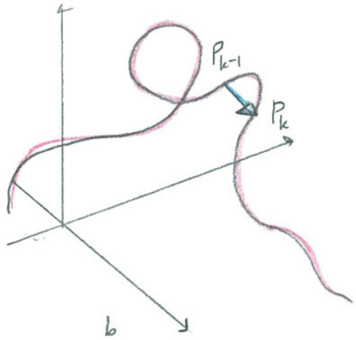
$$\underbrace{|\mathbb{F}|\cdot\cos\varphi}_{\text{kraft}}\cdot\underbrace{|\overrightarrow{P_0P_1}|}_{\text{väg}} = \mathbb{F}\underset{\substack{\uparrow\\ (\text{"skalärprod."})}}{\cdot}\overrightarrow{P_0P_1}$$

Om nu $\mathbb{F}$ inte är konstant och partikeln rör sig längs $C: \mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, $a\to b$ då approximerar vi arbetet så här:

sönderdela $[a,b]$: $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$,

ger $P_k=\mathbf{r}(t_k)$ $\qquad$ $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$

längs polygondraget $P_0P_1P_2\dots P_n$



$$\approx \sum_{k=1}^{n}\mathbb{F}(P_{k-1})\cdot\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$$

$\uparrow$

$\mathbb{F}=\mathbb{F}(P_{k-1})$ längs sträckan $P_{k-1}P_k$

$$=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{F}(\mathbf{r}(t_{k-1}))\cdot\underbrace{\frac{\mathbf{r}(t_k)-\mathbf{r}(t_{k-1})}{\Delta t_k}}_{\substack{\downarrow\\ \mathbf{r}'(t_k)}}\cdot\Delta t_k \xrightarrow[\max \Delta t_k\to 0]{} \int_a^b \mathbb{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$$

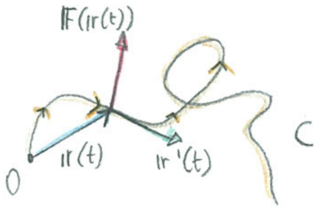
Torsdag
2010-02-11

DEF

$\mathbb{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $\mathbb{F}$ är C^0 på $U\subseteq\mathbb{R}^n$, $C: \mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, $a\xrightarrow{t}b$ är en C^1-kurva i U

Då kallas $A=\displaystyle\int_a^b \mathbb{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$

KURVINTEGRAL AV F LÄNGS C.



Om $\mathbb{F}$ är ett kraftfält, så är A det ARBETE SOM $\mathbb{F}$ UTRÄTTAR LÄNGS C, dvs. "då en partikel förflyttas från $\mathbf{r}(a)$ till $\mathbf{r}(b)$ längs C".

SATS ↑ Definitionen är vettig, dvs. talet A är oberoende av kurvans parametrisering.

Bevis (rep av $L=\int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt$ oberoende av param... $\left(\mathbb{F}=\frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}\right)$)

$$C:\begin{cases}\mathbf{r}=\mathbf{r}(t), & a\xrightarrow{t}b\\ \mathbf{r}=\mathbf{r}_1(u), & \alpha\xrightarrow{u}\beta\end{cases} \quad : \quad \begin{aligned}\varphi:[\alpha,\beta]&\longrightarrow[a,b]\\ u&\longmapsto\varphi(u)=t\end{aligned} \quad C'\text{-bijektion} \quad \begin{pmatrix}\varphi(\alpha)=a\\ \varphi(\beta)=b\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_1(u)=\mathbf{r}(\varphi(u))$$

$$A=\int_\alpha^\beta \mathbb{F}(\mathbf{r}_1(u))\,\mathbf{r}_1'(u)\,du=\int_\alpha^\beta \mathbb{F}(\mathbf{r}(\varphi(u)))\bullet\mathbf{r}'(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du=\begin{bmatrix}\varphi(u)=t\\ \varphi'du=dt\end{bmatrix}=$$

$$=\int_a^b \mathbb{F}(\mathbf{r}(t))\bullet\mathbf{r}'(t)\,dt$$

V.S.V. ■

Eftersom A är oberoende av C:s parametrisering, så skriver vi
koordinatfritt
parameterfritt

$$\boxed{A = \int_C \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r}}$$: kurvintegralen av $\mathbb{F}$ längs C

Utförlig motivering i $\mathbb{R}^3$:

$$A = \int_a^b \mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \cdot \mathbb{r}'(t)\,dt = \int_a^b \mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \bullet (x'(t), y'(t), z'(t))\,dt = \int_a^b \mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \bullet (x'(t)dt, y'(t)dt, z'(t)dt,$$

$$= \int_C \mathbb{F} \bullet (dx, dy, dz) = \int_C \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r} \qquad \text{med} \quad \boxed{d\mathbb{r} = \mathbb{r}'dt}$$

Vidare, med $\mathbb{F} = (P, Q, R)$ $\quad (P, Q, R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R})$ är

$$A = \boxed{\int_C \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r}} = \int_C (P, Q, R) \bullet (dx, dy, dz) = \boxed{\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz},$$ säger:

"kurvintegral av differentialformen $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ längs C"

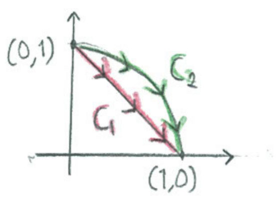
Ex 7

Beräkna det arbete som $\mathbb{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = (2y, x)$ uträttar då en partikel förflyttas från $(0,1)$ till $(1,0)$ längs

a) C_1 = sträckan

b) C_2 = enhets i 1:a kvadr. (kortaste vägen)

$\boxed{\text{Rita alltid!}}$



Lösn

a) $$A = \int_{C_1} \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r} = \int_{C_1} P dx + Q dy = \left[C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 1-t \end{cases}, 0 \xrightarrow{t} 1, \begin{array}{l} dx = 1 \cdot dt \\ dy = -1 dt \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^1 (2(1-t) + t \cdot (-1)) dt = \int_0^1 (2-3t) dt = 2 - \frac{3}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) $$A = \int_{C_2} P dx + Q dy = \left[C_2 : \begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{cases}, \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\varphi} 0, \begin{array}{l} dx = -\sin\varphi d\varphi \\ dy = \cos\varphi d\varphi \end{array} \right] =$$

$$= \int_{\pi/2}^{0} (2\sin\varphi(-\sin\varphi) + \cos\varphi \cdot \cos\varphi) d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (-2\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin^2\varphi - 1) d\varphi = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{3\cos^2\varphi}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

OBS: $A_1 \neq A_2$

Lösn b) med en annan parameterframställning:

generaliserad!

$$A_2 = \int_{C_2} P dx + Q dy = \left[C_2 : \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}, 0 \xrightarrow{t} 1, \begin{array}{l} dx = dt \\ dy = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \end{array} \right] = \int_0^1 \left(2\sqrt{1-t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\right) dt$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = \cos\varphi \\ dt = -\sin\varphi d\varphi \end{array} \right] = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(2 \cdot \sin\varphi - \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\right)(-\sin\varphi) d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (-2\sin^2\varphi + \cos^2(\varphi)) d\varphi = \text{som ovan!}$$

Frågan: För vilka $\mathbb{F}$ är kurvintegralen oberoende av vägen??

Behöver: nya begrepp:

A) för kurvor

B) för mängder

C) för fält

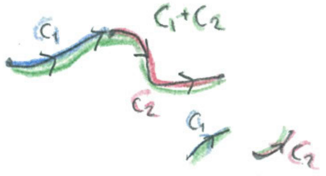
A) Nya begrepp för kurvor

DEF

C_1, C_2 och C kurvor i $\mathbb{R}^n$, $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \xrightarrow{t} b$

(a) $-C$ definieras genom $-C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $b \xrightarrow{t} a$
(samma pktmängd men motsatta genomlöpsriktn.)

(b) $C_1 + C_2$ är den kurva som fås då man genomlöper först C_1 sedan C_2.



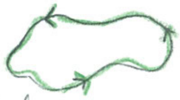
$C_1 + (-C_2)$ skrives $C_1 - C_2$
$C - C$ " 0

!! (c) Kurvan C kallas SLUTEN om $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ (startpkt = ändpkt)
ENKEL (simple) om $\mathbf{r}$ är injektiv bortsett från (ev.) $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$

[C skär inte sig själv, dubbelpunktsfri]

(d) en enkel, sluten kurva i $\mathbb{R}^2$ kallas ...
... POSITIVT / NEGATIVT ORIENTERAD om C genomlöps moturs / medurs

enkel, ej sluten



enkel, sluten, positivt or.

sluten, ej enkel

OBS: För en kontinuerlig kurva $\mathbf{r}$ är $V_{\mathbf{r}}$ en sluten mängd ($\subseteq \mathbb{R}^n$)
(blanda ej ihop det med "sluten kurva").

självklara räkneregler:

SATS

C_1, C_2 och C är C^1-kurvor i en öppen mängd $U \subseteq \mathbb{R}^n$,
$\mathbb{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ är C^0 i U.

(a) $$\int_{-C} \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r} = -\int_{C} \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r} \qquad \left[\cdots \int_b^a \mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \bullet \mathbb{r}'(t)\,dt = -\int_a^b \mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \bullet \mathbb{r}'(t)\,dt \;! \right]$$

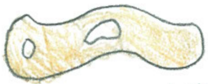
(b) $$\int_{C_1+C_2} \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r} = \int_{C_1} \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r} + \int_{C_2} \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r}$$

B) nya begrepp för mängder i planet (sedan i $\mathbb{R}^3$)

DEF

$U \subseteq \mathbb{R}^2$ (OBS) : Vi säger:

enkelt shgd mängd



bågvis, men ej enkelt shgd

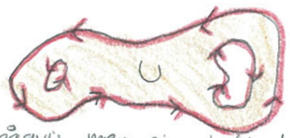
(a) U är ENKELT SAMMANHÄNGANDE om U är bågvis shgd. och "utan hål".

dvs.: varje sluten enkel kurva γ omsluter endast pkt i U

"Kan dras ihop till en pkt i U"

(b) U har POSITIVT ORIENTERAD RAND om U ligger vänster om ∂U

enkelt shgd, med positivt orienterad rand



bågvis, men ej enkelt shgd, med positivt orienterad rand

(∂U är en positivt or. kurva)

C) Nya begrepp för fält

DEF $\mathbb{F}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ är C^0 i en öppen mängd $U \subseteq \mathbb{R}^n$: Vi säger

(a) $\mathbb{F}$ är KONSERVATIVT I U om det finns en funktion $\phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sådan att $\mathbb{F} = \text{grad}\, \phi$ i U. En sådan funktion kallas POTENTIAL TILL $\mathbb{F}$ i U. (STAMMFUNKTION TILL $\mathbb{F}$ i U)

Vi säger även för ett konservativt fält $\mathbb{F}$:

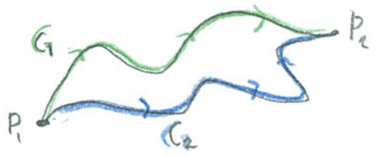
$\mathbb{F}$ är ett GRADIENTFÄLT I U

– – POTENTIALFÄLT I U

– – EXAKT I U

(b) $\int_C \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r}$ är OBEROENDE AV VÄGEN i U om för C^1-kurvor C_1 och C_2 med samma startpkt P_1 och ändpunkt P_2 som ligger i U gäller;

$$A = \int_{C_1} \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r} = \int_{C_2} \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r}$$



därför skriver man $A = \int_{P_1}^{P_2} \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r}$

[Läs dvs: kurvint. av $\mathbb{F}$ längs en kurva (vilken som helst) i U från P_1 till P_2]

Lv5

Flervariabelanalys

Med Bernhard Behrens

Anm: om konservativa fält, differentialform etc...

SATS: Greens sats]] BEVIS [

SATS: $\mathbb{F} = (P,Q)$ konservativ $\Leftrightarrow Q'_x = P'_y$ etc.]] BEVIS [

SATS: "arbete = potensskillnad"]] BEVIS [

SATS: Lagen om bevarandet av energin]] BEVIS [

SATS: allmänna lösningen till $Pdx + Qdy + Rdz = 0$]] BEVIS [

uttömmande exempel

DEF: yta s. 103

Problem 1: arean av en yta

DEF: areamått för en yta, dS = areaelement

SATS: areamåttet oberoende av ytans parametrisering]] BEVIS [

Ex: areaelementet för sfär och funktionsyta

Problem 2: hur mycket strömmar genom en yta?

DEF: ytintegral, flöde

Problemställning: hur mkt strömmar ut ur K?

DEF: divergens

SATS: Gauss sats]] BEVIS [s. 112

SATS: $\iint_{\partial K} \mathbb{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = \begin{cases} 0 \\ 4\pi \end{cases}$]] BEVIS [

källstyrka

SATS: Green ⇒ Gauss, Gauss ⇒ Green]] BEVIS [

DEF: rotation

DEF: ∇

DEF: a) källfritt

b) källa, sänka

DEF: rand till yta,
orienterad yta,
orienterad rand,
positiv/negativ sida

Måndag
2010-02-15

Rep

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow$
- enkel kurva, sluten kurva
- enkelt shgd mängd, med orienterad rand
- $\mathbb{F}$ konservativt (exakt) om $\mathbb{F}$ har en potential (dvs. $\mathbb{F} = \text{grad}\ \Phi$) $\Big\}$ i Ω

Anm

$\mathbb{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ konservativt i Ω med $\mathbb{F} = \text{grad}\ \varphi$ i Ω.

(1) Om $\mathbb{F}$ är C^m i Ω så är φ C^{m+1} i Ω.

(2) I en pkt $a \in \Omega$ anger $\mathbb{F}(a)$ den riktning i vilken potentialen φ ökar snabbast och fältstyrkan $|\mathbb{F}(a)|$ är den maximala tillväxten av Φ. $\mathbb{F}(a) \perp$ ekvipotentialytan $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(a)$

REP ↗

(3) Om Ω är bågvis shgd så är φ entydigt bestämd så när som på en konstant [om även $\mathbb{F} = \text{grad}\ \Phi_1$ (i Ω), så gäller $\text{grad}(\varphi - \Phi_1) = \vec{0}$ i $\Omega \Rightarrow \varphi - \Phi_1 = \text{konstant}$ (i Ω)]

(4) I fysik (ellära) räknar man med $U = -\varphi$ (kallas $-\varphi$ potential)

(5) (för $\mathbb{R}^3$) $\mathbb{F} = (P, Q, R) = (\Phi'_x, \Phi'_y, \Phi'_z)$, alltså

$d\varphi = \Phi'_x dx + \Phi'_y dy + \Phi'_z dz = P dx + Q dy + R dz$, därför säger man

DIFFERENTIALFORMEN $P dx + Q dy + R dz$ är EXAKT I Ω

och DIFFERENTIALEKVATIONEN $P dx + Q dy + R dz = 0$ — — — — - - -

(om (P, Q, R) är exakt i Ω)

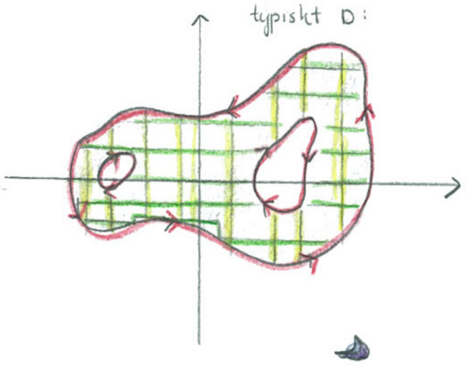
Ett av kursens viktigaste mål är att karaktärisera konservativa fält. Det fås med satserna av Green (i $\mathbb{R}^2$, kap. 9 satserna 2,3,4) och Stokes (i $\mathbb{R}^3$, kap 10 satserna 3, 4) som tillsammans med Gauss sats är grundpelarna för fysik ("Marvell-ekv").

Green (1793-1841) An Essay on the Applications of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism $\boxed{1828}$
(införde "potential", Green funktion)

SATS {Greens sats}

Föruts:
- $\mathbb{F} = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbb{F}$ är C^1 i $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$
- $D \subseteq \Omega$, D är kompakt, mätbar med positivt orienterad C^1-rand

D kan delas upp i ändligt många standardområden i x-led och i y-led.



Påst:

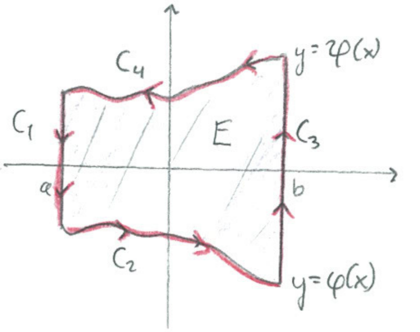
$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_{D} (Q'_x - P'_y)\, dx dy$$

Bevis

Bra ex. på hur man går till väga:
Man visar påståendet för enkel standardsituation, sedan visar man att det räcker!!

Steg 1 Vi visar det för $E: \begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \end{cases}$, φ, ψ C^0, ∂E moturs och för $\mathbb{F}_1 = (P, 0)$, dvs. vi skall visa:

$$\int_{\partial E} P dx = \iint_E (-P'_y)\, dx dy : \quad (\text{räkna ut...})$$



$$\partial E = \underbrace{C_1}_{\begin{cases} x=a,\ dx=0 \\ y=t,\ \psi(a) \xrightarrow{t} \varphi(a) \end{cases}} + \underbrace{C_2}_{\begin{cases} x=t,\ dx=dt \\ y=\varphi(t),\ a \xrightarrow{t} b \end{cases}} + \underbrace{C_3}_{\begin{cases} x=b,\ dx=0 \\ y= \dots \end{cases}} + \underbrace{C_4}_{\begin{cases} x=t,\ dx=dt \\ y=\psi(t),\ b \xrightarrow{t} a \end{cases}}$$

$$VL: \int_{\partial E} P dx = \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx + \int_{C_3} P dx + \int_{C_4} P dx =$$

$$= 0 + \int_a^b P(t, \varphi(t))dt + 0 + \int_b^a P(t, \varphi(t))\, dt =$$

$$= \int_a^b \left(P(t, \varphi(t)) - P(t, \psi(t)) \right) dt$$

$$HL = \iint_E (-P'_y)\, dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (-P'_y) dy \right) dx = \int_a^b \left[-P(x,y) \right]_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)} dx =$$

$$= \int_a^b \left(P(x, \varphi(x)) - P(x, \psi(x)) \right) dx \qquad \text{v.s.v.}$$

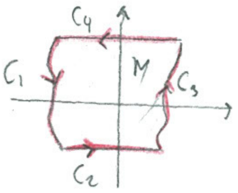
Steg 2 Addition över de ändligt många standardområden ger:

$$\underbrace{\int_{\partial D} P dx}_{\substack{\text{delningslinjerna ger} \\ \text{bidrag} = 0 \text{ ty } \text{"}dx = 0\text{"}}} = \underbrace{\iint_D (-P'_y)\, dx dy}_{\text{linjerna är nollmängder!}}$$

$\left[\text{eller: ty de genomlöper 2 ggr men i motsatt riktning, } \int_{-c} + \int_{c} = 0 \right]$

Steg 3 Visa p.s.s. $\displaystyle\int_{\partial M} Q dy = \iint_M Q'_x\, dx dy$ för

$M: \begin{cases} c \le y \le d \\ \alpha(y) \le x \le \beta(y) \end{cases}$



∂M moturs och $\mathbb{F}_2 = (0, Q)$

Addition över alla standardområden ger $\int_{\partial D} Q dy = \iint_D Q'_x \, dxdy$

Steg 4 Addera: $\mathbb{F} = (P, 0) + (0, Q)$: $\int_{\partial D} P dx + \int_{\partial D} Q dy =$

$$= \int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D (-P'_y + Q'_x) \, dxdy$$

v.s.v. ■

SATS {Huvudresultat för $\mathbb{R}^2$}

Föruts.: $\mathbb{F} = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, C^1 på $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$:

Föruts på Ω ...

{1} ... inga :

Om $\mathbb{F}$ är konservativt i Ω så gäller $Q'_x = P'_y$ i Ω

{2} Ω enkelt shgd :

Om $Q'_x = P'_y$ i Ω så är $\int_C \mathbb{F} \bullet d\mathbf{r}$ oberoende av vägen i Ω

{3} Ω bågvis shgd :

Om $\int_C \mathbb{F} \bullet d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen i Ω så är $\mathbb{F}$ konservativt i Ω.

Speciellt:

Om $\mathbb{F} = (P,Q)$ är C^1, Ω enkelt shgd, så är (1), (2), (3) ekvivalenta:

$$\boxed{\mathbb{F} \text{ konservativt } \underline{\underline{i\ \Omega}} \iff Q'_x = P'_y \ \underline{\underline{i\ \Omega}} \iff \int_c \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} \text{ oberoende av vägen } \underline{\underline{i\ \Omega}}}$$

Anm Visa: $\int_c \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}$ oberoende av vägen i Ω

$$\iff \int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = 0 \text{ för varje (enkel) sluten kurva } \gamma \subseteq \Omega$$

$\gamma = C_1 - C_2$

Bevis i Ω

(1) Om $\mathbb{F} = (P,Q) = (\varphi'_x, \varphi'_y)$ så gäller $P'_y = (\varphi'_x)'_y = (\varphi'_y)'_x = Q'_x$

(2) Om $Q'_x = P'_y$ så gäller för varje enkel sluten kurva $\gamma \subseteq \Omega$:

$$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma P dx + Q dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Green!!}}}{=} \pm \iint_D (Q'_x - P'_y)\, dx dy = 0$$

ty γ är rand till en mängd $D \subseteq \Omega$ ($\leftarrow$ Ω enkelt shgd!!)

(dvs. $\int_c \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}$ oberoende av vägen)

(3) Om $\int_c \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}$ ober. av vägen, så kan vi konstruera en potential φ till $\mathbb{F}$ [gäller i godt. $\mathbb{R}^n$]: välj $a \in \Omega$, till varje $x \in \Omega$ finns en C^1-väg $\subseteq \Omega$ (Ω bågvis shgd, öppen)

Sätt $\varphi(x) = \int_a^x \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}$: visar nu: $\varphi'_x = P$, $\varphi'_y = Q$ dvs.: φ är en potential till $\mathbb{F}$

↑ ger bra förståelse av vad "arbete" (potential) är

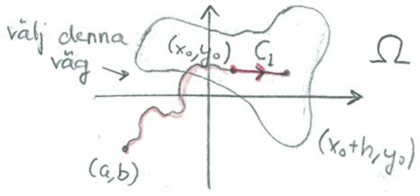
(φ väldefinierad, ty "oberoende av vägen")

För $\underset{(x_0,y_0)}{\overset{}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{x}_0}}} \in \Omega$: $\dfrac{\varphi(x_0+h,y_0)-\varphi(x_0,y_0)}{h} = \dfrac{1}{h}\left(\int_{(a,b)}^{(x_0+h,y_0)} Pdx+Qdy - \int_{(a,b)}^{(x_0,y_0)} Pdx+Qdy\right) =$

$$= \frac{1}{h}\int_{(x_0,y_0)}^{(x_0+h,y_0)} Pdx+Qdy = \qquad \longrightarrow \underbrace{\varphi_x'(x_0,y_0)}_{=P(x_0,y_0)} \text{ då } h\longrightarrow 0$$

$$= \frac{1}{h}\int_{C_1} Pdx+Qdy = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} P(t,y_0)dt = [\text{MVS}] =$$

$$= \frac{1}{h}P(\tau,y_0)\cdot h = P(\tau,y_0) \xrightarrow[h\to 0]{} P(x_0,y_0)$$



$$\left.\begin{array}{l} (x_0,y_0) \text{ inre pkt,} \\ h \text{ så litet att } C_1 = \text{sträckan} \\ \text{från } (x_0,y_0) \text{ till } (x_0+h,y_0) \subseteq \Omega \end{array}\right\} \quad C_1 : \begin{cases} x=t,\ dx=dt \\ y=y_0,\ dy=dt, \end{cases} x_0 \xrightarrow{t} x_0+h$$

SATS

$\mathbb{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ konservativt i Ω, C^1, med $\mathbb{F} = \text{grad}\,\varphi$

Då gäller för <u>varje</u> C^1-kurva $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \xrightarrow{t} b$ från $P_0 = \mathbf{r}(a)$ till $P_1 = \mathbf{r}(b)$ i Ω

$$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = \varphi(P_1) - \varphi(P_0)$$

[dvs.: "arbete = potenskillnad" och $\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}$ oberoende av vägen i Ω!]

Bevis

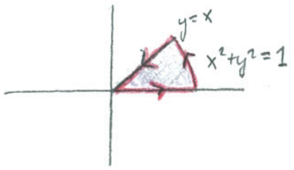
$$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_a^b \mathbb{F}(\mathbb{r}(t))\cdot\mathbb{r}'(t)\,dt = \int_a^b \underbrace{\operatorname{grad}\varphi(\mathbb{r}(t))\cdot\mathbb{r}'(t)}_{\frac{d}{dt}\varphi(\mathbb{r}(t))}\,dt =$$

$$= \Big[\varphi(\mathbb{r}(t))\Big]_a^b = \varphi(P_1) - \varphi(P_0) \qquad (\leftarrow \text{därför: } \varphi \text{ stammfkt. till } \mathbb{F})$$

$$\left(\int_C d\varphi = \int_{P_0}^{P_1} d\varphi = \varphi(P_1) - \varphi(P_0)\ !\right)$$

Ex Beräkna det arbete som $\mathbb{F} = (P, Q) = (\cosh\frac{1}{1+x^3} - y^3,\ e^{-y^3} + x^3)$ uträttar då en partikel förflyttas ett varv runt D moturs

Lösn



$$A = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy \underset{\text{Green}}{=} \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy =$$

$$= 3\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = [p.k.] = 3\int_0^{\pi/4}\int_0^1 r^2\cdot r\,dr\,d\varphi = 3\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{4} = \boxed{\frac{3\pi}{16}}$$

Onsdag
2010-02-17

Rep

$\mathbb{F} = (P,Q) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, C^1 … $\displaystyle\int_{\partial D} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{D} (Q'_x - P'_y)\,dxdy$ (Föruts?)

$\partial D \leftarrow$ orient $\rightarrow D$

i Ω

Om $\mathbb{F}$ konservativt med $\mathbb{F} = \text{grad}\,\varphi$: } arbete ober. av vägen :

$\mathbb{F}$ konserv. $\iff Q'_x = P'_y \iff \displaystyle\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}$ ober. av vägen

(Ω enkelt shgd)

$\left(\displaystyle\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \right.$ för slutna$\left.\right)$

då är $\displaystyle\int_{P_2}^{P_1} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(P_1) - \varphi(P_2)$, alltså (kap 9:ö6):

$\mathbb{F}$ uträttar arbete 0 längs ekvipotentiallinjer (kurvor som ligger i en ekvipotentialyta)

$$\left(\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(P_1) - \varphi(P_0) = 0 \right)$$

Motiverar "konservativt":

SATS {lagen om bevarandet av energin}

$\mathbb{F}$ konservativt med $\mathbb{F} = \text{grad}\,\varphi$ i Ω; då gäller

med $\underline{PE} = -\varphi$ (potentiell energi)

$KE = \frac{1}{2}mv^2$ (kinetisk energi)

$\left(\begin{array}{l} m = \text{massa} \\ v = \text{hastigh.} \end{array}\right)$

För punkter P_0 och P_1 i Ω sådana att det finns en C^1-väg i Ω:
$C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \xrightarrow{t} b$, $\mathbf{r}(a) = P_0$, $\mathbf{r}(b) = P_1$ gäller

$$\boxed{PE(P_0) + KE(P_0) = PE(P_1) + KE(P_1)}$$

Bevis

$$\varphi(P_1)-\varphi(P_0) = \int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_a^b \mathbb{F}\circ \mathbb{r}'(t)\,dt = \int_a^b m\mathbb{r}''\circ \mathbb{r}'(t)\,dt \overset{!!!}{=}$$

$$= m\int_a^b \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbb{r}'\circ\mathbb{r}')\,dt = \frac{1}{2}m\int_a^b \frac{d}{dt}|\mathbb{r}'(t)|^2\,dt = \frac{1}{2}m\left[|\mathbb{r}'(t)|^2\right]_a^b =$$

$$= \frac{1}{2}m\left(|\mathbb{r}'(b)|^2-|\mathbb{r}'(a)|^2\right) = KE(P_1)-KE(P_0) \quad \text{och} \quad \varphi(P_1)-\varphi(P_0) = -PE(P_1)+PE(P_0)$$

altså: $-PE(P_1)+PE(P_0) = KE(P_1)-KE(P_0)$

v.s.v. ■

SATS

Den exakta differentialekvationen $Pdx+Qdy+Rdz=0$ har den allmänna lösningen $\varphi(x,y,z)=C$ (konstant) där φ är en potential till (P,Q,R) i Ω.

Bevis

$$d\varphi = \varphi'_x dx+\varphi'_y dy+\varphi'_z dz = 0 = Pdx+Qdy+Rdz$$

■

Ex $\mathbb{F} = (P,Q) = (x^3 - 3xy^2, \ y^3 - 3x^2y)$

(1) Visa att $\mathbb{F}$ är konservativt (i $\mathbb{R}^2$).

(2) Bestäm en potential till $\mathbb{F}$

(3) Lös (DE) $(x^3 - 3xy^2)dx + (y^3 - 3x^2y)\,dy = 0$

(4) Beräkna det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar längs

$$C: \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 4t \end{cases}, \quad 0 \xrightarrow{t} \frac{\pi}{4}$$

(Lissajou-kurva)

Lösn

(1) $Q'_x = -6xy = P'_y \implies \mathbb{F}$ är konservativt (i hela $\mathbb{R}^2$)

(2) Vet att det finns φ sådan att

$$\varphi'_x = x^3 - 3xy^2 \implies \varphi(x,y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + g(y)$$

och $\varphi'_y = y^3 - 3x^2y \overset{!}{=} -3x^2y + g'(y)$

sätt in (bestäm g så att)

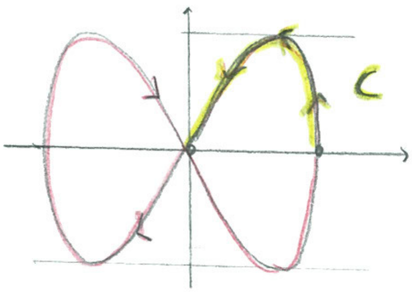
$$\implies y^3 = g'(y) \implies g(y) = \frac{1}{4}y^4 \quad (+C \xleftarrow{\text{välj } C=0})$$

Svar: $\boxed{\varphi(x,y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4}$

Svar till (3): $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = C$

(4) Svar:

$$A = \varphi(0,0) - \varphi(1,0) = -\frac{1}{4}$$



Nu till problemet: Vilka fält $\mathbb{F}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ är konservativa??

Förberedelse: YTA - YTINTEGRAL:

PB 3.1.2

DEF

En avbildning $\mathbf{r}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (bara för $n=3$), $(u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$

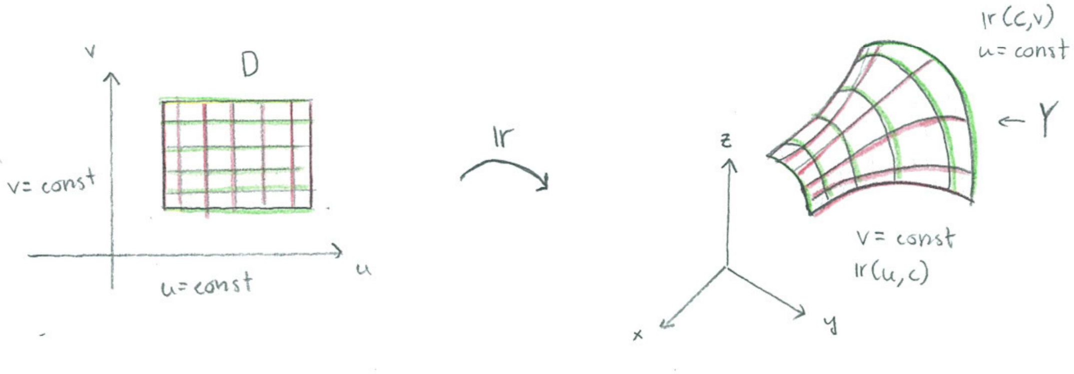
$(u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

kallas YTA.

Skriver upp det så: $Y: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v),\ (u,v) \in D$, eller utförligt:

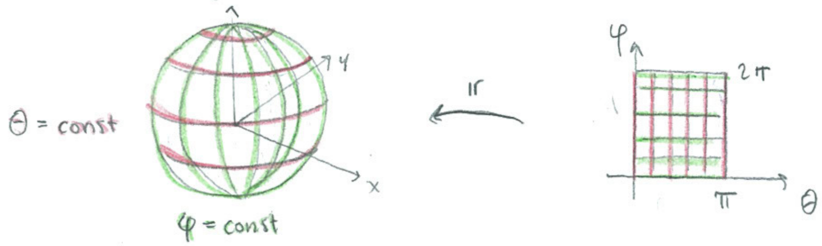
$$Y: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in D,$$

kallar värdemängden $V_{\mathbf{r}}$ "yta"

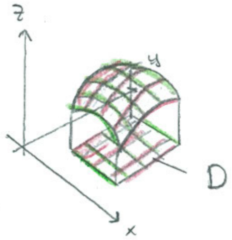


Ex

a) Sfären $Y: \begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$ $\quad D: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$



b) funktionsytor: $\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases}$ $\quad (x,y) \in D$



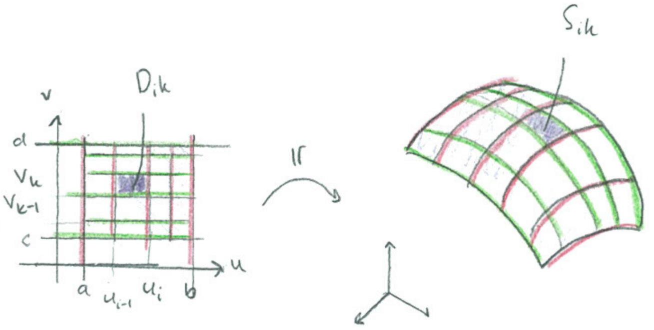
Problem 1

beräkna arean av $Y: \mathbb{r} = \mathbb{r}(u,v),\ (u,v) \in D$

(utförl. motivation:)

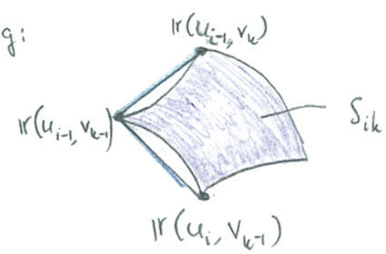
söderdela $D: \begin{cases} a \leq u \leq b \\ c \leq v \leq d \end{cases}$

$a = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = b$
$c = v_0 < v_1 < \ldots < v_m = d$



$D_{ik}: \begin{cases} u_{i-1} \leq u \leq u_i \\ v_{k-1} \leq v \leq v_k \end{cases}$

förstoring:



D_{ik} avbildas på S_{ik}, arean av $\underbrace{S_{ik}}$ är $\approx$ arean av parallellogrammet

dvs. $\Delta S_{ik} \approx |(\mathbf{r}(u_i, v_{k-1}) - \mathbf{r}(u_{i-1}, v_{k-1})) \times (\mathbf{r}(u_{i-1}, v_k) - \mathbf{r}(u_{i-1}, v_{k-1}))| =$

MVS! $= |\mathbf{r}'_u(\xi_i, v_{k-1})\Delta u_i \times \mathbf{r}'_v(u_{i-1}, \eta_k)\Delta v_k| = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \Delta u_i \Delta v_k$

där ξ_i ligger mellan u_{i-1} och u_i
η_k - — v_{k-1} och v_k

ger:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \Delta S_{ik} \approx \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_r|}_{\text{i ngn pkt } (\xi_i, \eta_k) \in D_{ik}} \Delta u_i \Delta v_k$$

$\downarrow$ då max $\Delta S_{ik} \to 0$

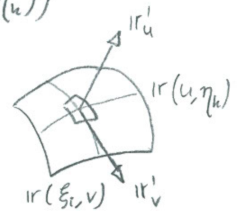
$\downarrow$ då max diam $D_{ik} \to 0$

(om $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ är C^0, D begränsad, mätbar)

$$\iint_Y dS \qquad \iint_D |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, du dv$$

Anm

$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ = normalvektorn till ytan Y (i $\mathbf{r}(\xi_i, \eta_k)$)
(tangentplan till Y i pkt ↯)
(spänns upp av tangentparvektorerna $\mathbf{r}'_u$ och $\mathbf{r}'_v$)



DEF

$Y: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v),\ (u,v) \in D$ är en C^1 yta, D mätbar, begränsad, då är

$$\iint_Y dS = \iint_D |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, du dv$$ ett areamått för ytan Y.

!! dS kallas AREAELEMENTET PÅ Y, i given param.:

$$dS = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, du dv$$

OBS: (stort!) S: surface [kom ihåg: $ds = |\mathbf{r}'| dt$]

SATS

Definitionen är vettig, dvs. talet $\iint_{\gamma} dS$ är oberoende av ytans parameterframställning.

Bevis

Om även $Y : \mathbf{r} = \mathbf{r}(s,t)$, $(s,t) \in D' \; (C^1)$: och

$\underset{(u,v) \longmapsto (s,t)}{\Pi : D \longrightarrow D'}$ en C^1-bij. så gäller

$$\iint_D |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, du dv = \iint_{D'} \underbrace{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \cdot \frac{d(u,v)}{d(s,t)}|}_{\text{visa (ex. 5 sid 302)}} ds dt = \iint_{D'} |\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t| \, ds dt$$

V.S.V. ▨

Ex Areaelementet för sfären:

$$r'_\theta \times r'_\varphi = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ R\cos\theta\sin\varphi & R\cos\theta\sin\varphi & -R\sin\theta \\ -R\sin\theta\sin\varphi & R\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= R^2 \overbrace{\sin\theta}^{>0} (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) = R\sin\theta\,(x,y,z)$$

$$\boxed{dS = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}$$

Areaelementet för en funktionsyta:

$z - f(x,y) = 0$

$$\mathbb{r}'_x \times \mathbb{r}'_y = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = (-f'_x, -f'_y, 1)$$

$$\boxed{dS = |\mathbb{r}'_x \times \mathbb{r}'_y|\, dx\,dy = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dx\,dy}$$

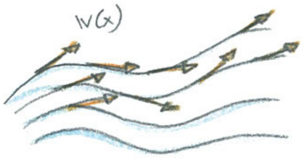
Arean av sfären;

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 2\pi R^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = \boxed{4\pi R^2}$$

ANM normalvektorn $\mathbb{r}'_u \times \mathbb{r}'_v = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \left(\frac{d(y,z)}{d(u,v)}, \frac{d(z\,x)}{d(u,v)}, \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right)$

Problem?

Givet ett strömnings fält
hastighets "
riktning "



$|\mathrm{ir}(a)|$ är den substansmängd som per areaenhet och tidsenhet förflyttas i riktningen $\mathbb{w}(a)$

substans kan vara

gas
vätska (kg/m^{2}s), energi (J/m^{2}s) ...

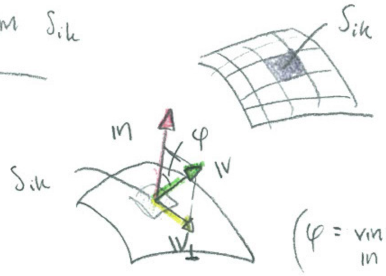
Problemställning

Hur mycket av substansen (per tidsenhet) strömmar (passerar) genom en yta Y i riktningen $\mathbb{n}$ där $\mathbb{n}$ är ett <u>enhetsnormalfält</u> ($\mathbb{n}(a) \perp$ tangentpl. till Y i a, $|\mathbb{n}|=1$)

Sönderdela Y i ("små") S_{ik} med arean ΔS_{ik}:

$\mathbb{w} \perp \mathbb{n}$ (parall. Y): inget strömmar genom S_{ik}

$\mathbb{w} /\!/ \mathbb{n}$ ($\perp$ ytan): allt —— " ——



allm.: $\mathbb{w} = \underbrace{\mathbb{w}_{/\!/}}_{\text{parall. } \mathbb{n}} + \underbrace{\mathbb{w}_\perp}_{\text{vinkelrät mot } \mathbb{w} \text{ ger bidrag}}$

(φ = vinkeln mellan $\mathbb{n}$ och $\mathbb{w}$)

$|\mathbb{w}_{/\!/}| = |\mathbb{w}| \cdot \cos\varphi = \mathbb{w} \cdot \mathbb{n}$ substansenteter strömmar gen. S_{ik} i riktningen $\mathbb{n}$

↑ här ingår $|\mathbb{n}|=1$

genom S_{ik} strömmar $\approx \mathbb{w} \cdot \mathbb{n} \, \Delta S_{ik}$

för hela ytan Y:

(bara $\approx$, ty S_{ik} ej plan och $\mathbb{w}$ ej konstant på S_{ik})

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{w} \cdot \mathbb{n} \, \Delta S_{ik} \xrightarrow[\max \Delta S_{ik} \to 0]{} \iint_Y \mathbb{w} \cdot \mathbb{n} \, dS,$$ det motiverar:

DEF $\mathbf{w}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ är C^0 i Ω, $Y:\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v)\in D$ är C^1, $Y\subseteq\Omega$, med enhetsnormalfält $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ är C^0 ty Y är $\overset{\text{begränsad, mätbar}}{C^1}$)

Då kallas $F=\iint\limits_Y \mathbf{w}\cdot\mathbf{n}\,dS$ (NORMAL-) YTINTEGRAL AV $\mathbf{w}$ ÖVER Y, om $\mathbf{w}$ är ett strömningsfält så kallas F FLÖDET AV $\mathbf{w}$ GENOM Y i riktningen $\mathbf{n}$.

(det är ett mått för den substansmängd som strömmar genom Y i riktn. per tidsenhet)

OBS OBS OBS! Beräkning

[F är oberoende av Y:s parametrisering] c.o.

$$\left[L=\int_c ds=\int_a^b \mathbf{r}'(t)\,dt=\int_a^b \underset{\substack{\uparrow\\ \text{enhetstang.}}}{\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}}\,ds\right]$$

(1) För $Y:\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v)\in D$: enhetsnormalfält $\mathbf{n}=\dfrac{\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v|}$, $dS=|\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v|\,du\,dv$, alltså:

$$\boxed{F=\iint\limits_Y \mathbf{w}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iint\limits_D \mathbf{w}\cdot(\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v)\,du\,dv}$$

(behöver inte normera!!)

(2) För $Y: z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$: enhetsnormalfält $\mathbf{n}=\dfrac{(-f'_x,-f'_y,1)}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}}$, $dS=\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,dx\,dy$, alltså

$$\boxed{F=\iint\limits_Y \mathbf{w}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iint\limits_D \mathbf{w}\cdot(-f'_x,-f'_y,1)\,dx\,dy}$$

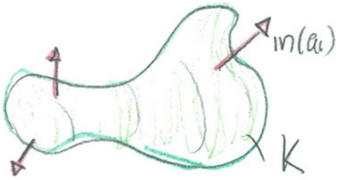
DEF s.o. och $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kontin. på Y:

$\iint_Y f\,dS$ = Ytintegral av f över Y

[ger totala massan av Y om f = densitet (ρ)
 – – laddningen – Y om f = laddningstäthet (q)]

Problemställning

Givet ett strömningsfält och en kropp $K \subseteq \mathbb{R}^3$:
Hur mycket (av substansen) strömmar ut ur K, dvs. genom ∂K i riktningen
$\mathbf{n}$ = utåtriktat enhetsnormalfält, alltså $F = \iint_{\partial K} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}\, dS$



möjliga resultat:

$F>0$: det tillkommer substans i K (produktion)

$F<0$: det konsumeras – –

$F=0$: om det inte finns "källor, sänkor":
lika mycket strömmar in i K som ut ur K!

Gauss sats säger:

"Allt som produceras i K går genom ∂K:"
(förintas)

mäter man detta = mätes detta

Gauss sats ger hur

DEF $\mathbb{W}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 i Ω; då definieras

$$\operatorname{div} \mathbb{W} = \frac{\partial}{\partial x_1} V_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} V_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} V_n \qquad \mathbb{W} = (v_1, v_2, \ldots, v_n),$$ kallas

div $\mathbb{W}(a)$ "DIVERGENSEN AV $\mathbb{W}$ i pkt a"

Ex En punktladdning i origo alstrar det elektrostatiska (Coulombs lag) fältet $\mathbb{E} = \frac{\mathbb{r}}{|\mathbb{r}|^3} = (E_1, E_2, E_3) = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\operatorname{div} \mathbb{E} = \frac{\partial}{\partial x} E_1 + \frac{\partial}{\partial y} E_2 + \frac{\partial}{\partial z} E_3 = \frac{3r^2 - 3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = \boxed{0}$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial x} &= \frac{1\cdot 1^3 - x\cdot 3\cdot r^2\cdot \frac{x}{r}}{r^6} = \frac{r^2-3x^2}{r^5} \\ \frac{\partial E_2}{\partial y} &= \frac{1\cdot r^3 - y\cdot 3\cdot r^2\cdot \frac{y}{r}}{r^6} = \frac{r^2-3y^2}{r^5} \\ \frac{\partial E_3}{\partial z} &= \quad - \quad — \quad - \quad = \frac{r^2-3z^2}{r^5} \end{aligned}\right]$$

SATS

{Gauss sats, divergenssats, Ostrogratsky (Petersburg): 1831}

Föruts:

- $K \subseteq \mathbb{R}^3$, kompakt, mätbar,
  $$\left.\begin{array}{l}\partial K \text{ är } C^1 \text{ med utåtriktad enhetsnormalfält } \mathbf{n} \\ K \text{ kan delas upp i ändligt många standardområden} \\ \text{i } x\text{-led, i } y\text{-led och i } z\text{-led}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{bortsett från} \\ \text{nollmängder}\end{array}$$
- $\mathbf{v}$ är C^1 i $\Omega \supseteq K$ $\quad (\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3))$

Påst:

$$\underbrace{\iint_{\partial K} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS}_{\text{allt som strömmar ut ur } K} = \underbrace{\iiint_K \operatorname{div} \mathbf{v}\, dx\,dy\,dz}_{\text{allt som alstras i det inre, konsumeras}}$$

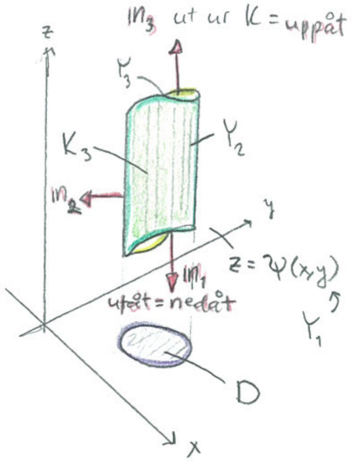
Bevis

igen: Först för en enkel standardsituation sedan "att det räcker".

Steg 1: För $K_\varepsilon = \{(x,y,z) : (x,y) \in \overset{\text{begränsad, mätbar}}{D},\ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$ (kontin.)

och $\mathbf{v} = (0, 0, v_3)$: påst: $\displaystyle\iint_{\partial K_\varepsilon} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iiint_{K_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} v_3\, dx\,dy\,dz$

$$\text{VL: } \iint_{\partial K_\varepsilon} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iint_{Y_1} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS + \iint_{Y_2} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS + \iint_{Y_3} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS =$$



$$= \iint_D (0,0,v_3)\cdot(\overset{\text{nedåt}}{\varphi'_x, \varphi'_y, -1})\,dxdy \; +$$

$$+ \underbrace{\iint_{Y_2} (0,0,v_3)\cdot(n_1,n_2,0)\,dS}_{=0} \; +$$

$$+ \iint_D (0,0,v_3)\cdot(\underset{\text{uppåt}}{-\psi'_x, -\psi'_y, 1})\,dxdy = \dots$$

$$HL = \iiint_{K_3} \frac{\partial}{\partial z} v_3\,dxdydz = \iint_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) dxdy = \iint_D \Big[v(x,y,z) \Big]_{z=\varphi(x,y)}^{z=\psi(x,y)} dxdy = \dots$$

$$\dots = \iint_D \big(-v_3(x,y,\varphi(x,y)) + v_3(x,y,\psi(x,y))\big)\,dxdy, \qquad \text{v.s.v.}$$

Steg 2 summation över standardområden i z-led ger

$$\underbrace{\iint_{\partial K} (0,0,v_3)\cdot \mathbf{n}\,dS}_{\substack{\text{delningsytorna ger}\\ \text{bidrag } 0 \ (\mathbf{n}=(a,b,0)),\\ \text{eller: de är med 2ggr,}\\ \text{en gång med } \mathbf{n}_3\\ \text{och en med } \mathbf{n}_1}} = \underbrace{\iiint_K \frac{\partial v_3}{\partial z}\,dxdydz}_{\text{ytor är nollmängder}}$$

Steg 3 analogt i y-led och i x-led: ger:

$$\iint_{\partial K} (0,v_2,0)\cdot \mathbf{n}\,dS = \iiint_K \frac{\partial}{\partial y} v_2\,dxdydz$$

$$\iint_{\partial K} (v_1,0,0)\cdot \mathbf{n}\,dS = \iiint_K \frac{\partial}{\partial x} v_1\,dxdydz$$

Steg 4 addition ger:

$$\mathbf{w} = (v_1,0,0) + (0,v_2,0) + (0,0,v_3):$$

$$\iint_{\partial K} \mathbf{w}\cdot \mathbf{n}\,dS = \iiint_K \left(\frac{\partial}{\partial x} v_1 + \frac{\partial}{\partial y} v_2 + \frac{\partial}{\partial z} v_3 \right) dxdydz$$

v.s.v. ∎

Ex $\mathbb{E} = \frac{\mathbb{r}}{r^3}$: Flödet av $\mathbb{E}$ ut ur klotet $K: x^2+y^2+z^2 \leq 1$

är $\iint_{\partial K} \mathbb{E} \cdot \mathbb{n} \, dS \neq \iiint_K \underbrace{\operatorname{div} \mathbb{E}}_{=0} \, dxdydz = 0$ $\sqrt{}\sqrt{}\sqrt{}$ USCH! ×2

Gauss går ej ty $\mathbb{E}$ är inte C^1 i $(0,0,0) \in K$!!

SATS $K \subseteq \mathbb{R}^3$ är kompakt, mätbar

$$\iint_{\partial K} \mathbb{E} \cdot \mathbb{n} \, dS = \begin{cases} 0, & \text{om } (0,0,0) \notin K \\ 4\pi, & \text{om } (0,0,0) \text{ är inre plt i } K \end{cases}$$

(odefinierad om $(0,0,0) \in \partial K$)

Bevis Om $(0,0,0) \notin K$ gäller Gauss, ger: $\iint_{\partial K} \mathbb{E} \cdot \mathbb{n} \, dS = 0$

Om $(0,0,0)$ är en inre plt i K, så finns $K_\delta : x^2+y^2+z^2 \leq \delta^2$, då gäller
$U_\delta : x^2+y^2+z^2 < \delta^2$

Gauss för $M = K \setminus U_\delta$

$$\partial M = \partial K \cup \partial U_\delta$$

(in utåt)

s.o. sfär. kon
$$\begin{cases} x = \delta \sin\theta \cos\varphi \\ y = \delta \sin\theta \sin\varphi \\ z = \delta \cos\theta \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\iint_{\partial M} \mathbb{E} \cdot \mathbb{n}\, dS}_{0} = \underbrace{\iint_{\partial K} \mathbb{E} \cdot \mathbb{n}\, dS}_{F} + \underbrace{\iint_{\partial K_\delta} \mathbb{E} \cdot \mathbb{n}\, dS}_{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mathbb{r}}{\delta^3} \cdot \underbrace{\frac{-\mathbb{r}}{\delta}}_{} dS} =$$

enhetsnormalen ut ur M
dvs. in i K_δ

$$= F - \frac{1}{\delta^2} m(K_\delta) = F - \frac{4\pi\delta^2}{\delta^2} \Longrightarrow F = 4\pi$$

V.S.V. ■

Torsdag
2010-02-18

Rep

- $Y : \mathbb{r} = \mathbb{r}(u,v),\ (u,v) \in D$ (Yta i $\mathbb{R}^3$),
  arean av Y: $\iint_Y dS = \iint_D |\mathbb{r}'_u \times \mathbb{r}'_v|\, du dv$
- $\mathbb{v} = (v_1, v_2, v_3) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$: Flödet av $\mathbb{v}$ genom Y i [eng. flux, lat. fluxus = flytande] riktningen $\mathbb{n}$ ($\mathbb{n}$ enhetsnormalfält) är
  $$\iint_Y \mathbb{v} \cdot \mathbb{n}\, dS = \iint_D \mathbb{v} \cdot \mathbb{r}'_u \times \mathbb{r}'_v\, du dv \quad \left(= \iint_D \mathbb{v} \cdot (-f'_x, -f'_y, 1)\, dx dy \text{ då } Y : z = f(x,y) \right)$$
- $\operatorname{div} \mathbb{v} = \frac{\partial}{\partial x} v_1 + \frac{\partial}{\partial y} v_2 + \frac{\partial}{\partial z} v_3$

motivering för "namnet":

I fysik definieras KÄLLSTYRKAN AV $\mathbf{w}$ i pkt P_0

som

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\iint_{\partial K_\varepsilon} \mathbf{w}\cdot\mathbf{n}\,dS}{m(K_\varepsilon)} \underset{(\text{Gauss})}{=}$$

[dvs: ett mått för KÄLLTÄTHETEN av $\mathbf{w}$ i P_0, dvs. hur mycket substans som alstras i P_0 per volymenhet (och/tidsenhet)
(förintas)]

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\iiint_{K_\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{w}\,dx\,dy\,dz}{m(K_\varepsilon)} = [\text{MVS}] =$$

$K_\varepsilon = \{P : |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}| \leq \varepsilon\}$
(klot kring P_0) $\mathbf{n}$ utåtriktad, norm.

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\operatorname{div} \mathbf{w}(\xi,\eta,\zeta)\cdot \cancel{\iiint_{K_\varepsilon} dx\,dy\,dz}}{\cancel{m(K_\varepsilon)}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \operatorname{div} \mathbf{w}(\xi,\eta,\zeta) = \operatorname{div} \mathbf{w}(P_0)$$

(ty $\mathbf{w}$ är C^0)

för ngn punkt $(\xi,\eta,\zeta) \in K_\varepsilon$

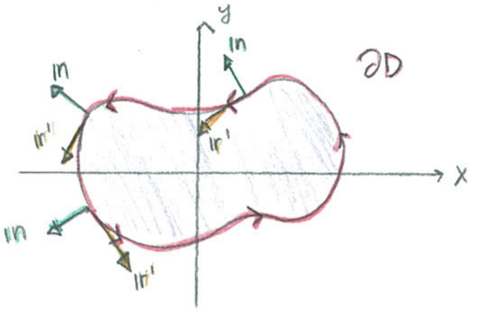
OBS: oberoende av koordinatsystemet

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{w}(P_0) = \text{källstyrkan av } \mathbf{w} \text{ i } P_0}$$

Gauss gäller för alla n, för $n=2$ (i planet):

$\mathbf{w} = (v_1, v_2) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ C^1 i $\Omega \supseteq D$, D komp., mätbar med positivt orienterad rand ∂D:

(dimension av $|\mathbf{w}|$ är kg/ms eller J/ms)
("per längdenhet")



A) "Green ⇒ Gauss"

Påst: $\displaystyle\int_{\partial D} \mathbf{w}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{w}\,dx\,dy$

enhetsnorm. ut från D
("Flödet av $\mathbf{w}$ ut ur D")

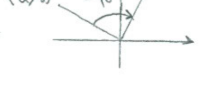
$\partial D : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) : a \xrightarrow{t} b$

$\mathbf{r}' = (x', y')$

$\mathbf{n} = \dfrac{(y', -x')}{|\mathbf{r}'|}$

vridning $-90°$

$(a+jb)(-j) = b-aj$



Bevis

$$\int_{\partial D} \mathbb{v}\cdot\mathbb{n}\,ds = \int_a^b (v_1,v_2)\cdot\frac{(y',-x')}{|\mathbb{r}'|}\overbrace{|\mathbb{r}'|\,dt}^{ds} = \int_a^b (v_1y' - v_2x'\,dt) =$$

$$= \int_{\partial D} v_1dy - v_2dx \overset{\text{Green}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}v_1 + \frac{\partial}{\partial y}v_2\right)dxdy$$

V.S.V. ■

B) "Gauss $\Rightarrow$ Green" $(Q, P \quad C^1 \ldots)$

Påst: $\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D (Q'_x - P'_y)dxdy$

Bevis För $\mathbb{v} = (Q, P)$ är $\operatorname{div}\mathbb{v} = Q'_x - P'_y$ och

$$\int_{\partial D} \mathbb{v}\cdot\mathbb{n}\,ds = \int_a^b (Q,-P)\cdot(y',-x')dt = \int_a^b Qy'dt + Px'dt = \int_{\partial D} Qdy + Pdx$$

$$\| \text{ Gauss}$$

$$\iint_D \operatorname{div}\mathbb{v}\,dxdy = \iint_D (Q'_x - P'_y)dxdy$$

V.S.V. ■

Nu den tredje, viktiga differentialoperatorn (1:a grad, 2:a div)

DEF För ett part. deriverbart fält $\mathbb{F} = (X, Y, Z) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(X, Y, Z : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3)$

definieras $\text{rot}\, \mathbb{F} = (Z'_y - Y'_z, X'_z - Z'_x, Y'_x - X'_y)$,

kallas ROTATION AV $\mathbb{F}$.

Ett bra sätt att komma ihåg; Titta:

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 5$$

[denna "diff-oper." gör allt enkelt!]

kolla alla dessa
3 diff operatorer grad, div och rot
kan uttryckas med
en enda: ∇ !!

DEF Differentialoperatorn

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \text{ kallas NABLA OPERATORN,}$$

definieras genom

(1) För part. deriv. $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\boxed{\nabla f} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \boxed{\text{grad} f}$$

(2) För part. deriv. $\mathbb{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbb{F}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \cdot (F_1, F_2, \ldots, F_n) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \boxed{\text{div } \mathbb{F}}$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbb{F}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (F_1, F_2, F_3) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \boxed{\text{rot } \mathbb{F}}$$

∇ skrives som vektor ty den funkar som en (geom.) vektor och allt blir enkelt:
komplicerade deriveringsregler är enkla vektoridentiteter, typ
$\underline{\mathbb{a}\cdot(\mathbb{b}+\mathbb{c})} = \mathbb{a}\cdot\mathbb{b}+\mathbb{a}\cdot\mathbb{c}$, $\mathbb{a}\times\mathbb{a} = \vec{0}$ ... (10:040-46, ffa. 42)

ANM

(1) namnet: nabla (grek.) är ett urgammalt stränginstrument
(harpliknande)

(2) vektorn: infördes av Hamilton (1805-1865)

(3) symbolen: ∇ kan ses som ett upp- och nervänt Δ (delta, Laplace-oper.)

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} : \quad \Delta = \nabla\cdot\nabla$$

[därför ej så bra att kalla ∇ "del-oper."]

[$\Delta u = f$ (vågekv.): viktigaste ekv...]

Om div $\mathbb{F} = 0$

För $\mathbb{F} = \nabla\varphi$ (konserv): div $\mathbb{F} = \nabla\cdot(\nabla\varphi) = \Delta\varphi = 0$:
konser

φ HARMONISK FKT

DEF

$w : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, C^1 .. Vi säger:

(a) w är KÄLLFRITT i Ω om div $w = 0$ i Ω

(b) I P_0 finns en KÄLLA (source) om div $w(P_0) > 0$ ($P_0 \in \Omega$) (substans alstras)

en SÄNKA (sink) — — < 0 (substans förintas)

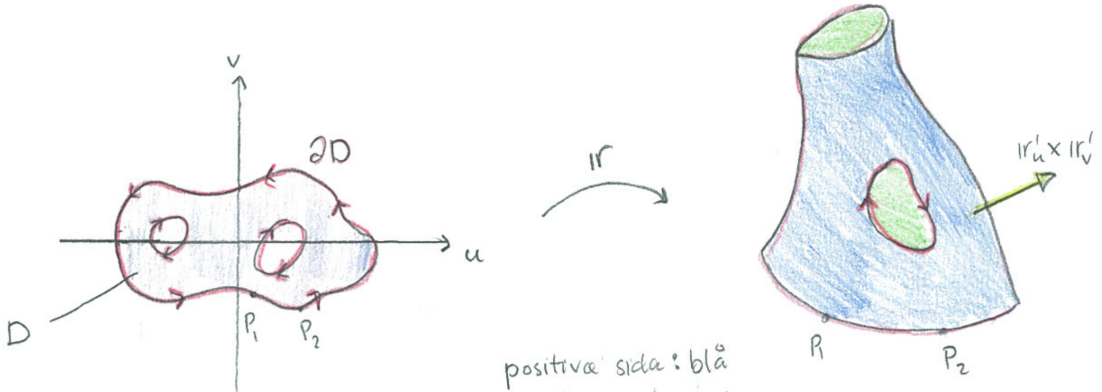
Ex Det elektrostatiska flödet $\mathbb{E}$ är källfritt i $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

Nytt begrepp för $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$:

DEF

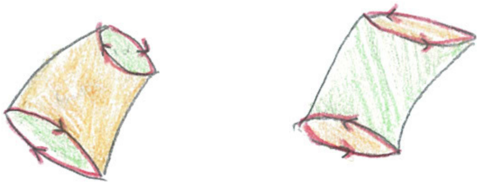
Låt $Y: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v),\ (u,v) \in D$ vara en yta i $\mathbb{R}^3$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ med positivt orienterad rand.

Vi kallar bilden av ∂D $(= \{\mathbf{r}(u,v) : (u,v) \in D\})$ för RAND TILL Y (bet. ∂Y) då man bibehåller genomlöpsriktningen och ytan kallas (POSITIVT) ORIENTERAD YTA MED (POSITIVT) ORIENTERAD RAND ∂Y. Då (u,v) genomlöper ∂D så genomlöper $\mathbf{r}(u,v)$ randen ∂Y så att man ser den sida av Y, som har normalen $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$, vänster om sig. Den sida som har $\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ kallas den POSITIVA SIDAN av Y (den sida man ser från $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$) sidan sett från $-\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ -- NEGATIVA SIDAN av Y.



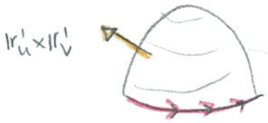
positiva sida: blå
negativa sida: grön

Ex



Orienteringen bara på ytans parametris.

(positiv sida: orange)



sett från $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ genomlöpes ∂Y positivt

OBS:

- Randen till en orienterad yta är ej mängden av randpkt. till mängden Y (det vare Y, ty Y sluten)! Men vi använder ändå samma symbol ∂Y.

- $\mathbf{r}$ skall åtminstone lokalt vara inj.: det finns ytor som saknar orientering:

Ex

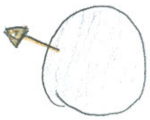
Möbius-bandet (1798-1868)

vrid och fäst ihop kanter

bara lokalt kan man måla den ena sidan gul
andra sidan röd

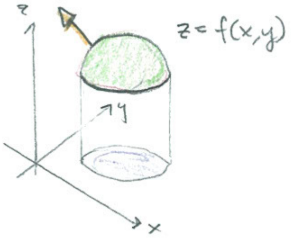
Ex

a) sfär : $\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$ $\quad \mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\varphi = R\sin\theta \cdot \mathbf{r}$;

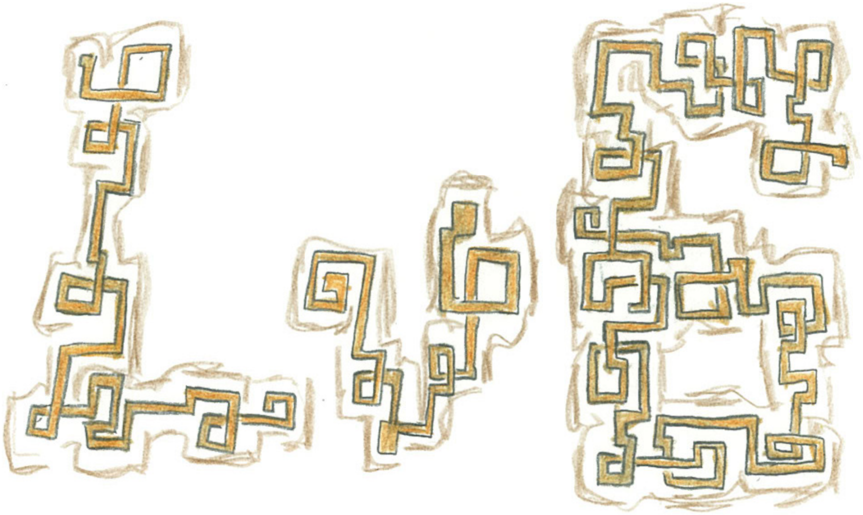


utsidan! positiva sidan

b) Fkt. yta: $z = f(x,y)$: $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-f'_x, -f'_y, 1)$



ovansidan är den positiva



Flervariabelanalys

Med Bernhard Behrens

SATS: Stokes sats]] BEVIS [

motivering av namnet "rotation"
cirkulation

DEF: (1) rotationsfri
(2) virveltendens
(3) rotationsfalt, vektorpotential

DEF: (1) enkelt sammanhängande
(2) konvex

SATS: Huvudresultat för $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:
v konserv. $\Leftrightarrow$ rot $v = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $\int_c v \cdot dr$ ober. av vägen
v rotationsfält $\Leftrightarrow$ div $v = 0$]] BEVIS [

Huvudex: v med fältstyrka prop. mot $\frac{1}{r^n}$
Huvudex. 1 rotationsfritt, potential, källfritt
Huvudex. 2 elektrostatiskt fält / magnetfält
fler exempel

Kap. 4 max/min-problem

Problem 1: bestäm det största och minsta värde f antar
typexempel

Problem 2: bestäm min/max under bivillkor
Två typexempel

SATS: Lagrange multiplikatormetod]] BEVIS [

Måndag
2010-02-22

Rep

- $\nabla f = \text{grad } f$, $\nabla \cdot \mathbf{w} = \text{div } \mathbf{w}$, $\nabla \times \mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{w}$ (eng: curl)
- Gauss sats
- orienterad yta med (orienterad) rand ∂Y (ytan med $\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ är den positiva sidan)

Stokes (1819-1903): prof 1849 i Cambridge (termodynamik)

Egentligen upptäcktes satsen av Sir William Thomson (Lord Kelvin) (1824-1907) (brev 1850, Stokes gav det som problem (1854) för Smith-prize (vunnit själv 1841)) gav det sedan som inträdesprov för stud. i Cambr.

SATS {10,3, Satsen av Stokes}

Föruts: • $\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, C^1 i $\Omega \supseteq Y$

Y är en orienterad C^2-yta med orienterad C^1-rand, C^1-enhetsnormalfält } "styckvis"

Y kan delas upp i ändl. många funktionsytor

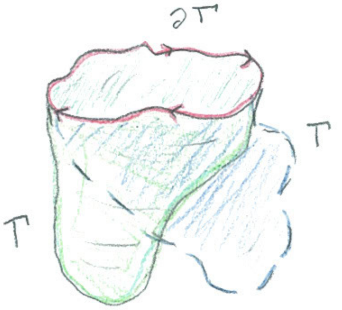
Påst:

$$\underbrace{\int_{\partial Y} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r}}_{\substack{\text{cirkulation(sflödet)} \\ \text{av } \mathbf{w} \text{ längs } \partial Y}} = \underbrace{\iint_{Y} \text{rot } \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, dS}_{\substack{\text{flödet av rot } \mathbf{w} \text{ genom } Y \\ \text{i riktningen } \mathbf{n}, \text{ dvs. från} \\ \text{den negativa till den positiva sidan}}}$$

Först en ledande observation:

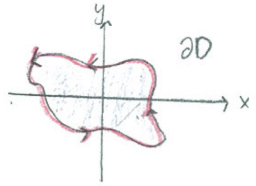
Flödet av rot $\mathbf{w}$ genom alla ytor med samma rand $\partial\Gamma$ är det samma, nämligen $F = \int_{\partial\Gamma} \mathbf{w}\cdot d\mathbf{r}$

spec: om $\partial\Gamma$ ligger i ett plan: och $\mathbf{w} = (P(x,y), Q(x,y), 0)$ ett 2-dimensionellt fält, så gäller



$$\int_{\partial D} \mathbf{w}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial D} P dx + Q dy \underset{\text{Green}}{=} \iint_D (Q'_x - P'_y)\, dx dy =$$

$$= \iint_D (0, 0, Q'_x - P'_y)\cdot \underbrace{(0,0,1)}_{\text{enhetsnormalvektor}} dx dy = \iint_D \text{rot}\, \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}\, dx dy$$



$$\left[\text{rot}\ \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, Q'_x - P'_y) \right]$$

Bevis

Låt $\mathbf{w} = (X, Y, Z)$

Steg 1 visar satsen för en C^2-funktionsyta

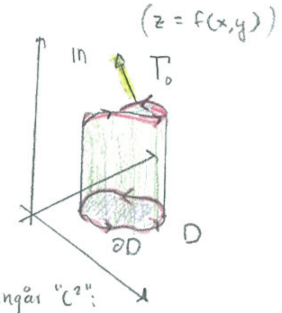
$\Gamma_0 : \mathbf{r} = \mathbf{r}(x,y) = (x, y, f(x,y)),\ (x,y) \in D$ (← kompakt, begränsad)

På Γ_0 är $\mathbf{w} = (X(x,y,f(x,y)), Y(x,y,f(x,y)), Z(x,y,f(x,y)))$

i denna parametrisering:

$$VL = \int_{\partial T_0} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial T_0} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int_{\partial D} X\,dx + Y\,dy + Z(f'_x\,dx + f'_y\,dy) =$$

$$= \int_{\partial D} (X + Z f'_x)\,dx + (Y + Z \cdot f'_y)\,dy = [\text{Green}] =$$



$$= \iint_D \left((Y + Z f'_y)'_x - (X + Z f'_x)'_y \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_D (Y'_x + Y'_z f'_x + (Z'_x + Z'_z f'_x) \cdot f'_y + Z f''_{yx} -$$

$$- (X'_y + X'_z f'_y + (Z'_y + Z'_z f'_y) f'_x + Z f''_{xy})) \,dx\,dy = \underset{f''_{xy} = f''_{yx}}{\text{här ingår "}C^2\text{":}} =$$

$$= \iint_D (Y'_x - X'_y + (Y'_z - Z'_y) f'_x + (Z'_x - X'_z) f'_y) \,dx\,dy$$

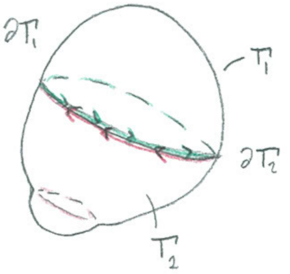
$$HL = \underset{\text{(i param.)}}{\iint_{T_0}} \operatorname{rot} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}\,dS = \iint_D \underbrace{(Z'_y - Y'_z,\ X'_z - Z'_x,\ Y'_x - X'_y)}_{\operatorname{rot} \mathbf{w}} \cdot \underbrace{(-f'_x, -f'_y, 1)}_{\text{normalv. uppåt}} \,dx\,dy$$

$$= VL \,! \quad \text{v.s.v.}$$

Steg 2

Addition över alla flatsytor ger påståendet för T
(delningskurvor ger inget bidrag, ty de genomlöpes 2ggr i motsatt riktn.):

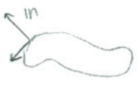
$$\int_{\partial T_1} + \int_{-\partial T_2} = 0$$



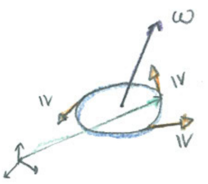
v.s.v. ■

Gauss - Green: "normalversion"
Stokes - Green: "tangentialt version"

$\int \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r}$ w



Motivering av namnet "rotation"



motivering 1

rotation = cirkulär rörelse, beskrives av

$\vec{\omega}$: $|\vec{\omega}|$ är vinkelhastigheten

$\vec{\omega}$ är riktningsvektor för rotationsaxeln

den beskrivs av hastighetsfältet

$\mathbf{w} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}$: om $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$:

$$\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_2 z - \omega_3 y, \omega_3 x - \omega_1 y, \omega_1 y - \omega_2 x) = (\omega_1 + \omega_1, \omega_2 + \omega_2, \omega_3 + \omega_3) = 2\vec{\omega}$$

dvs. rot $\mathbf{w}$ är riktningsvektor för rotationsaxeln (PB sid 377)

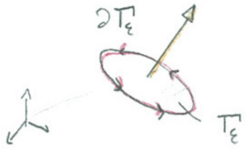
motivering 2 (fysikalisk tolkning innebörd förklaring av vektorn rot $\mathbf{w}$):

($\mathbf{w}$ = kraftfält)

Låt T_ε vara en cirkelskiva kring P_0 med radie ε

då är CIRKULATIONEN AV $\mathbf{w}$ kring P_0 $\int_{\partial T_\varepsilon} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r}$

(= det arbete som $\mathbf{w}$ uträttar då en partikel förflyttas ett varv kring P_0 längs ∂T_ε, moturs)



Ett mått för flödets "benägenhet att virvla" i P_0 är den maximala cirkulationen av $\mathbf{w}$ kring P_0 per areaenhet.

cirkulationen per areaenhet är

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\int_{\partial T_\varepsilon} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r}}{m(T_\varepsilon)} \underset{\text{Stokes}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\iint_{T_\varepsilon} \operatorname{rot} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}\, dS}{m(T_\varepsilon)} \overset{\text{MVS}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{w}(\xi, \eta, \zeta) \cdot \mathbf{n}(\xi, \eta, \zeta) \cancel{\iint_{T_\varepsilon} dS}}{\cancel{m(T_\varepsilon)}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \operatorname{rot} \mathbf{w}(\xi, \eta, \zeta) \cdot \mathbf{n}(\xi, \eta, \zeta) = \operatorname{rot} \mathbf{w}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0)$$

$((\xi, \eta, \zeta) \in T_0)$

(ty $\mathbf{w}$ är C^1, alltså rot $\mathbf{w}$ C^0)

den maximala cirkulationen i P_0 per areaenhet sker alltså då rot $\mathbf{w} \parallel \mathbf{n}$, dvs. då rot $\mathbf{w}(P_0)$ är riktningsvektorn för rotationsaxeln.

(vinkelhastigheten $|\operatorname{rot} \mathbf{w}(P_0)|$ är $\mathbf{w}$:s "virvelstyrka")

Därför:

DEF

$w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ är C^1 i öppen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$: Vi säger:

(1) w är ROTATIONSFRITT i Ω om $\text{rot } w = \vec{0}$ i Ω
(curl free, irrotational)

(2) vektorn $\text{rot } w(P_0)$ är w:s VIRVELTENDENS i P_0

!! (3) w är ett ROTATIONSFÄLT i Ω om det finns ett fält $\mathbb{A} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ så att $w = \text{rot } \mathbb{A}$ i Ω, $\mathbb{A}$ kallas då VEKTORPOTENTIAL TILL w i Ω
(om w är C^m, så är $\mathbb{A}$ C^{m+1})

Huvudresultat: karaktärisera "konservativa fält" "rotationsfält" "källfria fält" för $\mathbb{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Då behövs nya (sista) begrepp för $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$:

DEF

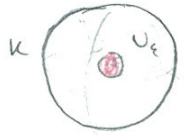
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ kallas

(1) ENKELT SAMMANHÄNGANDE om Ω är bågvis shgd <u>och</u> varje enkel, sluten kurva i Ω kan "dras ihop i Ω till en punkt i Ω"

(2) KONVEX om för $P_0, P_1 \in \Omega$ hela $\underbrace{\text{linjestycket}}_{\text{rät linje från } P_0 \text{ till } P_1}$ mellan P_0 och P_1 ligger i Ω (alla dimens.)

Ö: Visa: konvex $\Rightarrow$ enkelt shgd

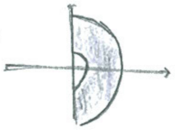
Ex (1) klot: $K: x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ är konvex.



"Ta bort" $U_\varepsilon: x^2+y^2+z^2 < \varepsilon^2$, då är

$\Omega = K \setminus U_\varepsilon$ kompakt, enkelt shgd, men ej konvex.

den rotationskropp som fås då roterar kring y-axeln $\searrow$



(2) TORUS (bilring) är bågvis, men ej enkelt shgd!

fås som rotationskropp då skivan $(x-a)^2+y^2 \leq R^2$ roterar kring y-axeln.

(ö 3: , 8:)

kan ej dras ihop till en punkt i Ω

(1) Visa: $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ konservativa $\Rightarrow$ $\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2$ är källfritt (lö 11!)
$(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$

(2) kolla ex10 till Gauss (Arkimedes princip)

Onsdag
2010-02-24

Huvudresultat för $\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

SATS

$\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ C^1 i $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ (Ω $\overset{C^1}{\overset{\downarrow}{\text{öppen}}}$!!)

Förutst. på Ω: — Kommentar:

{1} ingen: $\mathbf{w}$ konservativt i $\Omega \Rightarrow \text{rot}\,\mathbf{w} = \vec{0}$ i Ω — : gradientfält är virvelfria

{2} Ω enkelt shgd: $\text{rot}\,\mathbf{w} = \vec{0}$ i $\Omega \Rightarrow \int_c \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r}$ oberoende av vägen i Ω

{3} Ω bågvis shgd: $\int_c \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r}$ oberoende av vägen i $\Omega \Rightarrow \mathbf{w}$ konservativt i Ω

> $\mathbf{w}$ C^1 i enkelt shgd Ω:
>
> $\mathbf{w}$ konserv. i Ω $\Longleftrightarrow$ $\text{rot}\,\mathbf{w} = \vec{0}$ i Ω $\Longleftrightarrow$ $\int_c \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r}$ oberoende av vägen i Ω
> ($\mathbf{w}$ har potential)

{4} ingen: $\mathbf{w}$ rotationsfält i $\Omega \Rightarrow \text{div}\,\mathbf{w} = 0$ i Ω — rotationsfält är källfria

{5} Ω konvex: $\text{div}\,\mathbf{w} = 0$ i $\Omega \Rightarrow \mathbf{w}$ rotationsfält i Ω

> $\mathbf{w}$ C^1 i konvex Ω:
>
> $\mathbf{w}$ rotationsfält i Ω $\Longleftrightarrow$ $\text{div}\,\mathbf{w} = 0$ i Ω
> ($\mathbf{w}$ har vektorpotential)

Bevis i Ω: ⓣ

(1) Om $\mathbb{w} = \text{grad}\,\varphi = (\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z)$ så är $\overset{\mathbb{w}\ C^1}{\downarrow}$

$$\text{rot}\,\mathbb{w} = (\varphi''_{zy} - \varphi''_{yz}, \varphi''_{xz} - \varphi''_{zx}, \varphi''_{yx} - \varphi''_{xy}) = (0,0,0), \text{ ty } \varphi \text{ är } C^2$$

(2) Om $\text{rot}\,\mathbb{w} = \vec{0}$, så gäller för enkel, sluten kurva $\gamma \subseteq \Omega$:
$(\gamma = \partial Y, Y \subseteq \Omega)$

$$\int_\gamma \mathbb{w}\cdot d\mathbb{r} \underset{\text{Stokes}}{\overset{\uparrow}{=}} \pm \iint_Y \text{rot}\,\mathbb{w}\cdot \mathbb{n}\,dS = 0$$

ty Ω enkelt shgd

dvs. $\int_c \mathbb{w}\cdot d\mathbb{r}$ är ober. av vägen i Ω.

(3) redan visat: (godt: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$): $\varphi(\overset{(x,y,z)}{\mathbb{x}}) = \int_{\mathbb{a}}^{\mathbb{x}} \mathbb{w}\cdot d\mathbb{r}$, $\mathbb{a} \in \Omega$ (längs godt. väg i Ω)

(4) Om $\mathbb{w} = \text{rot}\,\mathbb{A} = \text{rot}(P,Q,R) = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y)$, så är

$$\text{div}\,\mathbb{w} = \frac{\partial}{\partial x}(R'_y - Q'_z) + \frac{\partial}{\partial y}(P'_z - R'_x) + \frac{\partial}{\partial z}(Q'_x - P'_y) =$$

$$= R''_{yx} - Q''_{zx} + P''_{zy} - R''_{xy} + Q''_{xz} - P''_{yz} = 0$$

(ty $\mathbb{A}$ C^2, dvs. P, Q och R är C^2)

(5) Ω konvex och $\mathbb{a} \in \Omega$, så är t.ex.

$$\mathbb{A} = \int_0^1 t\,\mathbb{w}(\mathbb{r}(t)) \times (\mathbb{x} - \mathbb{a})\,dt$$

en vektorpotential, där $\mathbb{r}(t) = \mathbb{a} + t(\mathbb{x} - \mathbb{a})$, $0 \xrightarrow{t} 1$ (sträckan från $\mathbb{a}$ till $\mathbb{x}$)

(visa $\text{rot}\,\mathbb{A} = \mathbb{w}$) se hemsidan

$$\left[\text{sätter } \int_0^1 \mathbb{F}(\mathbb{r}(t))\,dt = \int_0^1 (F_1, F_2, F_3)\,dt = \left(\int_0^1 F_1(\mathbb{r}(t))\,dt, \int_0^1 F_2(\ )\,dt, \int_0^1 F_3(\ )\,dt\right)\right]$$

(1) En vektorpotential till $\mathbf{w}$ är entydigt bestämt så när som på ett konservativt fält:

$$\mathbf{w} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{A}_2 \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{A}_1 - \operatorname{rot} \mathbf{A}_2 = \operatorname{rot}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) = \vec{0} \Rightarrow \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \text{ är konserv.}$$

[visa det $\nabla \times (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) = \nabla \times \mathbf{A}_1 - \nabla \times \mathbf{A}_2$]

(2) Helmhotz (1821-1894): Varje C^2-fält är summan av ett rotationsfritt fält och ett källfritt fält: $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \mathbf{A}$

(3) Kolla analogin med geom. vektorer:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) &= \vec{0} \\ \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{w}) &= 0 \end{aligned}}$$

$\nabla \times (\nabla \varphi) = \vec{0}$: $\quad \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \vec{0}$

$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{w}) = 0$: $\quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$, ty $\mathbf{a} \perp \mathbf{a} \times \mathbf{b}$

(4) Stokes/Gauss på integralform:

$$\int_\gamma \operatorname{grad} \varphi \cdot d\mathbf{r} = 0 \qquad (\gamma : \text{sluten, enkel kurva} = \partial Y_{-})$$

$$\iint_Y \operatorname{rot} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0 \qquad (Y = \partial K,\ K \text{ en kropp})$$

Huvudexempel:

Fält $\mathbf{w}$ som är riktade mot origo och fältstyrkan $|\mathbf{w}|$ är proportionell mot $\frac{1}{r^n}$ $(n \in \mathbb{Z})$ (r = avståndet till origo):

$$\left[\begin{array}{llll} n > 0 : & |\mathbf{w}| & \text{avtar med} & \frac{1}{r^n} \\ n < 0 : & & \text{växer med} & r^{-n} \end{array}\right]$$

dvs.: $\mathbb{F} = -c\,\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\frac{1}{r^n} = \mathbb{F} = -c\,\frac{\mathbf{r}}{r^{n+1}}$: "radiala klotsymmetriska fält"

proportion. konstant

enhetsriktn.

Ex

a) elektrostatiska fältet $\mathbb{F} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ för pkt laddn. i origo $(c=-1)$

b) gravitationsfältet $\mathbb{F} = -9{,}81\,\frac{\mathbf{r}}{r^3}$

Huvudex 1

$\mathbf{w}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \mathbf{w} = -c\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^{n+1}}$ (OBS: $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ är ej C^1 i origo)

(1) Visa att $\mathbf{w}$ är rotationsfritt i $\Omega = \begin{cases} \mathbb{R}^3, & \text{om } n<-2,\ n=-1 \\ \mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\} & \text{om } n\geq -2,\ n\neq -1 \end{cases}$

(2) Beräkna en potential till $\mathbf{w}$ i Ω

(3) Visa att $\mathbf{w}$ är källfritt i $\Omega \iff n=2$

Lösn

$$\mathbf{w} = -c\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n+1}{2}}},\ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n+1}{2}}},\ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right)$$

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r},\quad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r},\quad \frac{dr}{dz} = \frac{z}{r}$$

(1) beräkna rot $\mathbf{w}$ $\left(\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{z}{r^{n+1}} = \frac{-(n+1)\,z\cdot 2y}{r^{n+1}\cdot r} = \frac{-2(n+1)\,zy}{r^{n+3}} = \frac{\partial}{\partial z}\,\frac{y}{r^{n+1}} \text{ osv.}\right)$

Vet: det finns φ så att

(2) $\varphi'_x = \frac{-cx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ $\Rightarrow$ $\varphi(x,y,z) \overset{n=1}{=} -c\,\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2) = c\ln\frac{1}{r}$: logaritm. potential!

$\varphi'_y = \frac{-cy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n+1}{2}}}$

$n\neq 1,-1$:

$\varphi'_z = \frac{-cz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n+1}{2}}}$

$$\varphi(x,y,z) = -c\,\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{n+1}{2}}\,(x^2+y^2+z^2)^{1-\frac{n+1}{2}} = -c\,\frac{1}{1-n}\,\frac{1}{r^{n-1}}:$$

$\left[\ \underline{n=-1}:\quad \mathbf{w} = -c(x,y,z),\ \varphi = -c\,\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) = -\frac{cr^2}{2}\ \right]$

<u>speciellt</u>: $n=2$: elektrostat. potential : $\boxed{\varphi(1) = \frac{1}{r}}$ ← de enda som har vektorpotential

gravit. potential: $\boxed{\varphi(1) = -9{,}81\,\frac{1}{r}}$

(3) $$\operatorname{div} \mathbf{w} = -c\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^{n+1}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r^{n+1}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{r^{n+1}}\right) =$$

$$= -c\left(\frac{1}{r^{n+1}} - \frac{(n+1)\cdot x}{r^{n+3}}x + \frac{1}{r^{n+1}} - \frac{(n+1)\cdot y\cdot y}{r^{n+3}} + \frac{1}{r^{n+1}} - \frac{(n+1)\,z\cdot z}{r^{n+3}}\right) =$$

$$= c\left(\frac{3}{r^{n+1}} - \frac{(n+1)(x^2+y^2+z)}{r^{n+3}}\right) = -c\,\frac{3-(n+1)}{r^{n+1}} = 0 \iff \boxed{n=2}$$

Mera allmänt: $\mathbf{w} = f(r)\mathbf{r} = (f(r)x,\ f(r)y,\ f(r)z)$ (f deriverbar i Ω)

(1) Visa rot $\mathbf{w} = \vec{0}$ i Ω $\left(\frac{\partial}{\partial x}\int f(r)dr = f(r)\cdot r\,\frac{\partial r}{\partial x} = f(r)\,x\right)$

(2) Beräkna div (Svar: $\int f(r)r\,dr$)

(3) Visa: $\mathbf{w}$ är källfritt $\iff f(r) = \frac{c}{r^3}$ (dvs igen: endast ovanst. dessa fält)

<u>Svar:</u> $\operatorname{div} \mathbf{w} \overset{\text{do it}}{=} 3f(r) + r f'(r)$ $\left(= 0 \iff (r^3 f(r))' = 0\right)$

$\mathbf{w} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$: $\mathbf{w} = -c\,\frac{\mathbf{r}}{r^{n+1}}$:

$\operatorname{div} \mathbf{w} = -c\,\frac{m-(n+1)}{r^{n+3}}$ alltså $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \iff \boxed{n = m-1}$

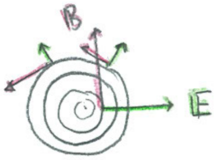
do it ↗

Huvudex. 2

Elektostatiskt fält / magnetfält (Bio-Savarts lag) kring en ∞-lång rak ledare = z-axeln (riktat mot z-axeln)

$\mathbb{E} = \frac{1}{r^2}(x,y,0) \perp \mathbb{B} = \frac{1}{r^2}(-y,x,0)$

obs! $r = \sqrt{x^2+y^2}$ = avstånd till z-axeln



$\mathbb{E}$: "normalfält"

(1) Visa att $\mathbb{B}$ och $\mathbb{E}$ är virvelfria och källfria i $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \underbrace{\{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}}_{\text{z-axeln}}$

OBS: ger inte "$\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathbb{E}}{\mathbb{B}}$ är konservativt i Ω" ty Ω är $\underline{\text{ej}}$ enkelt shgd. en enkel sluten kurva γ som omsluter (går runt) z-axeln kan ej dras ihop till en punkt i Ω (är inte rand till en yta $Y \subseteq \Omega$: varje yta med $\partial Y = \gamma$ träffar z-axeln

(2) Beräkna potential till $\mathbb{E}$ i Ω (visar: $\mathbb{E}$ konservativt i Ω)
$\mathbb{B}$ i t.ex. $\Omega^* = \{(x,y,z) : x > 0\}$ ← i Ω^* är $\mathbb{B}$ konservativt

(men $\mathbb{B}$ är inte konserv. i Ω : se (3))

(3) Visa $\int_\gamma \mathbb{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$, γ enkel, sluten kurva som ej träffar z-axeln.

$$\int_\gamma \mathbb{B} \cdot d\mathbf{r} = \begin{cases} 0 , & \text{om } \gamma \text{ inte går runt z-axeln} \\ \pm 2\pi , & \text{om } \gamma \text{ går runt z-axeln} \end{cases}$$

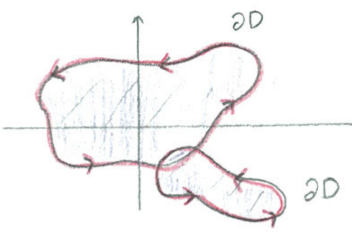
(ej defin. om γ träffar z-axeln)

<u>speciellt</u>: Om $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (xy-planet), $\mathbb{E}_1 = \frac{1}{r^2}(x,y)$, $\mathbb{B}_1 = \frac{1}{r^2}(-y,x)$

(1) $\operatorname{rot} \mathbb{E}_1 = \operatorname{rot} \mathbb{B}_1 = \vec{0}$ i $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
$\operatorname{div} \mathbb{E}_1 = \operatorname{div} \mathbb{B}_1 = 0$
potential

(2) $\left(\left(\int_{\partial D} \mathbb{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad ((0,0) \notin \partial D)\right)\right)$, $\int_{\partial D} \mathbb{B} \cdot d\mathbf{r} = \begin{cases} 0 , & (0,0) \notin D \\ \pm 2\pi , & (0,0) \text{ inre punkt i } D \end{cases}$ ← kompakt, mätbar

vänta



$$\left[\begin{array}{l} \mathbb{E} = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{m.a.p. pkt}) \\ \operatorname{div} \mathbb{E} = 0 \text{ men} \\ \iint_{\partial Y} = \pm 4\pi \\ (0,0,0) \text{ inom } Y \end{array}\right]$$

(1) $\operatorname{div} \mathbb{B} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{-y}{r^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{r^2} = \frac{+2yx}{r^3 \cdot r} - \frac{2xy}{r^3 \cdot r} = 0$

$$\boxed{\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}}$$

$$\operatorname{div} \mathbb{E} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{r^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} - \frac{2y^2}{r^4} =$$
$$= \frac{2}{r^2} - \frac{2(x^2+y^2)}{r^4} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbb{B} = \operatorname{rot}\left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0\right) = \Big(0, 0, \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{r^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{r^2}}_{\operatorname{div} \mathbb{E}}\Big) = (0,0,0)$$

$$\operatorname{rot} \mathbb{E} = \operatorname{rot}\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, 0\right) = \Big(0, 0, \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{r^2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{r^2}}_{= \operatorname{div} \mathbb{B}}\Big) = (0,0,0)$$

(2) ? Finns ?

for $\mathbb{E}$: $\left.\begin{array}{l} \varphi'_x = \frac{x}{x^2+y^2} \\ \varphi'_y = \frac{y}{x^2+y^2} \end{array}\right\}$ $\varphi(x,y) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) = \ln r$ (som ovan)

for $\mathbb{B}$: $\varphi'_x = \frac{-y}{x^2+y^2}$

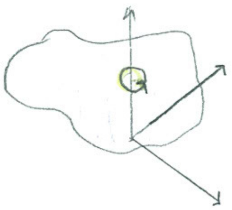
$\varphi'_y = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{x} \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$ $\qquad \varphi(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$ for $x > 0$!

Anm $\int_\gamma \mathbb{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$ även om γ omsluter z-axeln:

t.ex. $\gamma: \begin{cases} x = \varepsilon \cos\varphi \\ y = \varepsilon \sin\varphi \\ z = a \end{cases}, \quad 0 \xrightarrow{\varphi} 2\pi \quad \begin{array}{l} dx = -\varepsilon \sin\varphi \, d\varphi \\ dy = \varepsilon \cos\varphi \, d\varphi \end{array}$

$$\int_\gamma \mathbb{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\varepsilon \cos\varphi}{\varepsilon^2}, \frac{\varepsilon \sin\varphi}{\varepsilon^2}\right) \cdot (-\varepsilon \sin\varphi, \varepsilon \cos\varphi) \, d\varphi = 0$$

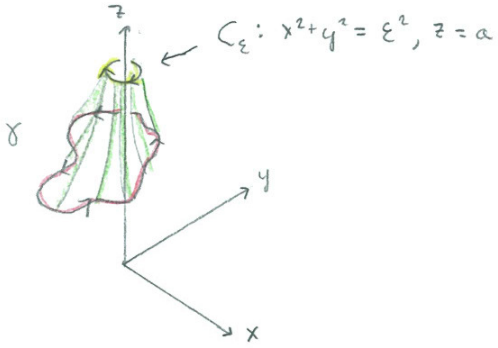
Visar (3).

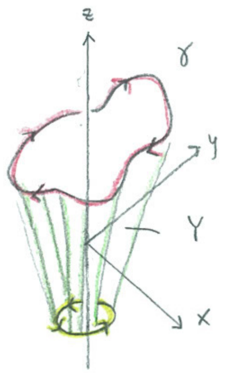


fall 1: γ omsluter ej z-axeln, dvs. $\gamma = \partial Y$, $Y \subseteq \Omega$: $\qquad \Omega = \mathbb{R}^3 \setminus (\text{z-axeln})$

$$\int_{\gamma = \partial Y} \mathbb{B} \cdot d\mathbb{r} \underset{\text{Stokes}}{=} \pm \iint_Y \operatorname{rot} \mathbb{B} \cdot \mathbb{n}\, dS = 0$$

fall 2: γ går runt z-axeln;





Lägg till en cirkel C_ε a så stort att $\gamma \cap (\text{planet } z=a) = \emptyset$ och genomlöpsriktningen av C_ε så att $\gamma + C_\varepsilon = \partial Y$ får en orienterad yta med rand ∂Y, $Y \subseteq \Omega$. (träffar ej z-axeln).

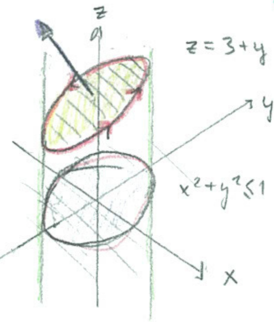
Då gäller Stokes:

$$\int_{\gamma + C_\varepsilon} \mathbb{B} \cdot d\mathbb{r} = \int_\gamma \mathbb{B} \cdot d\mathbb{r} + \int_{C_\varepsilon} \mathbb{B} \cdot d\mathbb{r} \overset{\text{Stokes}}{=} \iint_Y \operatorname{rot} \mathbb{B} \cdot \mathbb{n}\, dS = 0, \quad \text{dvs:}$$

$$\int_\gamma \mathbb{B} \cdot d\mathbb{r} = -\int_{C_\varepsilon} \mathbb{B} \cdot d\mathbb{r} = \left\{ \begin{matrix} x = \varepsilon\cos\varphi \\ y = \varepsilon\sin\varphi \\ z = a \end{matrix}, \; \begin{matrix} 0 \xrightarrow[\text{eller}]{\varphi} 2\pi \\ 2\pi \xrightarrow{\varphi} 0 \end{matrix}, \; \begin{matrix} dx = -\varepsilon\sin\varphi\, d\varphi \\ dy = \varepsilon\cos\varphi\, d\varphi \end{matrix} \right\} =$$

$$= \pm \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\varepsilon\sin\varphi}{\varepsilon^2}, \frac{\varepsilon\cos\varphi}{\varepsilon^2} \right) \cdot (-\varepsilon\sin\varphi, \varepsilon\cos\varphi)\, d\varphi = \pm \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = \boxed{\pm 2\pi} \quad \text{v.s.v.}$$

Uppgifter



Beräkna kurvintegralen $w = (2z, 3x, 4y)$ längs γ = tvärsnittet mellan cylindern $x^2+y^2=1$ och planet $z=y+3$ genomlöpt moturs sett uppifrån.

$$\int_\gamma w \cdot dr \underset{\text{Stokes}}{=} \iint_Y \text{rot}\, w \cdot \underset{\overset{\uparrow}{\text{uppåt}}}{n}\, dS = \iint_D \text{rot}\, w \cdot (-z'_x, -z'_y, 1)\, dx\,dy$$

$$Y: \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = y+3 \end{cases}, \quad D: x^2+y^2 \leq 1$$

$$\text{rot}\, w = (4,2,3)$$

$$= \iint_D (4,2,3) \cdot (0,-1,1)\, dx\,dy = \iint_D dx\,dy =$$

$= \text{arean av } D = \pi$

Kap 10 $\boxed{\text{Ö62}}$

$$u = (2xy^2z, 2x^2yz, x^2y^2-2z): \quad \text{rot}\, u = (2x^2y - 2x^2y, 2xy^2 - 2xy^2, 4xyz - 4xyz) = (0,0,0)$$

$\Rightarrow$ u är konservativt i hela $\mathbb{R}^3$ (ty u är C^1, $\mathbb{R}^3$ enkelt shgd),

Beräkning: Bestäm $\varphi(x,y,z)$ så att

$$\varphi'_x = 2xy^2z \quad \overset{!!}{=\!=} \quad 2xy^2z + f'(x) \Rightarrow f(x) = c \quad (\text{vi väljer } c=0)$$

$$\varphi'_y = 2x^2yz \quad \underset{\text{skall vara}}{\overset{!!}{=\!=}} \quad 2x^2yz + g'_y(x,y) \Rightarrow g'_y(x,y) = 0 \Rightarrow g(x,y) = f(x) \Uparrow \text{sätt i}$$

$$\varphi'_z = x^2y^2 - 2z \Rightarrow \varphi(x,y,z) = x^2y^2z - z^2 + g(x,y) \Uparrow$$

Svar: $\varphi(x,y,z) = x^2y^2z - z^2$ (kolla !!)

Det arbete som u uträttar längs $C: \begin{cases} \cos t \\ \sin t \\ \sin t \end{cases}, \; 0 \xrightarrow{t} \frac{\pi}{2}$.

är $\int_C u \cdot dr = \varphi(r(\tfrac{\pi}{2})) - \varphi(r(0)) = \varphi(0,1,1) - \varphi(1,0,0) = \boxed{-1}$

Ö55 $\int_\gamma x\cos x\,dx + y\sin z\,dy + z\,dz$, γ sluten, enkel kurva i planet $z=a$

$$\left[\text{rot}\,(x\cos x, y\sin z, z) = (-y\cos z, 0, 0)\right]$$

$$\underset{\text{Stokes}}{=} \pm \iint (-y\cos z, 0, 0)\cdot(0,0,1)\,dS = 0$$

Torsdag
2010-02-25

Kap 4 max-min-problem

Problem 1 "Bestäm det minsta och det största värde som $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ antar på $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Till hjälp har vi satserna:

(1) Om f är C^0 och D kompakt så antar f max/min på D.

(2) Om f är part. deriverbar i en lok. extrempkt så är a stationär.

(3) Inre punkter i vilka f inte är part. deriverbar

(4) randpunkter

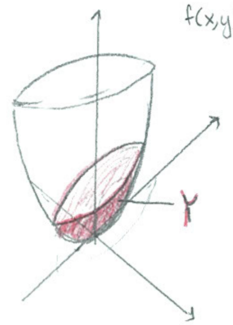
Ex Bestäm det största och det minsta värde som $f(x,y) = x + x^2 + y^2$ antar på $D: x^2+y^2 \leq 1$

geom: Bestäm de högsta/lägsta punkterna på ytan $\Upsilon: z = x + x^2 + y^2,\ (x,y) \in D$

Lösn (I) inre punkter:

$$\begin{cases} f'_x = 1 + 2x = 0 \\ f'_y = 2y = 0 \end{cases} \text{ enda lösn: } (-\tfrac{1}{2}, 0)$$

inre punkt i D, alltså:



$f(x,y) = (x+\frac{1}{2})^2 + y^2 - \frac{1}{4}$
inses direkt:
$\geq -\frac{1}{4}$

[min antas i $(-\frac{1}{2}, 0) \in D$]

(II) randpkt: på $\partial D: x^2+y^2 = 1$ är $f(x,y) = 1 + x$

minsta värdet fås för $x = -1$
största — $x = 1$

Kandidater:
$(-\frac{1}{2}, 0)$
$(-1, 0)$
$(1, 0)$

får ej utelämnas!

● f är C^0, D är kompakt, alltså antar f maximum på D; finns bland

$f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$

$f(-1, 0) = 0$

$f(1, 0) = 2$

Svar: min $= -\frac{1}{4}$
max $= 2$

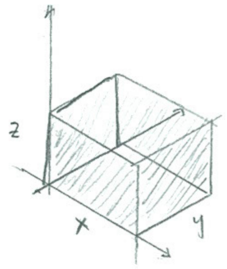
geom: lägsta punkten $(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4})$
högsta punkten $(1, 0, 2)$

Ex Man vill bygga en låda utan lock med rektangulära sidor i form av ett rätblock med jämtjocka sidor som rymmer 1 (m^3). Vilka mått skall lådan ha för att minimera materialåtgången ("den billigaste lådan").

Lösn

arean $= xy + 2xz + 2yz$

volymen $xyz = 1$, dvs. $z = \frac{1}{xy}$



Bestäm det minsta värde som $f(x,y) = xy + \frac{2}{y} + \frac{2}{x}$ antar på $D: \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Lösn

$$\begin{cases} f'_x = y - \frac{2}{x^2} = 0 \\ f'_y = x - \frac{2}{y^2} = 0 \end{cases} \underset{2=}{\Longrightarrow} yx^2 = xy^2 \underset{xy\neq 0}{\Longleftrightarrow} \boxed{x = y}$$

Alltså $f'_x(x,x) = 0$ ger $x = \sqrt[3]{2}$

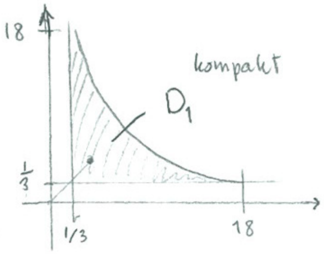
Enda stationära punkten är $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$.
min eller max eller ingetdera????

[inser: max saknas, t.ex.
$f(x,1) \to \infty$ då $x \to \infty$]

Titta på $f(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{4} + \frac{4}{\sqrt[3]{2}} = 3\sqrt[3]{4} < 6$

"ser" $f(x,y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} > 6$ då $x \leq \frac{1}{3}$
> 6 då $y \leq \frac{1}{3}$
> 6 då $xy \geq 6$

$D_1: \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ y \geq \frac{1}{3} \\ xy \leq 6 \end{cases}$



$(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ är inre pkt

På D_1 antar f max/min ty f C^0,
D_1 kompakt, måste göra det i $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$
(enda stationära pkt) eller på ∂D_1, men på
∂D_1 är $f(x,y) > f(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$, alltså är

$f(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ det minsta värde som f antar på D_1, och därmed
―――― 〃 ―――― på D, ty utanför D_1 är $f(x,y) > f(\ldots$

Svar: $\underbrace{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2}}_{\text{kvadratisk}} \times \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

[4 ö 20: do it, lösn på hemsidan]

Problem 2 Bestäm det största och det minsta värde som
$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ antar under bivillkor $g, h: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

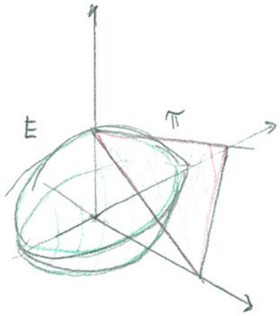
Ex på bivillkor: i $\mathbb{R}^2$: .. "då (x,y) ligger på kurvan $g(x,y)=0$" (t.ex. $x^2+y^2-1=0$)
i $\mathbb{R}^3$: "då (x,y,z) ligger på ytan $g(x,y,z)=0$" (t.ex. $x^2+y^2+z^2-1=0$)
eller "då (x,y,z) ------ skärningen mellan $g\equiv 0$ och $h\equiv 0$"

andra: "då volymen = .." , "då kostnaderna givna..."

Två typex

A) Bestäm det största/minsta värde som $f(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2$ antar under bivillkoret $g(x,y,z)=x+y+z-1=0$

B) Bestäm det största/minsta värde som $f(x,y,z)=x+y+z$ antar under bivillkoret $g(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2-1=0$



A)) Sök största/minsta ellipsoiden $E: x^2+y^2+2z^2=K$ (största/minsta K) som träffar planet $\pi: x+y+z=1$
(max saknas)

B)) Sök det plan $\pi: x+y+z=K$ som ligger längst bort från origo till höger/vänster (största/minsta K) som träffar ellipsoiden $E: x^2+y^2+2z^2=1$

Lösn A) Lös ut z ur bivillkoret:

Sök maximum av $u(x,y)=x^2+y^2+2(1-x-y)^2$:

$$\left\{\begin{aligned} u'_x &= 2x-4(1-x-y)=0 \\ u'_y &= 2y-4(1-x-y)=0 \end{aligned}\right\} \underset{\text{subtrahera}}{\Longrightarrow} x=y$$

$u'_x(x,x)=2x-4(1-2x)=10x-4=0$:

enda stat. pkt: $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$: max-pkt
min-pkt ???
ingetdera

$u\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) = \frac{8}{25} + \frac{2}{25} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

$u(x,y) = x^2+y^2+2(1-x-y)^2 > \frac{2}{5}$ då (t.ex.) $x^2+y^2 \geq 1$

På (kompakta!) $D: x^2+y^2 \leq 1$ antar u maximum, dessa finns bland $u\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ ($\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ inre i D) och $u(x,y)$ för $(x,y) \in \partial D$, men där är $u(x,y) > \frac{2}{5}$ och utanför D är $u(x,y) > \frac{2}{5}$, alltså är $u\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}$ det minsta värde som u antar.

Lösn B) p.s.s. $z = \begin{matrix} +\frac{1}{2}\sqrt{\ldots} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\ldots} \end{matrix}$ blir jobbigt! Då finns en finurlig metod:

SATS Lagrange (multiplikator) metod

Föruts:

- $g, f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ är C^1 i öppen mängd Ω, $a \in \Omega$
- f antar i a ett lokalt extremvärde under bivillkoret $g(x) = 0$

[dvs: det finns omgivning U till a så att $f(x) \geq f(a)$ för alla $x \in U \cap \{x : g(x) = 0\}$
($\leq$)]

Påst: grad $f(a)$ // grad $g(a)$,

dvs. om grad $g(a) \neq \vec{0}$ så finns λ_0 så att grad $f(a) = \lambda_0$ grad $g(a)$

Anm

$$\left.\begin{array}{l} F: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x},\lambda) \longmapsto f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x}) \end{array}\right\}$$ då är $(\mathbf{a}, \lambda_0)$ stationär pkt till F

$\frac{\partial}{\partial \lambda} F = g = 0$ (därför skriver vi "$g = 0$")

↑
lagrange-multiplikator

Bevis

m=2 : $g, f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} = (a,b)$

Om grad $g(\mathbf{a}) \neq (0,0)$ så ger implicita fkt.satsen att $x = x(y)$ eller $y = y(x)$ lokalt kring (a,b), dvs: kurvan $g(x,y) = 0$ kan parametriseras lokalt kring (a,b)

$C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \xrightarrow{t} b$ med $\mathbf{r}(t_0) = (a,b)$ med $t_0 \in]a,b[$ ("inre pkt")

Funktionen $h(t) = f(\mathbf{r}(t))$ antar lok. extremvärde i t_0, alltså

$h'(t_0) = \underbrace{\text{grad } f(a,b)} \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$

alltså grad $f(a,b) \perp \mathbf{r}'(t_0)$

alltså grad $f(a,b) \parallel$ grad $g(a,b)$ $(\perp \mathbf{r}'(t_0))$

m≥3 : $f, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a}$:

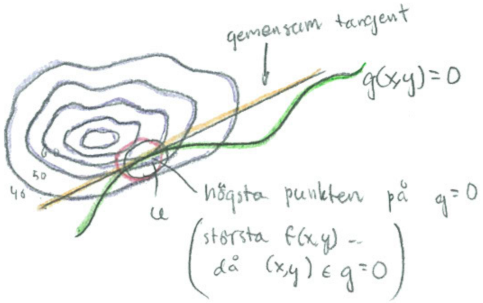
grad $f(\mathbf{a}) \perp$ varje kurva i $g(\mathbf{x}) = 0$
(tangentv.)
v.s.v.

$\perp$ tangentplanet till ytan $g(\mathbf{x}) = 0$

alltså grad $f(\mathbf{a}) \parallel$ normalvektorn till ↗ = grad $g(\mathbf{a})$ $\blacksquare$

geom. väldigt åskådligt!

$z = f(x,y)$



Lv 7

Flervariabelanalys

Med Bernhard Behrens

massa exempel på "hitta max/min"

DEF: karakteristisk kurva / koordinat

Typex karakt. koord. och (DE)

SATS: om flera bivillkor

SATS: om derivering under integraltecknet

Tentor

10-01-14
09-08-25
09-03-12
08-08-25

Måndag
2010-03-01

Rep

$f, g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, C^1 i en omgivning till $a \in \mathbb{R}^m$:

Om f antar i a ett lok. extremvärde under bivillkoret $g \equiv 0$ så är grad $f(a) \parallel$ grad $g(a)$

Ex A

Sök max/min av $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2$ under bivillkoret $g(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0$

Lösning med Lagrange

grad $g(a) = (1,1,1) \neq (0,0,0)$, alltså:
extrempkt satisfierar grad $f = \lambda_0$ grad g (för ngt λ_0)

$$\text{dvs.} \begin{cases} f'_x = \lambda_0 g'_x \\ f'_y = \lambda_0 g'_y \\ f'_z = \lambda_0 g'_z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2x = \lambda_0 \\ 2y = \lambda_0 \\ 4z = \lambda_0 \end{matrix} \Leftrightarrow \left(\frac{\lambda_0}{2} = \right) \; x = y = 2z, \text{ bivillkoret ger:}$$

$x + y + z = 5z = 1$, dvs. $z = \frac{1}{5}$: enda kandidaten: $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) \leftarrow \begin{matrix}\text{max}\\\text{min}\end{matrix}$??

$f\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{25} + \frac{2}{25} = \frac{10}{25} = \boxed{\frac{2}{5}}$

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 \geq 1$ då (t.ex.) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$, på $K: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ antar f max/min (ty f är C^0 på K och K är kompakt) dessa värden måste antas i $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ (inre pkt i K!!) eller på ∂K, men på ∂K är $f(x,y,z) > f\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$, alltså är $\frac{2}{5}$ det minsta värde som f antar på K och därmed det minsta värde ty $f(x,y,z) > \frac{2}{5}$ utanför K.

[egentligen räcker det med den kompakta mängden
$M = K \cap \text{planet} = \{(x,y,z) : (x,y,z) \in K, \; g(x,y,z) = 0\}$]

Ex B

Sök max/min av $f(x,y,z) = x+y+z$ under bivillkoret
$g(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2-1 = 0$ (dvs : $(x,y,z) \in E : x^2+y^2+2z^2=1$)
"ellipsoid"

Lösn (med Lagrange)

grad $g = (2x, 2y, 4z) \neq (0,0,0)$ på E (ty $g(0,0,0) \neq 0$)
alltså satisfierar extrempkt: grad $f = \lambda_0$ grad g (ngt λ_0):

$$\begin{cases} 1 = \lambda_0 2x \\ 1 = \lambda_0 2y \\ 1 = \lambda_0 4z \end{cases} \Longrightarrow \left(\frac{1}{2\lambda_0} = \right) x = y = 2z, \text{ bivillkoret ger då:}$$

$(\lambda_0 \neq 0)$

$4z^2+4z^2+2z^2 = 10z^2 = 1$, dvs. $z = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$

Enda möjliga punkterna $\pm\left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ ← "beröringspkt"

f är C^0, E är kompakt, alltså antar f på E max/min,
dessa finns bland $f\left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{5}{\sqrt{10}}$ ← max

och $f\left(-\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{5}{\sqrt{10}}$ ← min Svar: ..

Kap 4 **Ö 25**

Bestäm största/minsta avståndet mellan punkter på
$\gamma : 13x^2+13y^2+10xy = 72$ ("ellips"??) och origo.

Lösn Sök max/min av $f(x,y) = x^2+y^2$ ("(avståndet)^2")
under bivillkoret $g(x,y) = 13x^2+13y^2+10xy-72 = 0$
med Lagrange:

grad $g = (26x + 10y, 10x + 26y) \neq (0,0)$

$\Big[$ ty $\begin{cases} 13x + 5y = 0 \\ 5x + 13y = 0 \end{cases}$ har endast lösn. $(0,0)$; $\begin{vmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} \neq 0$, men $g(0,0) \neq 0 \Big]$

alltså gäller i extrempkt grad $f = \lambda_0$ grad g (ngt λ_0)

$$\begin{cases} 2x = \lambda_0(26x + 10y) \\ 2y = \lambda_0(10x + 26y) \end{cases} \Rightarrow (xy =)\ \lambda_0(13xy + 5y^2) = \lambda_0(5x^2 + 13xy)$$

$(\lambda_0 \neq 0)$

$$\underset{(\lambda_0 \neq 0)}{\Longleftrightarrow} 5y^2 = 5x^2 \Longleftrightarrow (x-y)(x+y) = 0$$

2 fall !!

<u>fall 1</u>: $x = y$: bivillkoret ger: $26x^2 + 10x^2 = 72$ dvs. $x = \pm\sqrt{2}$

<u>fall 2</u>: $x = -y$: – – – – – – $26x^2 - 10x^2 = 72$ dvs. $x^2 = \frac{9}{2}$

<u>Kandidater</u>

$\pm(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

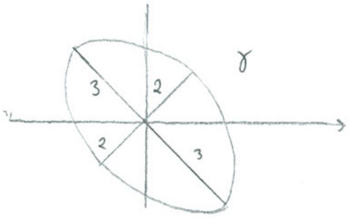
$\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

f är kontinuerlig på γ, γ är kompakt, alltså antar f på γ max/min; dessa måste finnas bland

$f(\pm(\sqrt{2}, \sqrt{2})) = 4$

$f\left(\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right) = 9$

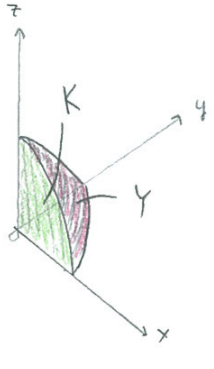
<u>Svar</u>: min: 2
max: 3



ö 15

Bestäm max/min av $f(x,y,z) = xy(1+z)$ på $K: \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}, x^2+y^2+z^2 \leq 1$

f är C^0 på K, K kompakt,
alltså antar f max/min;
beräkning av kandidater:

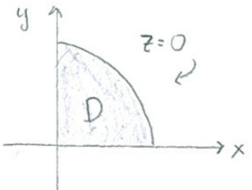


I) inre pkt $\quad f'_x = y(1+z) \neq 0 \quad (x>0,\ y>0,\ z\geq 0)$: inga stationära pkt

II) randpunkter

① på $x=0$ och $y=0$ är $f(0,x,z) = f(x,0,z) = 0$

② på $z=0$: Bestäm max/min av $f(x,y,0) = g(x,y) = xy$
på $D:\ x^2+y^2 \leq 1$



a) inre pkt : $g'_x = y \neq 0$: finns ej

b) randpkt : $\partial D:\ x^2+y^2=1 \quad \left(y = \sqrt{1-x^2},\ f(x) = x\sqrt{1-x^2} : f'(x)=0 \ldots \right)$

med Lagrange:
bestäm max/min av
$g(x,y) = xy$ under bivillkoret
$h(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$

grad $h = (2x, 2y) \neq (0,0)$ på ∂D,
alltså grad $g = \lambda_0$ grad h :

$$\begin{matrix} y = \lambda_0 \cdot 2x \\ x = \lambda_0 2y \end{matrix} \xrightarrow[(\lambda_0 \neq 0)]{} x^2-y^2=0 \Longrightarrow \underline{x=y} \begin{pmatrix} x>0 \\ y>0 \end{pmatrix}$$

bivillkoret ger: $x^2 = \frac{1}{2}$

Kandidater
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (kolla: $\in D$)

③ på $Y:\ z = \sqrt{1-x^2-y^2}$: med Lagrange:

Sök max/min av $f(x,y,z) = xy(1+z)$ under bivillkoret
$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0 \quad (x>0,\ y>0)$:

grad $(2x, 2y, 2z) \neq (0,0,0)$ på Y, alltså gäller för extr. pkt. grad $f = \lambda_0$ grad g :

$$\begin{cases} y(1+z) = \lambda_0 2x \\ x(1+z) = \lambda_0 2y \\ xy = \lambda_0 2z \end{cases}$$

$xy(1+z) = \lambda_0 2x^2 = \lambda_0 2y^2 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y \quad (x>0, y>0, z>0)$

$\longrightarrow 1+z = 2\lambda_0$

$\longrightarrow x^2 = 2\lambda_0 z = z + z^2$: ur bivillkoret fås då :

$$x^2+y^2+z^2 = 2z+2z^2+z^2 = 1 \iff 3z^2+2z = 1 \iff \left(z+\tfrac{1}{3}\right)^2 = \tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{9}$$

det ger : $z = \frac{1}{3}$ (>0) och $x^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

Kandidat:
$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

max/min finns bland

$f(0,y,z) = f(x,0,z) = 0$,

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{27} > \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

Svar: min $= 0$ ← klart : $f(x,y,z) \geq 0$
max $= \frac{16}{27}$

Nu "karakteristiska koord." :

Ev. kan (DE) $a(x,y)f'_x + b(x,y)f'_y = \rho(x,y,f)$ $(a,b,f\ C^1 \text{ i } \Omega)$
överföras genom variabelbyte (u,v) till $Af'_u = \rho(u,v)$ ...
(utan f'_v) : i u,v :

$$af'_x + bf'_y = a(f'_u u'_x + f'_v v'_x) + b(f'_u u'_y + f'_v v'_y) = (au'_x + bu'_y)f'_u + \underbrace{(av'_x + bv'_y)}_{=0 \text{ om} \dots}f'_v$$

...v är lösningskurvorna till ⊛ $y' = \frac{b}{a}$,
ty $v(x,y(x)) = c$: derivera : $\underline{v'_x \cdot 1 + v'_y \cdot y' = v_x + v'_y \frac{b}{a} = \frac{av'_x + bv'_y}{a} = 0}$

ANM man skriver gärna ⊛ på differentialform :

$\frac{dy}{b} = \frac{dx}{a}$ eller $a\,dy - b\,dx = 0$ (för att betona oberoendet av variablerna x,y, kan även få lös $x = x(y)$ $(x' = \frac{a}{b})$)

DEF (DE) $af'_x + bf'_y = \rho(..)$

Kurvorna $v(x,y) = c$ kallas för KARAKTERISTISK KURVA (characteristic curve) för (DE) och v kallas KARAKTERISTISK KOORDINAT TILL (DE) om "$f'_v = 0$".

Anm Välj u godt. (t.ex. u=x eller u=y..) då blir (DE) i u,v:

$Af'_u + 0f'_v = \rho$

En karakt. koordinat fås som lösning av $\boxed{y' = \frac{b}{a}}$

Onsdag
2010-03-03

Rep (DE) $af'_x + bf'_y = \dots$: en karakteristik till (DE) är lösn. kurvorna $v(x,y) = c$ till $y' = \frac{b}{a}$

Lös:

Typex ① (DE) $xf'_x + yf'_y = f$

Lösning Lös $y' = \frac{y}{x}$ ← separabel, eller

$y' - \frac{1}{x}y = 0$ ← integr. fkt

$\left(\frac{1}{x}y\right)' = 0$ lösning: $\frac{y}{x} = c$

Hittat en karakt. koordinat $v = \frac{y}{x}$

med nya variabler $\begin{cases} u = x & (\leftarrow \text{t.ex.}) \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$ blir

(DE) $x f'_x + y f'_y = x(f'_u u'_x + f'_v v'_x) + y(f'_u u'_y + f'_v v'_y) =$

$= x(f'_u - \frac{y}{x^2} f'_v) + y(f'_u \cdot 0 + \frac{1}{x} f'_v) = x f'_u = u f'_u \overset{!}{=} f \quad \underset{\text{s.o.}}{\Longleftrightarrow}$

(visar igen: v är karakt. koordinat →)

$\Longleftrightarrow \left(\frac{1}{u} f\right)'_u = 0$: lösn: $f(u,v) = ug(u)$

Svar: $f(x,y) = xg\left(\frac{y}{x}\right)$

Typex ② $x f'_x - y f'_y = f$

Lösning: lös $y' = \frac{-y}{x} \Longleftrightarrow xy' + y = 0 \Longleftrightarrow (xy)' = 0$

lösn: $xy = c$: ger: $v = xy$ är en karakt. koord.

med nya variabler $\begin{matrix} u = x \\ v = xy \end{matrix}$ (t.ex.) blir

(DE) $x f'_x - y f'_y = x(f'_u \cdot 1 + y f'_v) - y(f'_u \cdot 0 + x f'_v) = x f'_u = u f'_u = f$ s.o.:

$f(u,v) = ug(v)$ dvs. Svar: $f(x,y) = xg(xy)$

Tillägg "flera bivillkor"

SATS

f, g, h : $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, C^1 i en omgivning till $\mathfrak{a} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

Om f antar i $\mathfrak{a}$ ett lok. extremvärde under bivillkoren

$$g(x,y,z) = 0$$
$$h(x,y,z) = 0$$

så är grad $f(\mathfrak{a})$, grad $g(\mathfrak{a})$ och grad $h(\mathfrak{a})$ linjärt beroende
(dvs: "ligger i ett plan", dvs: grad $g(\mathfrak{a}) \parallel$ grad $h(\mathfrak{a})$ eller
grad $f(\mathfrak{a})$ − λ grad $g(\mathfrak{a})$ − μ grad $h(\mathfrak{a}) = \vec{0}$ är icke trivialt lösbart

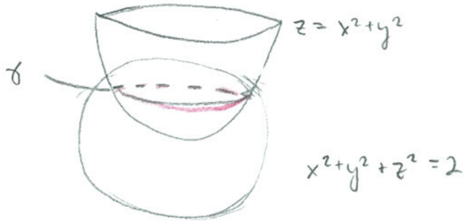
$$\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} f'_x(\mathfrak{a}) & -g'_x(\mathfrak{a}) & -h'_x(\mathfrak{a}) \\ f'_y(\mathfrak{a}) & -g'_y(\mathfrak{a}) & -h'_y(\mathfrak{a}) \\ f'_z(\mathfrak{a}) & -g'_z(\mathfrak{a}) & -h'_z(\mathfrak{a}) \end{vmatrix}}_{\substack{\text{koefficient matris} \\ \text{(har rang} < 3)}} = 0$$

dvs: $F : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}$ har en stationär pkt $(a, b, c, \lambda_0, \mu_0)$
$(x,y,z,\lambda_0,\mu_0) \longmapsto f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z)$

(λ, μ: lagrange multiplikator)

kap 4 **832**

Bestäm max/min av $f(x,y,z) = x+y+z$ antar under
bivillkoren $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 2$
och $h(x,y,z) = x^2+y^2-z^2 = 0$ (dvs. "$(x,y,z) \in \gamma$"))



Lösn (Lagrange)

f är C^0 på γ, γ kompakt, alltså antar f max/min på γ. Kan göra det enbart i följande pkt : ...

$$\begin{aligned} \text{grad } g &= (2x, 2y, 2z) \\ \text{grad } h &= (2x, 2y, -1) \end{aligned}$$ ej parallella ty $z \geq 0$ $(z = x^2+y^2)$

alltså satisfierar extrempkt : $\text{grad } f - \lambda_0 \text{grad } g - \mu_0 \text{grad } h = \vec{0}$:

$$\begin{vmatrix} f'_x & -g'_x & -h'_x \\ f'_y & -g'_y & -h'_y \\ f'_z & -g'_z & -h'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2x & -2x \\ 1 & -2y & -2y \\ 1 & -2z & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & y & 0 \\ 1 & z & 1+2z \end{vmatrix} =$$

$$= -2\underbrace{(1+2z)}_{z>0}(y-x) = 0 \iff y = x$$

Bivillkor : $\begin{cases} 2x^2+z^2 = 2 \\ 2x^2 = z \end{cases}$ subtrahera $\quad z^2+z-2 = (\overset{>0}{z+2})(z-1) = 0 \iff z = 1$

endast: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ och $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$: max/min finns bland

$(x^2 = \frac{z}{2})$ $\quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = \sqrt{2}+1$ ← max

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = -\sqrt{2}+1$ ← min (Svar !)

alternativ lösn. (enklare?) slå ihop bivillkoren : h ger : $x^2+y^2 = z$

alltså g : $z+z^2-2 = (z+1)(z-1) = 0$ ger : $z=1$

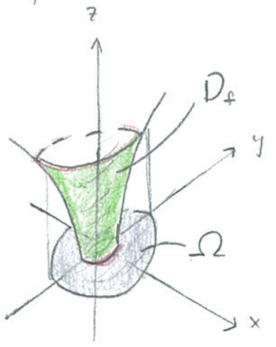
dvs. sök max/min av $F(x,y) = x+y+1$

under bivillkoret $G(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$ (Lagrange !)

Kap 4 $\boxed{\text{Ö}44}$

Bestäm V_f för $f(x,y,z) = x+y+z$

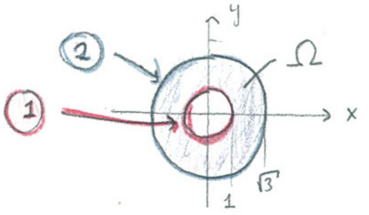
då $D_f = \{ (x,y,z) : \underbrace{1 \leq x^2+y^2 \leq 3}_{\Omega},\ z = \sqrt{x^2+y^2-1} \}$



Lösn: Bestäm max/min av

$F(x,y) = x+y+\sqrt{x^2+y^2-1}$ på $\Omega: 1 \leq x^2+y^2 \leq 3$

Ω kompakt, F är C^0 på Ω, antar alltså max/min på Ω, gör det i följande punkter: ...



Lösn: (I) inre pkt:

$$\left\{ \begin{array}{l} F'_x = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}} = 0 \\ F'_y = 1 + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}} = 0 \end{array} \right\} \underset{\text{subtrahera}}{\Longrightarrow} x = y \Rightarrow F'_x(x,x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{2x^2-1}} = 0$$

$$\Longleftrightarrow x = -\sqrt{2x^2-1} < 0$$

ger: $x^2 = 2x^2-1 \Longleftrightarrow x^2 = 1$

(II) randpkt

på rand 1: på $x^2+y^2=1$ är $F(x,y) = x+y$:

bestäm max/min av under bivillkor $\left. \begin{array}{l} g(x,y) = x+y \\ h(x,y) = x^2+y^2-1=0 \end{array} \right\}$

grad $h = (2x, 2y) \neq (0,0)$ på $h=0$, alltså:

$$\begin{array}{l} 1 = \lambda_0 2x \\ 1 = \lambda_0 2y \end{array} \underset{(\lambda_0 \neq 0)}{\Longrightarrow} x = y$$

bivillkoret ger: $2x^2 = 1$

Kandidater

$(-1,-1)$ (bara $x=-1$!!) (kolla: inre pkt)

$\pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

$\pm \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$

på rand 2: $x^2+y^2=3$ är $F(x,y) = x+y+\sqrt{2}$:

Bestäm max/min av under biv. $\begin{array}{l} g(x,y) = x+y+\sqrt{2} \\ h(x,y) = x^2+y^2-3=0 \end{array}$

$x=y$, bivillkoret ger $2x^3 = 3$

max/min finns bland

$F(-1,-1) = -2+1 = 1$

$F(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$

$F(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}$ ← MIN

MAX → $F(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}) = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

$F(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}) = -\sqrt{6} + \sqrt{2}$

ty $[-\sqrt{2} < -\sqrt{6} + \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{6} \leq 2\sqrt{2}]$

D_f är bågvis sngd, f kontin. på D_f, f antar alltså alla värden mellan min och max (s.o.m.v.)

Svar: $V_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2} + \sqrt{6}]$

Många viktiga flkt (teoretisk, ffa för tillämpn.) ges via integral:

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{(integralsinus)}$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \quad (x>0) \quad (\Gamma\text{-flkt})$$

Laplace-transf. $$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \quad (\text{Re}\, s > 0, \text{ vi räknar med } 0 < s \in \mathbb{R})$$

Fouriertransform $$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty e^{-j\omega t} f(t)\, dt \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

Hur räknar man med dessa flkt, ffa: derivata??

$$Si'(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \ln t\, dt \quad ??$$

$$F'(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot (-t) f(t)\, dt \quad ??$$

Följande sats säger: Får man derivera
Hur deriverar man
(får man derivera under integralen??)

SATS

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(s,x) \longmapsto f(s,x)$$

("se s som parameter")

Föruts:

- $f,\ f'_s$ är C^0 i $\begin{matrix} \alpha < s < \beta \\ a < x < b \end{matrix}$ $\left(\begin{matrix} \alpha, a \text{ får vara } -\infty \\ \beta, b \text{ - - - } \infty \end{matrix}\right)$
- För varje $[\alpha_1, \beta_1] \subseteq \,]\alpha, \beta[$ finns en fkt $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ så att $|f'_s(s,x)| \leq g(x)$ och $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergerar

Påst:

$$\left.\begin{matrix} F(s) = \int_a^b f(s,x)\,dx \quad \text{är deriverbar} \\ \text{med} \quad F'(s) = \int_a^b f'_s(s,x)\,dx \end{matrix}\right\} \quad s \in \,]\alpha, \beta[$$

("man får derivera under integralen")

Bevis
(skiss)

$$\frac{F(s+h)-F(s)}{h} = \frac{1}{h}\int_a^b \underbrace{\big(f(s+h,x) - f(s,x) \big)}_{\text{mvs } f'_s(\sigma,x)\cdot h} dx \longrightarrow \int_a^b f'(s,x)\,dx$$

pga "likformig kontin."

(se boken)

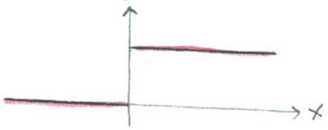
Anm a) Om $|a|\,|b| < \infty$: ingen majorant behövs

b) Om $a = a(s)$, $b = b(s)$ $\leftarrow C^0$: Lp 1!

$$\frac{d}{ds}\int_{a(s)}^{b(s)} f(s,x)\,dx = \int_{a(s)}^{b(s)} f'_s(s,x)\,dx + f(b(s),x)\,b'(s) - f(a(s),x)\,a'(y)$$

Ex Laplacetransformen till Heavisides stegfkt. $\Theta(t)$:

$$\boxed{F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}}$$ (för $s>0$)



Beräkna $F^{(n)}(s)$ ← får vi ??

$f(s,t) = e^{-st}$, för $[\alpha_1, \beta_1] \subseteq \,]0,\infty[$ gäller:

$|f'_s(s,t)| = te^{-st} \leq te^{-\alpha_1 t}$, $\int_0^\infty te^{-\alpha_1 t}\,dt$ är konv. (ty $\alpha_1 > 0$), alltså

$F'(s) = \int_0^\infty (-t)e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s^2}$: fortsätt (p.s.s.)

$F''(s) = \int_0^\infty (-t)^2 e^{-st}\,dt = \frac{2}{s^3}$ spec: $s=1$: $\Gamma(n+1) = n!$

(induktion)

$F^{(n)}(s) = \int_0^\infty (-t)^n e^{-st}\,dt = \frac{(-1)^n n!}{s^{n+1}}$ dvs. $\int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt = \frac{n!}{s^{n+1}}$

Ö9

Beräkna $\int_0^\infty \frac{e^{-sx} - e^{-2x}}{x} dx = F(s)$ $(s>0)$ lösn: via dubbelint.
(se Ö54, kap 6)

$$\left.\begin{aligned} f(s,x) &= \frac{e^{-sx} - e^{-2x}}{x} \\ f'_s &= -e^{-sx} \end{aligned}\right\} \text{ är } C^0 \text{ i } \begin{cases} 0<s \\ 0 \leq x \end{cases} \quad \text{för } [\alpha_1, \beta_1] \subseteq]0,\infty[\text{ är}$$

$$|f'_s| = e^{-sx} \leq e^{-\alpha_1 x}, \quad \int_0^\infty e^{-\alpha_1 x} dx \text{ konv.} \quad (\alpha_1 > 0)$$

alltså: $\underline{F'(s)} = \int_0^\infty (-e^{-sx}) dx = \left[\frac{1}{s} e^{-sx}\right]_0^\infty = \underline{-\frac{1}{s}} \Rightarrow F(s) = -\ln s + C$

$s=2$ ger: $F(2) = 0 = -\ln 2 + C$

Svar: $\boxed{F(s) = \ln \frac{2}{s}}$

Ö6

$$F(x) = \int_0^x \underbrace{\frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} f(y)}_{g(x,y)} dy \quad (f \text{ är } C^0) \qquad \left.\begin{aligned} &g(x,y) \\ &g'_x(x,y) = \frac{(n-1)(x-y)^{n-2}}{(n-1)!} f(y) \end{aligned}\right\} \text{är } C^0$$

(maj. behövs ej)

$$\Rightarrow F'(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^{n-2}}{(n-2)!} f(y) dy + \overset{g(x,x)\cdot}{0}$$

(ind.) $\vdots$

(bra ex: övn. 8)

$$\Rightarrow F^{(n-1)}(x) = \int_0^x f(y) dy + 0 \Rightarrow F^{(n)}(x) = f(x)$$

Tentan 10-01-14

1. $\mathbb{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x,y,z) = \cosh(x-y) + \sinh(y-z) + x - z$

a) $\varphi(x,y,z) = 1$ är lokalt en C^1-fktsyta $z = f(x,y)$ kring (a,a,a):

$\varphi(a,a,a) = 1 + 0 + 0$ ((a,a,a) ligger på Y)

$\varphi'_z(x,y,z) = -\cosh(y-z) - 1 \underset{i\ (a,a,a)}{=\!=} -2 \neq 0$

Implicita fkt. satsen ger: lokalt kring (a,a,a) är $\varphi(x,y,z) = 1$ en C^1-fkt. yta $z = f(x,y)$

derivera $\varphi(x,y,f(x,y)) = 1$ m.a.p. y:

$$\varphi'_x \cdot 0 + \varphi'_y \cdot 1 + \varphi'_z f'_y = 0 \Rightarrow f'_y(a,a) = -\frac{\varphi'_y(a,a,a)}{\varphi'_z(a,a,a)} = -\frac{1}{-2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$\varphi'_y = -\sinh(x-y) + \cosh(y-z)$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

b) Har $\mathbb{F}$ en vektorpotential?? $\begin{cases} \text{Ja, om div } \mathbb{F} = 0 \\ \text{Nej, om div } \mathbb{F} \neq 0 \end{cases}$
($\mathbb{R}^3$, konvex) ($\mathbb{F} = \text{grad}\,\varphi$)

Har $\mathbb{F} = \nabla\varphi$, beräkna $\nabla \cdot \nabla\varphi \left(= \Delta\varphi = \varphi''_{xx} + \varphi''_{yy} + \varphi''_{zz} \right)$

$$\mathbb{F} = \nabla\varphi = (\sinh(x-y) + 1, -\sinh(x-y) + \cosh(y-z), -\cosh(y-z) - 1)$$

$$\text{div } \mathbb{F} = \nabla \cdot (\nabla\varphi) = (\sinh(x-y)+1)'_x + (-\sinh(x-y) + \cosh(y-z))'_y + (-\cosh(y-z) - 1)'_z =$$

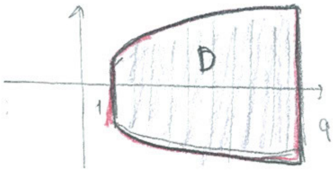
$= \cosh(x-y) + \sinh(y-z) + \cosh(x-y) + \sinh(y-z) \neq 0$: Svar: NEJ

c) $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}$ där $C : \mathbf{r} = (x(t), y(t), t) = \left(\sin\frac{\pi}{2}t, \cos\pi t, t\right), \ 0 \xrightarrow{t} 2$

$\mathbf{r}(0) = (0,1,0) \rightsquigarrow \mathbf{r}(2) = (0,1,2)$

$= \varphi(0,1,2) - \varphi(0,1,0) = \ldots$

② $z = f(x,y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$, $D: \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 9 \\ -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x} \end{array}$



volymen: $\iint_D (1 + \frac{y^2}{2x})\, dx\, dy =$

$$= \int_1^9 \Big(\underbrace{\int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} (1 + \frac{y^2}{2x}) dy}_{\text{jämn}} \Big) dx = 2 \int_1^9 \Big[y + \frac{1}{2 \cdot 3x} y^3 \Big]_{y=0}^{y=3\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^9 \Big(3\sqrt{x} + \frac{1 \cdot 9 \cdot x}{2 \cdot 3 \cdot x} 3\sqrt{x} \Big) dx =$$

$$= \int_1^9 (6\sqrt{x} + 9\sqrt{x})\, dx = 15 \Big[\frac{2}{3} x^{3/2} \Big]_1^9 = 10\,(27-1) = 260$$

arean av $Y: z = f(x,y),\ (x,y) \in D$: $dS = |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y|\, dxdy = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}$

arean av $Y = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dxdy = \iint_D \underbrace{\sqrt{1 + \Big(\frac{-y^2}{2x^2}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{x}\Big)^2}}_{\left(1 + \frac{y^2}{2x^2}\right)^2} dxdy =$

$$= \iint_D \Big(1 + \frac{y^2}{2x^2}\Big)\, dx\, dy = \int_1^9 \Big(\int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} \Big(1 + \frac{y^2}{2x^2}\Big) dy \Big) dx =$$

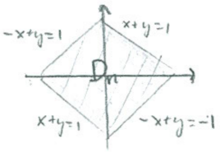
$$= 2 \int_1^9 \Big[y + \frac{y^3}{3 \cdot 2x^2} \Big]_{y=0}^{y=3\sqrt{x}} dx = \;---$$

③ $\iiint_\Omega \frac{1}{e^{(x-y)^2} \sqrt{1+(x+y)^2} \sqrt{z}}\, dxdydz$ ← generaliserad i $z=0$ (och obegränsat Ω!)

$\Omega: (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq z \leq \frac{1}{1+(x+y)^2}$

Lösn:

Välj som uttömmande följd: $\Omega_n: \begin{array}{l} |x| + |y| \leq n \\ \frac{1}{n} \leq z \leq \frac{1}{1+(x+y)^2} \end{array}$



Beräkna $I_n = \iiint_{\Omega_n} \underbrace{\frac{1}{e^{(x-y)^2} \sqrt{1+(x+y)^2}} \frac{1}{\sqrt{z}}}_{\geq 0 \text{ och } C^0 \text{ på } \Omega_n} dxdydz =$

$$= \iint_{D_n} \Big(\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{1+(x+y)^2}} \frac{1}{e^{(x-y)^2} \sqrt{1+(x+y)^2}}\, z^{-\frac{1}{2}}\, dz \Big) dxdy = 2 \iint_{D_n} \frac{1}{e^{(x-y)^2} \sqrt{1+(x+y)^2}} \Big[\sqrt{z} \Big]_{z=\frac{1}{n}}^{z=\frac{1}{1+(x+y)^2}} dxdy =$$

$$= 2 \iint_{D_n} \left(\frac{1}{e^{(x-y)^2}(1+(x+y)^2)} - \frac{1}{e^{(x-y)^2}\sqrt{1+(x+y)^2}\sqrt{n}} \right) dx\,dy = \left[\begin{matrix} u = x+y \\ v = -x+y \end{matrix} \right] =$$

$$D_n' : \begin{cases} -n \leq u \leq n \\ -n \leq v \leq n \end{cases}$$

$$= 2 \int_{-n}^{n}\int_{-n}^{n} \frac{1}{e^{v^2}} \left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{1+u^2}} \right) \frac{1}{2} \, du\,dv =$$

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

$$= 2 \int_0^n e^{-v^2} dv \cdot 2 \int_0^n \left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \right) du =$$

$$= 4 \int_0^n e^{-v^2} dv \left[\arctan u - \frac{1}{\sqrt{n}} \ln(1+\sqrt{n^2+1}) \right]_0^n =$$

$$= 4 \int_0^n e^{-v^2} dv \cdot \left(\arctan n - \frac{\ln(1+\sqrt{1+n}) - \ln 2}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\frac{\ln\sqrt{n} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{1+n}}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[\text{stand.}]{} 0$$

<u>Svar:</u> $\lim_{n\to\infty} I_n = 4 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right)$

snabbversion (med FUBINI): $\iiint_{\Omega} = 2 \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x-y)^2} \cdot \left(\frac{1}{1+(x+y)^2} - 0 \right) dx\,dy =$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x-y)^2} \frac{1}{1+(x+y)^2} dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-v^2} \frac{1}{1+u^2} dv\,du = 2 \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv \cdot 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^2} du = \ldots$$

10-01-14

Torsdag
2010-03-04

④ $\mathbb{v} = (-xz, yz, xy) = (u, v, w)$

a) $\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -z & 0 & -x \\ 0 & z & y \\ y & x & 0 \end{vmatrix} =$; $(1,1,1)$

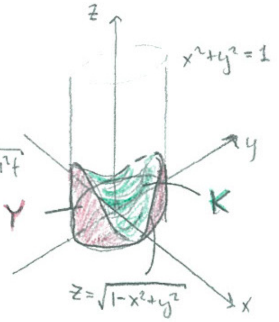
$$\doteq \underset{\oplus}{} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

inversa fkt. satsen ger att $\mathbf{w}$ är lokalt kring $(1,1,1)$ bijektiv.

$\mathbb{R}^3$ enkelt sthgd, $\mathbf{w}$ C^1 : $\underset{i\ \mathbb{R}^3}{\mathbf{w} \text{ konserv.}} \iff \underset{i\ \mathbb{R}^3}{\text{rot } \mathbf{w} = \vec{0}}$:

$$\text{rot } \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -xz & yz & xy \end{vmatrix} = (-y+x, \ldots) \neq (0, \ldots) \text{ : } \underline{\text{Svar:}} \text{ nej!}$$

b) Flödet F av $\mathbf{w}$ genom $Y = \{(x,y,z) : x^2+y^2=1,\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2+y^2}\}$ bort från origo.



__Lösning 1__

parametrisera $Y : \begin{cases} x = \cos t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ y = \sin t \\ z = s & 0 \leq s \leq \sqrt{1-\cos^2 t+\sin^2 t} \end{cases}$

$$F = \iint\limits_Y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bort från origo}}}{\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}\, dS} = \iint\limits_D \mathbf{w} \bullet \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t \, ds dt =$$

$$\left(\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{vmatrix} = (-\cos t, -\sin t, 0) \right.$$

$$= \iint\limits_D (-\cos t\, s, \sin t\, s, \cos t \sin t) \bullet (\cos t, \sin t, 0)\, dt =$$

$$= \iint\limits_D (\sin^2 t - \cos^2 t)\, s\, ds dt = \int \underbrace{(\sin^2 t - \cos^2 t)}_{-\cos 2t} \left(\int_0^{\sqrt{1-\cos 2t}} s ds \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-\cos 2t) \cdot (1-\cos 2t)\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos 4t}{2} - \cos 2t \right) dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

__Lösning 2__

div $\mathbf{w} = -z + z + 0 = 0$: vill räkna med Gauss :

Betrakta $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2+y^2}\}$, då är

$$\iint_{\partial K} \mathbb{w} \cdot \underbrace{\mathbb{n}}_{\text{utåt ur } K} dS = \underbrace{\iint_{Y} \mathbb{w} \cdot \mathbb{n}\, dS}_{\text{sökta F:et}} + \iint_{Y_1} \mathbb{w} \cdot \underbrace{\mathbb{n}}_{\text{n uppåt}} dS + \iint_{\Omega} \mathbb{w} \cdot \underbrace{\mathbb{n}}_{\text{n nedåt } (0,0,-1)} dS =$$

$$= \iiint_K \operatorname{div} \mathbb{w}\, dx\,dy\,dz = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Y_1:\ z = f(x,y),\ (x,y) \in \Omega \\ \Omega:\ x^2+y^2 \leq 1 \end{array}}$$

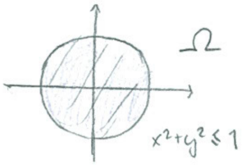
alltså $F = -\iint_{\Omega} \mathbb{w} \cdot (-f'_x, -f'_y, 1)\, dx\,dy - \iint_{\Omega} \mathbb{w} \cdot (0,0,-1)\, dx\,dy =$

$$= \iint_{\Omega} \left(-x\sqrt{1-x^2+y^2},\ y\sqrt{1-x^2+y^2},\ xy\right) \cdot \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2+y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2+y^2}},\ -1\right) dx\,dy +$$

$$+ \iint_{\Omega} (0,0,xy) \cdot (0,0,1)\, dx\,dy = \iint_{\Omega} (x^2+y^2-xy)\, dx\,dy + \iint_{\Omega} xy\, dx\,dy =$$

$$= \iint_{\Omega} (x^2+y^2)\, dx\,dy = [\text{pol. koord.}] =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \cdot r\, dr\, d\varphi = 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$



⑤ Visa att $f(x,y,z) = x+y+z \geq 3$ då $xyz = 1$

Lösn 1: Vi bestämmer det minsta värde som

$g(x,y) = x + y + \dfrac{1}{xy}$ antar

(då $x > 0, y > 0$) :

För $x > 0, y > 0, z > 0$ gäller

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt[3]{\ }} + \frac{y}{\sqrt[3]{\ }} + \frac{z}{\sqrt[3]{\ }} \geq 3$$

$a+b+c \geq 3$ då $abc = 1$

$$\begin{cases} g'_x = 1 - \dfrac{1}{x^2y} = 0 \\ g'_y = 1 - \dfrac{1}{xy^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2y = xy^2 \iff \underbrace{xy}_{\neq 0}(x-y) = 0 \iff \boxed{x=y}$$

då: $g'_x(x,x) = 1 - \frac{1}{x^3} = 0$ ger $\boxed{x = 1}$

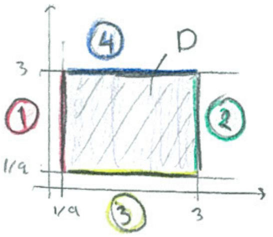
enda stationära plt: $(1,1)$

$g(1,1) = 3$: titta på $g(x,y) = x+y+\frac{1}{xy} > 3$ då $x \geq 3$ och då $x \leq \frac{1}{9}$
då $y \geq 3$ och $y \leq \frac{1}{9}$

MIN?
(max
ingetdera?)

på (kompakta!) $D: \begin{cases} \frac{1}{9} \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{9} \leq y \leq 3 \end{cases}$ antar g

max/min, måste göra i en inre (stationär!) plt (enda: $(1,1)$) eller på ∂D:



på ∂D är $g(x,y) = x+y+\frac{1}{xy} > 3$:
(och utanför D)

rand 1 $x = \frac{1}{9}$: $x+y+\frac{1}{xy} = \frac{1}{9} + y + \frac{9}{y} > \frac{2}{9} + 3$ O.k.
$\frac{1}{9} \leq y \leq 3$

rand 2 $x = 3$: $x+y+\frac{1}{xy} = 3+y+\frac{1}{3y} > 3$ O.k.

$f(x,y) = f(y,x)$:
rand 3 och rand 4
också O.k.

Lösn. 2 Bestäm det minsta värde som $f(x,y,z) = x+y+z$ antar under bivillkoret $g(x,y,z) = xyz - 1 = 0$

lösn. med Lagrange: $\text{grad}\, g = (yz, xz, xy) \neq (0,0,0)$
allstå satisfierar extrempkt. $\text{grad}\, f = \lambda_0 \text{grad}\, g$ (ngt λ_0)

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \lambda_0 yz \\ 1 &= \lambda_0 xz \\ 1 &= \lambda_0 xy \end{aligned}\right\} \text{ ger } x-y=0,\ x-z=0,\ y-z=0, \text{ dvs. } x=y=z$$

$(\lambda_0 \neq 0)$

$\underset{\text{bivillkor}}{\Longrightarrow}$ $x^3 = 1$, dvs. enda möjliga kandidat: $(1,1,1)$:

Forts: visa att $(1,1,1)$ ger f:s minsta värde: som ovan!

09 - 08 - 25

② [teori : visa att $v(x,y) = ye^{\frac{1}{x}} = C$ löser : $y' = \frac{y}{x^2}$ (lös $y' = \frac{y}{x^2}$ ...)]

$x > 0,\ y > 0$

$$\left.\begin{array}{l} u = y \\ v = ye^{\frac{1}{x}} \end{array}\right\} \quad x^2 f'_x + y f'_y = x^2(f'_u u'_x + f'_v v'_x) + y(f'_u u'_y + f'_v v'_y) =$$

$$= x^2\left(0 - \frac{ye^{\frac{1}{x}}}{x^2} f'_v\right) + y\left(f'_u + e^{\frac{1}{x}} f'_v\right) = y f'_u = u f'_u = f \longleftarrow$$

(det visar att v är en karakteristisk koordinat)

$$\Longleftrightarrow \quad u f'_u - f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{u} f\right)'_u = 0$$

lös : $f(u,v) = u \cdot g(v)$ **Svar:** $f(x,y) = y\, g(ye^{\frac{1}{x}})$ (g en deriverbar fkt.)

③ $$\iiint_{\Omega} \frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{z}}\, dx\,dy\,dz$$

$\Omega : z > 0$: välj som uttömmande följd:

$$\Omega_n : \begin{cases} \frac{1}{n} < x^2+y^2+z^2 \leq n^2 \\ \frac{1}{n} < z \end{cases}$$

Beräkna $I_n = \iiint_{\Omega_n} \dots\, dx\,dy\,dz =$

i sfär.:

$$\Omega'_n : \begin{cases} \frac{1}{n} \leq r \leq n \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{e^{-r} r^2 \sin\theta}{r^2\sqrt{r\cos\theta}}\, dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{e^{-r}}{\sqrt{r}}\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} \frac{\sin\theta}{\sqrt{\cos\theta}}\, d\theta = 2\pi \int_{(\frac{1}{n})^2}^{n^2} 2e^{-t^2}\, dt \quad 2\left[-\sqrt{\cos\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}$$

$\sqrt{r} = t$

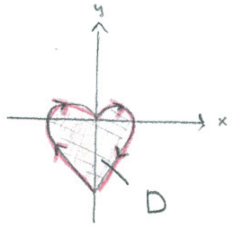
$$\lim_{n\to\infty} I_n = 4\pi \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 2 .$$

Fredag
2010-03-05

④

$C: \mathbf{r} = (x(t), y(t)) = (t^2 \sin t, t^2 \cos t), \ -\pi \leq t \leq \pi$

arean av området D innanför C:



$$m(D) = \iint_D dxdy \overset{[\text{Green}]}{\underset{(\text{positivt})}{=}} \frac{1}{2} \int_{\partial D} -y\,dx + x\,dy =$$

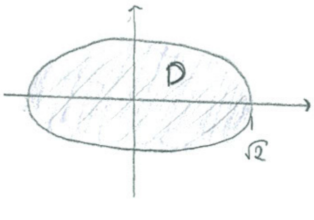
$$= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{-\pi} \left(-t^2\cos t\,(2t\sin t + t^2\cos t) + t^2\sin t\,(2t\cos t - t^2\sin t\right) dt = \left(\begin{array}{l} x = t^2\sin t, \ dx = (2t\sin t + t^2\cos t)\,dt \\ y = t^2\cos t, \ dy = (2t\cos t - t^2\sin t)\,dt \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{-\pi} (-t^4)\,dt = \frac{1}{2}\, 2 \int_0^{\pi} t^4\,dt = \boxed{\frac{\pi^5}{5}}$$

⑤

Bestäm max/min av $f(x,y) = 1 - x^2y^2$ på $D: 2x^2 + 3y^2 \leq 4$

f är C^0, D kompakt, alltså antar f max/min: antingen i inre pkt eller på randen.



(I) inre

$f(\quad) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = -2xy^2 = 0 \\ f'_y = -2x^2y = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{lll} \text{alla} & (x,0) & (-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}) \\ \text{och alla} & (0,y) & (-\frac{2}{\sqrt{3}} < y < \frac{2}{\sqrt{3}}) \end{array}$$

(II) rand: max/min av $f(x,y) = 1 - x^2y^2$ under biv.

$g(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4 = 0$ ....

(eller med pol. koord.)

Svar: $V_f = [\underset{\nearrow \text{ minsta}}{m}, \underset{\nwarrow \text{ största}}{M}]$ (f är C^0 och D bågvis skgd) s.o.m.v.

⑥ $\varphi(x,y,z) = x(y+z+z^2) - yz, \quad \mathbb{A} = (xy, yz, zx)$

Helmholtz

$$\mathbb{F} = \underbrace{-\nabla\varphi}_{\text{grad. fält}} + \underbrace{\text{rot } \mathbb{A}}_{\text{rotationsfält}}$$

a) $\nabla\varphi = \text{grad } \varphi = (\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z) = (y+z+z^2, x-z, x(1+2z)-y)$

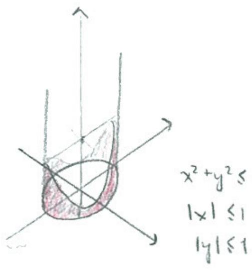
$$\nabla \times A = \text{rot } \mathbb{A} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & zx \end{vmatrix} = (-y, -z, -x)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{F} = \nabla\varphi + \nabla \times \mathbb{A} = (z+z^2, x-2z, 2xz-y)$$

b) $K = \{(x,y) \in \overset{\text{ellipsskivan } \swarrow}{D}, 0 \leq z \leq 1 - x^2y^2\}$ För vilka (x,y) är $z \geq 0$?

ja, uppg. 5, $z \geq \frac{1}{3}$!

$$\iint_{\partial K} \mathbb{F} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ut ur K}}}{\mathbb{n}} \, dS \underset{\text{Gauss}}{=} \iiint_K \text{div } \mathbb{F} \, dx\,dy\,dz =$$



$$\left[\begin{array}{l} \nabla \cdot (\nabla\varphi + \nabla \times \mathbb{A}) = \Delta\varphi + 0 + 0 \quad (= \varphi''_{xx} + \varphi''_{yy} + \varphi''_{zz}) \\ \text{div } \mathbb{F} = \text{div } (\text{grad} \varphi) = 0 + 0 + 2x \end{array} \right]$$

$$= \iiint_K 2x\,dx\,dy\,dz = \iint_D 2x\left(\int_0^{1-x^2y^2} dz\right)dx\,dy = 2\iint_D \underbrace{x(1-x^2y^2)}_{\text{udda fkt i } x}\,dx\,dy =$$

$$= 2\int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left(\int_{-\sqrt{\frac{4-3y^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-3y^2}{2}}} x(1-x^2y^2)\,dx\right)dy = 0$$

c) $$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} \underset{\text{stokes}}{=} \iint_Y \text{rot}\,\mathbb{F}\cdot \underbrace{\mathbb{n}}_{\text{uppåt}}\,dS =$$

γ = skärningen mellan
cylindern $2x^2+3y^2=4$ och $z = 1-x^2y^2$ $\}$

sett från origo : medurs $\Leftrightarrow$
sett uppifrån : moturs

$$\text{rot}\,\mathbb{F} = \nabla\times\nabla\mathbb{A} = (1,1,1)$$

$$= \iint_D (1,1,1)\circ(-z'_x, -z'_y, 1)\,dx\,dy = \iint_D (1,1,1)\cdot(+2xy^2, +2yx^2, 1)\,dx\,dy =$$

$$= \underbrace{\iint_D (+2xy^2)\,dx\,dy}_{=0\text{ (udda i } x)} + \underbrace{\iint_D (+2yx^2)\,dx\,dy}_{=0\text{ (udda i } y)} + \underbrace{\iint_D 1\,dx\,dy}_{\text{arean av } D} = \boxed{\sqrt{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\pi}$$

09-03-12

② $Y : \mathbb{r} = \mathbb{r}(u,v) = (2u+v, u-2v, uv)$, $u^2+v^2 \leq 15$ har arean

$$\iint_Y dS = \iint_D |\mathbb{r}'_u \times \mathbb{r}'_v|\,du\,dv = \iint_D \sqrt{u^2+4v^2+v^2+4u^2+25}\,du\,dv =$$

$$\left[\ \mathbb{r}'_u \times \mathbb{r}'_v = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 1 & v \\ 1 & -2 & u \end{vmatrix} = (u+2v, v-2u, -5)\ \right]$$

$$= \iint_D \sqrt{5}\sqrt{u^2+v^2+5}\,du\,dv \overset{\text{p.k.}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{15}} \sqrt{5}\sqrt{r^2+5}\, r\,dr\,d\varphi = \sqrt{5}\cdot 2\pi\left[\frac{1}{3}(r^2+5)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{15}}$$

rättelse →
(i onsdags)

OBS: $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

③

$\mathbb{F} = 4(yz, xz, xy) = (u, v, w)$

b) div $\mathbb{F} = 0 \Rightarrow \mathbb{F}$ källfritt
rot $\mathbb{F} = (x-x, y-y, z-z) = \vec{0} \Rightarrow \mathbb{F}$ konservativt (ty $\mathbb{R}^3$ enkelt shgd)

→ Finns

c) $\begin{cases} \varphi'_x = 4yz \\ \varphi'_y = 4xz \\ \varphi'_z = 4xy \end{cases}$

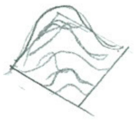
$\Longrightarrow \varphi(x,y,z) = 4xyz$ (kolla)

$\Longrightarrow \varphi(x,y,z) = 4xyz$ (kolla)

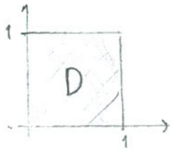
d) $\mathbb{A} = (x(z^2-y^2),\ y(x^2-z^2),\ z(y^2-x^2))$ visa rot $\mathbb{A} = \mathbb{F}$

e) Flödet F av $\mathbb{F}$ uppåt genom Y: $z = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$, $(x,y)\in D: \begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ 0\leq y\leq 1\end{cases}$

med Gauss: $F = \iint_Y \mathbb{F}\cdot \underbrace{\mathbf{n}}_{\text{uppåt}}\,dS + \iint_D \mathbb{F}\cdot(0,0,-1)\,dS =$



$= \iiint_K \operatorname{div}\mathbb{F}\,dx\,dy\,dz = 0$



K: $(x,y)\in D$, $0\leq z\leq \sin(\pi x)\sin(\pi y)$

$$F = \iint_D 4(0,0,xy)\,dx\,dy = 4\int_0^1\int_0^1 xy\,dx\,dy = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1$$

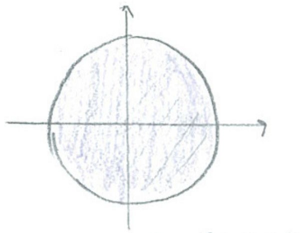
med Stokes: $\iint_Y \mathbb{F}\cdot \mathbb{n}\,dS = \iint_Y \operatorname{rot}\mathbb{A}\cdot\mathbb{n}\,dS = \int_{\partial D} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} = \int_{\partial D} -xy^2\,dx + yx^2\,dy + 0 =$

$\underset{\text{Green}}{=} \iint_D (2xy + 2xy)\,dx =$ s.o.

④

$$\mathbb{F} = (3x^2 - 2xy + y^3, -x^2 + 2xy - 3y^2) = (P, Q)$$

$\mathbb{F}$ kons.? $\varphi'_x = -2x + 2y = P'_y \Rightarrow$ finns potential φ



$D: x^2 + y^2 \leq 2$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi'_x = 3x^2 - 2xy + y^2 \Rightarrow \varphi(x,y) = x^3 - x^2y + xy^2 + g(y) \\ \varphi'_y = -x^2 + 2xy - 3y^2 = -x^2 + 2xy + g'(y) \quad \text{sätt in} \end{array}\right\}$$

ger: $g'(y) = -3y^2$, dvs, $g(y) = -y^3$

Result: $\boxed{\varphi(x,y) = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}$

Bestäm det $\begin{matrix}\text{största}\\ \text{minsta}\end{matrix}$ värdet av (arbetet för att förflytta en partikel från (2,2) till $(x,y) \in D$)

$$\varphi(x,y) - \varphi(2,2) = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 \quad \text{på } D.$$

Lösn D kompakt, φ C^0 $\Rightarrow$ $\substack{\max \\ \min}$ antas på D, D bågvis shgd

$\Rightarrow V_\varphi = [\min, \max]$

beräkning av kandidat:

I) inre

II) randp.

$$\varphi(x,y) = x^2(x-y) + y^2(x-y) = (x^2+y^2)(x-y)$$

med pol. koord.: $\varphi(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r^2 \cdot r(\cos\varphi - \sin\varphi) =$

$= \sqrt{2}\, r^3 \cos(\varphi + \frac{\pi}{4})$ $\sqrt{2}(\sqrt{2})^3 \cdot 1$ störst

$\sqrt{2}(\sqrt{2})^3(-1)$ minst

↑ (introd.)

$$D': \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

Svar: $[-4, 4]$

08-08-25

② $f(x,y) = 2|xy|\cos(x^2+y^2)$ diff.bar i origo ??

exist. f'_x, f'_y i origo?

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \frac{0}{x} = 0 \longrightarrow 0, \text{ då } x \to 0$$

$$\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \frac{0}{y} = 0 \longrightarrow 0 \text{ då } y \to 0$$

alltså: $f'_x(0,0) = 0 = f'_y(0,0)$:

$$\rho(x,y) = \frac{f(x,y) - (f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2|xy|\cos(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$