Reell B
förelasn
2001-01-19.

Partiella derivator.

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$n = 2$ $(a, b) \in D$

$$f'_x(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a,b)}{h}$$

$$f'_y(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a,b)}{k}$$

Om gränsvärdena existerar

$\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ är alltså de "vanliga" derivatorna av envariabelfunktionerna

$$x \to f(x,y) \quad \text{resp.} \quad y \to f(x,y)$$

Ex $f(x,y) = y \sin(e^{xy})$

$$f'_x = y \cos(e^{xy}) \cdot e^{xy} \cdot y$$

$$f'_y = \sin(e^{xy}) + y \cos(e^{xy}) e^{xy} \cdot x$$

Ex (sid 42)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$f(x,0) = 0 \ \forall x \Rightarrow f'_x(x,0) = 0$, spec $f'_x(0,0) = 0$

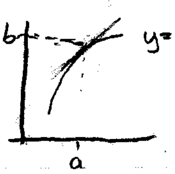
$f(0,y) = 0 \ \forall y \Rightarrow f'_y(0,y) = 0$, spec $f'_y(0,0) = 0$

Men $f(x,y)$ är inte kontinuerlig i $(0,0)$

$\left[\text{ty } f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \not\to 0 \right]$

Partiell deriverbarhet inte tillräckligt bra!
Vi inför det starkare begreppet
differentierbarhet

Motivering:



I en variabel

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \overset{\text{(def)}}{=} \rho(h) \underset{h \to 0}{\to} 0$$

$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\rho(h)$ då $\rho(h) \to 0$

Approximerbar med linjär funktion

Detta kan generaliseras.

$a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$

f differentiabar i a om

$$f(a+h) = f(a) + A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_n h_n + |h| \rho(h) \quad \text{där } \rho(h) \underset{h \to 0}{\to} 0$$

för vissa koeff. $A_1, \dots, A_n$

Sats 1 f differentierbar $\Rightarrow f$ kontinuerlig

Bevis $f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \underset{\mathbf{h}\to 0}{\to} 0$ ∎

Sats 2 f differentierbar $\Rightarrow f$ partiellt deriverbar med $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = A_j$

Bevis Tag $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_j = t(0, \dots, \overset{(j)}{1}, \dots, 0)$

$$\frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{e}_j)-f(\mathbf{a})}{t} = A_j + \underbrace{\frac{|t|}{t}}_{\text{begränsad}} \cdot \underbrace{\rho(t\mathbf{e}_j)}_{\to 0} \underset{t\to 0}{\to} A_j$$ ∎

$$\boxed{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})h_n + |\mathbf{h}|\rho(\mathbf{h}) \quad \rho(\mathbf{h}) \underset{\mathbf{h}\to 0}{\to} 0}$$

Vi kan sätta $\rho(0) = 0$, så att ρ blir kont. i 0

$n=2$. $h = x-a$, $k = y-b$

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\,\rho(x,y)$$

där $\rho(x,y) \underset{(x,y)\to(a,b)}{\to} 0$

Def Planet

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

är tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$

Def f är av klassen C^1 om de partiella derivatorna är kontinuerliga

Sats 3 f av klassen $C^1 \Rightarrow f$ differentierbar

Bevis $(n=2)$

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = [f(a+h,b) - f(a,b)] + [f(a+h,b+k) - f(a+h,b)]$$

Om $\varphi(t) = f(a+t, b)$ så är

$A = \varphi(h) - \varphi(0) = h\varphi'(\theta_1 h) = h f'_x(a+\theta_1 h, b)$

enligt medelvärdessatsen för något θ, $0 \le \theta_1 \le 1$

Analogt är $B = kf'_y(a+h, b+\theta_2 k)$, $0 \le \theta_2 \le 1$

$\rho_1(h) = f'_x(a+\theta_1 \cdot h, b) - f'_x(a,b) \underset{h\to 0}{\to} 0$ $\quad [f'_x$ kontinuerlig$]$

$\rho_2(h,k) = f'_y(a+h, b+\theta_2 k) - f'_y(a,b) \underset{(h,k)\to(0,0)}{\to} 0$ $\quad [f'_y$ kont.$]$

Alltså blir $f(a+h, b+k) - f(a,b) =$

$= f'_x(a,b)h + h\rho_1(h) + f'_y(a,b)k + k\rho_2(k,h) =$

$= f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k + \sqrt{h^2+k^2}\,\rho(h,k)$ där

$$\rho(h,k) = \underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{begränsad}} \underbrace{\rho_1(h)}_{\to 0} + \underbrace{\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{begränsad}} \underbrace{\rho_2(h,k)}_{\to 0} \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

$\Rightarrow$ f är differentierbar $\qquad$ Q.E.D

Kedjeregeln

Om $g(t)$ är en funktion i en variabel, och om man sätter $t = h(x,y)$ kan derivator av $f(x,y) = g(h(x,y))$ beräknas med den "vanliga" kedjeregeln:

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = g'(t) \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = g'(t) \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \qquad \text{där } t = h(x,y)$$

Obs! g' är en ordinär derivata (prim, inget index)

f'_x är en partiell derivata (index och (i regel) prim)

Observera att det även förekommer att prim utelämnas $f'_x = f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$

Kedjeregeln i flera variabler:

$u = f(\mathbf{x})$ där f är differentierbar

Vi sätter $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ där $x_i(t)$ är deriverbara

För den sammansatta funktionen $u = u(t) = f(\mathbf{x}(t))$ har vi derivatan

$$\frac{du}{dt} = f'_{x_1}(\mathbf{x}(t)) \cdot x_1'(t) + \dots + f'_{x_n}(\mathbf{x}(t)) \cdot x_n'(t) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$$

Bevis: f differentierbar

(*) $f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = f'_{x_1}h_1 + \dots + f'_{x_n}h_n + |\mathbf{h}|\rho(\mathbf{h})$ där $\rho(\mathbf{h}) \underset{\mathbf{h}\to 0}{\longrightarrow} 0$, $\rho(0) = 0$

$$\frac{u(t+k) - u(t)}{k} = \frac{f(\mathbf{x}(t+k)) - f(\mathbf{x}(t))}{k}$$

$= [\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \mathbf{h} = \mathbf{x}(t+k) - \mathbf{x}(t)$ i (*)$]$

$$= f'_{x_1}(\mathbf{x}(t)) \frac{x_1(t+k) - x_1(t)}{k} + \dots + f_{x_n}(\mathbf{x}(t)) \frac{x_n(t+k) - x_n(t)}{k} + \frac{|\mathbf{h}|}{k}\rho(\mathbf{h})$$

$k \to 0 \Rightarrow \mathbf{h} \to 0$ ($\mathbf{x}$ kont) och därmed $\frac{|\mathbf{h}|}{k}\rho(\mathbf{h}) \underset{k\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Vidare gäller $\frac{h_i}{k} = \frac{x_i(t+k) - x_i(t)}{k} \underset{k\to 0}{\longrightarrow} x_i'(t)$

Alltså är $\frac{h_i}{k}$, och därmed $\frac{|h|}{k}$ begränsad

$\therefore \frac{du}{dt} = \lim_{k \to 0} \frac{u(t+k) - u(t)}{k} = f'_{x_1}(x(t))\, x_1'(t) + \dots + f'_{x_n}(x(t))\, x_n'(t)$

QED

Om $x_1, \dots, x_n$ beror av flera variabler, säg

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t_1, \dots, t_q) \\ x_n = x_n(t_1, \dots, t_q) \end{cases}$$

så gäller

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_j} \quad , j = 1, \dots, q}$$

Ex Lös DE $(x^2+1) z'_x + xyz'_y = 0$

$(y>0)$ genom att sätta $u = \frac{x^2+1}{y^2}$, $v = x + y^2$

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2x}{y^2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2(x^2+1)}{y^3} \frac{\partial z}{\partial u} + 2y \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$(x^2+1) z'_x + xyz'_y = (x^2+1) \frac{2x}{y^2} \frac{\partial z}{\partial u} + (x^2+1) \frac{\partial z}{\partial v} - xy \frac{2(x^2+1)}{y^3} \frac{\partial z}{\partial u} +$$

$$+ 2xy^2 \frac{\partial z}{\partial v} = (x^2+1+2xy^2) \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 0 \Rightarrow z = \varphi(u) = \varphi\left(\frac{x^2+1}{y^2}\right)$$

Gradient – riktningsderivata

Def Om $f(x_1, \dots, x_n)$ är differentierbar så är gradienten av f $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$

Man skriver också $\operatorname{grad} f = \nabla f$ (∇ = "del" eller "nabla")

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n = \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{h}$$

Så att def. av differentierbarhet kan skrivas

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + |\mathbf{h}| \rho(\mathbf{h}), \quad \rho(\mathbf{h}) \to 0$$

Kedjeregeln: $\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n'(t) =$

$$= \operatorname{grad} f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)$$

Observera:

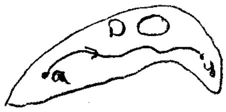
$\operatorname{grad} f \underset{\uparrow}{=} \nabla f = \mathbb{\nabla} f$

formellt

Föreläsn.

Sats: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en öppen, (bågvis) sammanhängande mängd.
Om f är en C^1-funktion med $\text{grad} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ i D så är f konstant i D

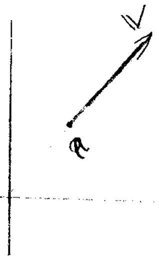
Bevis



I en sammanhängande mängd kan två punkter som tillhör mängden sammanbindas med en kurva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, Gör så med a och y
$\alpha \leq t \leq \beta$, i D där $\mathbf{x}(\alpha) = a$, $\mathbf{x}(\beta) = y$
Vi kan också anta att $\mathbf{x}(t)$ är C^1

Fixera $a \in D$,
välj $y \in D$ godtyckligt

Då är $\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t)) = \text{grad} f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) = 0$.
$f(\mathbf{x}(t))$ är konstant, $f(y) = f(a)$
Men $y \in D$ var godtyckligt, så f är konstant



Låt $\mathbf{v}$ vara en enhetsvektor ($|\mathbf{v}| = 1$)
Studera $f(x)$ längs linjen $\mathbf{x} = a + t\mathbf{v}$

RIKTNINGSDERIVATAN av f i punkten a i riktningen $\mathbf{v}$ är

$$f'_{\mathbf{v}}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\mathbf{v}) - f(a)}{|t|}$$

Sats 6 Om f är differentierbar, så är

$$\boxed{f'_{\mathbf{v}}(a) = \text{grad} f(a) \cdot \mathbf{v}}$$

Bevis Sätt $\varphi(t) = f(a + t\mathbf{v})$
Då är helt enkelt

$$f'_{\mathbf{v}}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0)$$

Men $\varphi'(t) = \text{grad} f(a + t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$ $\quad \therefore f'_{\mathbf{v}}(a) = \text{grad} f(a) \cdot \mathbf{v}$

Gradientens fysikaliska och geometriska tolkning

$$\text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

$$f'_{\mathbf{v}}(a) = \text{grad} f(a) \cdot \mathbf{v} \overset{C.S}{\leq} |\text{grad} f(a)| \underbrace{|\mathbf{v}|}_{=1} = |\text{grad} f(a)|$$ med

likhet omm $\mathbf{v}$ och $\text{grad} f(a)$ är parallella

Låt (a, b) vara en punkt på nivåkurvan $f(x, y) = C$
Antag $\text{grad} f(a, b) \neq (0, 0)$
Omkring (a, b) kan kurvan parametriseras

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \iff \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$$

Låt $t = t_0$ ge (a, b)
$f(x(t), y(t)) = C$, $\quad f(\mathbf{x}(t)) = C$

Kedjeregeln ger: $\text{grad } f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) = 0$

för $t = t_0$ dvs

$\text{grad } f(a,b) \cdot \mathbf{x}'(t_0) = 0$

$\Rightarrow$ grad $f(a,b)$ vinkelrät mot tangentvektorn $\mathbf{x}'(t_0)$ till kurvan i (a,b)

Alltså är grad $f(a,b)$ en <u>normalvektor</u> till kurvan $f(x,y)=C$ i punkten (a,b) (Sats 8)

Analogt: grad $f(a,b,c)$ är normalvektor till nivåytan $f(x,y,z)=C$ i punkten (a,b,c) på ytan.

Ex Funktionsytan

$z = f(x,y)$ är en nivåyta till $F(x,y,z) = z - f(x,y)$. I en punkt (a,b,c), där $c = f(a,b)$ på ytan är grad $F(a,b,c) =$
$= (-f_x'(a,b), -f_y'(a,b), 1)$ en normalvektor till tangentplanet i punkten (a,b,c) till ytan.

Tangentplanets ekvation:

$$\text{grad } F(a,b,c) \cdot (x-a, y-b, z-c) = 0$$

$$-f_x'(a,b)(x-a) - f_y'(a,b)(y-b) + z - f(a,b) = 0$$

dvs samma ekv. som tidigare

<u>Högre derivator</u>

Om $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x'$ och $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y'$ själva är deriverbara med avseende på x och y kan vi bilda

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f_x')_x' = f_{xx}''$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (f_x')_y' = f_{xy}''$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (f_y')_x' = f_{yx}''$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (f_y')_y' = f_{yy}''$$

notera:

$f''_{xx} = f_{xx}$
notation utan bis används främst i senare kurser

Ex $f(x,y) = e^{x^2y^3}$

$f'_x = 2xy^3e^{x^2y^3}$, $f'_y = 3x^2y^2e^{x^2y^3}$

$$\left.\begin{aligned} f''_{xy} &= 6xy^2e^{x^2y^3} + 2xy^3\cdot 3x^2y^2e^{x^2y^3} \\ f''_{yx} &= 6xy^2e^{x^2y^3} + 3x^2y^2\cdot 2xy^3\cdot e^{x^2y^3} \end{aligned}\right\} = 6xy^2e^{x^2y^3}(1+x^2y^3)$$

Sats 9 $f''_{xy} = f''_{yx}$ om $f(x,y)$ är av klassen C^2

Bevis: Tag en punkt (a,b)

Idé: Titta på differenskvoten

$$f_1(y) = \frac{f(a+h,y)-f(a,y)}{h}$$

$$f_1'(b) = \frac{f'_y(a+h,b)-f'_y(a,b)}{h}$$ bör ligga nära $f''_{yx}(a,b)$ för små h

Analogt för $f_2(x) = \dfrac{f(x,b+k)-f(x,b)}{k}$

$$f_2'(a) = \frac{f'_x(a,b+k)-f'_x(a,b)}{k}$$ bör ligga nära $f''_{xy}(a,b)$ för små k

Men $$\frac{f_1(b+k)-f_1(b)}{k} = \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b+k)-f(a+h,b)+f(a,b)}{hk} =$$

$$= \frac{f_2(a+h)-f_2(a)}{h} = p(h,k)$$

Medelvärdessatsen:

$$p(h,k) = \frac{f_1(b+k)-f_1(b)}{k} = f_1'(b+\theta_1k) \text{ för något } \theta_1,\ 0\le\theta_1\le 1$$

$$f_1'(y) = \frac{1}{h}\left[f'_y(a+h,y)-f'_y(a,y)\right]$$

$$p(h,k) = \frac{1}{h}\left[f'_y(a+h,b+\theta_1k)-f'_y(a,b+\theta_1k)\right] =$$

$$= f''_{yx}(a+\theta_2h,b+\theta_1k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} f''_{yx}(a,b)$$

Analogt $$p(h,k) = \frac{f_2(a+h)-f_2(a)}{h} = f''_{xy}(a+\theta_3h,b+\theta_4k) \to$$

$$\underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} f''_{xy}(a,b)$$

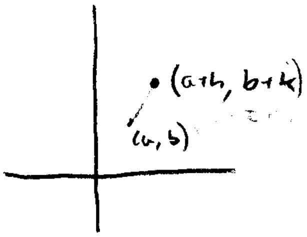
$\therefore$ $f''_{yx}(a,b) = f''_{xy}(a,b)$

Taylors formel i två variabler

Antag $f(x,y)$ är av klassen C^3. Då är

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)\cdot h + f'_y(a,b)\cdot k + \frac{1}{2}\Big[f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2\Big] + (h^2+k^2)^{3/2}B(h,k)$$

Bevis



Studera f på linjen mellan (a,b) och $(a+h, b+k)$

$F(t) = f(a+th, b+tk)$

Enligt Maclaurins formel så är $F(t) =$

$$= F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(0)t^2 + \frac{1}{6}\cdot F'''(\theta t)t^3 \qquad 0 \le \theta \le 1$$

Sökt är $F(1)$

Allmän utveckling (utveckling till grad n)

$f \in C^{n+1}$

$F(t) = f(a+th, b+tk)$

$F'(t) = (hf'_x + kf'_y)(a+ht, b+kt)$

$$\frac{dF}{dt} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f$$

$$\frac{d^nF}{dt^n} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f$$ utvecklas som binomialutveckling

$n=2$:
$$\frac{d^2F}{dt^2} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f =$$

$$= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + kh\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \overset{\text{kont.}}{=}$$

$$= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2!}F''(0)t^2 + \dots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0)t^n + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta t)^{n+1}$$

$t=1$

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k + \frac{1}{2}\Big[f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2\Big] + \dots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b) + |h|^{n+1}B(h,k)$$

begränsad

föreläsn.

Ex $f(x,y) = \frac{3}{2}\ln(1+x^2+y^2) + xy - x^2 - y^2$

kring $(0,0)$ t.o.m 4:e graden

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + O(t^3)$, $t \to 0$

$\ln(1+x^2+y^2) = [t = x^2+y^2 \to 0] = x^2+y^2 - \frac{(x^2+y^2)^2}{2} + O(r^6)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$f(x,y) = \frac{3}{2}(x^2+y^2) - \frac{3}{4}(x^4+2x^2y^2+y^4) + xy - (x^2+y^2) + O(r^6) =$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(x^2+y^2) - \frac{3}{4}(x^4+2x^2y^2+y^4) + xy}_{\text{Taylorpolynom av grad 4 (5)}} + O(r^6)$$

t.ex. är koeff. för x^2y^2: $\frac{1}{4!}\cdot 6 f^{(4)}_{xxyy}(0,0) = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow f^{(4)}_{xxyy}(0,0) = -6$

Antag $f(x)$ har ett lokalt extremvärde i en inre punkt a i def. Antag också att f är partiellt deriverbar i a.

Då gäller $\text{grad} f(a) = 0$

Bevis $(n=3)$ Funktionen $g_1(x) = f(x, a_2, a_3)$ har lokalt extremvärde i $x = a_1$ varför $g_1'(a_1) = 0$, $f'_x(a_1, a_2, a_3) = C$, $C \in \mathbb{R}$

analogt: $f'_y(a) = f'_z(a) = 0$

$\Rightarrow \text{grad} f(a) = (0,0,0)$

a kallas då en stationär punkt

$\Leftrightarrow \text{grad} f(a) = 0$

Studera $f(x,y)$ i närheten av en stationär punkt $a = (a,b)$ (dvs $f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$)

Antag $f \in C^3$

Sätt $A = f''_{xx}(a,b)$, $B = f''_{xy}(a,b)$, $C = f''_{yy}(a,b)$

Tangentens formel:

$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + (\sqrt{h^2+k^2})^3 B(h,k)$ ← begr

Studera $Q(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ (en s.k. <u>kvadratisk form</u>)

1) Om $Q(h,k)$ är <u>positivt definit</u>, dvs $Q(h,k) > 0$ $\forall (h,k) \neq (0,0)$ så föreligger <u>strängt lokalt minimum</u>

2) Om $Q(h,k)$ är <u>negativt definit</u> så föreligger strängt lokalt maximum

3) Om $Q(h,k)$ är <u>indefinit</u>, dvs $Q(h,k)$ antar både positiva och negativa värden så föreligger en sadelpunkt

4) Om $Q(h,k) \geq 0$ eller $Q(h,k) \leq 0$ $\forall (h,k) \neq (0,0)$ dvs Q är positivt (eller negativt) semidefinit så krävs särskild undersökning

Analogt för flera variabler

Ex Undersök $Q(h,k,l) = 3h^2 + 2k^2 - l^2 - 3hk + 2kl$.

Kvadratkompletera

$$Q = 3(h^2 - hk) + 2k^2 - l^2 + 2kl =$$
$$= 3\left[\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4}\right] + 2k^2 - l^2 + 2kl =$$
$$= 3\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{5k^2}{4} - l^2 + 2kl =$$
$$= 3\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}\left(k^2 + \frac{8kl}{5}\right) - l^2 =$$
$$= 3\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}\left[\left(k + \frac{4}{5}l\right)^2 - \frac{16}{25}l^2\right] - l^2 =$$
$$= 3\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}\left(k + \frac{4}{5}l\right)^2 - \frac{9}{5}l^2$$

Q är indefinit

Ex $f(x,y) = \frac{3}{2}\ln(1 + x^2 + y^2) + xy - x^2 - y^2$

$f'_x = f'_y = 0$ ger de stationära punkterna

$(0,0)$; $(1,1)$; $(-1,-1)$

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - \frac{3}{4}(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + O(r^6)$$

$Q = (x+y)^2$ pos. semidefinit

Sadelpunkt ty t.ex.

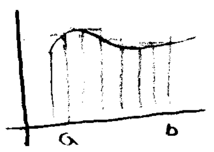
$f(x,0) = \frac{x^2}{2} + O(x^4) > 0$

$f(x,-x) = -3x^4 + O(x^6) < 0$ för små $|x|$

föreläsn

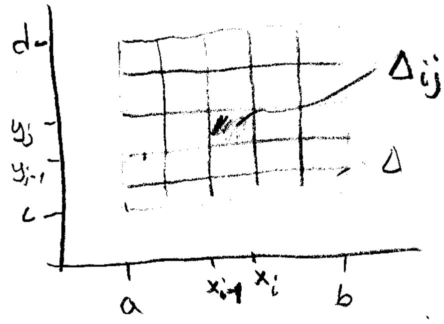
Dubbelintegraler

Defenition av en enkelintegral $\int_a^b f(x)\,dx$ görs genom approximation med styckvis konstanta funktioner



Samma idé används för dubbelintegraler

$\boxed{\text{Se boken + hemsidan}}$ kapitel 6



Φ kallas en trappfunktion på Δ om, på varje uppdelning Δ_{ij}, är funktionen konstant c_{ij}

Arean (måttet) av Δ_{ij} är

$$\mu(\Delta_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Räkneregler

(1) $\iint_\Delta \alpha\Phi\,dx\,dy = \alpha\iint_\Delta \Phi\,dx\,dy$ $\quad\alpha$ konstant

(2) $\iint_\Delta (\Phi+\Psi)\,dx\,dy = \iint_\Delta \Phi\,dx\,dy + \iint_\Delta \Psi\,dx\,dy$

Om indelningarna är olika kan de förfinas tills de överensstämmer (funktionerna blir det, på samma indelningar)

1, 2 till följd av linjäritet

(3) $\Phi \le \Psi$ på $\Delta \Rightarrow \iint_\Delta \Phi\,dx\,dy \le \iint_\Delta \Psi\,dx\,dy$

(monotonitetsegenskap)

(4) triangelolikheten

(5) Δ_1, Δ_2 är en indelning av Δ

$\Rightarrow \iint_\Delta \Phi\,dx\,dy = \iint_{\Delta_1}\Phi\,dx\,dy + \iint_{\Delta_2}\Phi\,dx\,dy$

(6) $\iint \Phi\,dx\,dy = \int_a^b\left\{\int_c^d \Phi(x,y)\,dy\right\}dx = \int_c^d\left\{\int_a^b \Phi(x,y)\,dx\right\}dy$

Bevis av (6)

$$\iint_\Delta \Phi\,dx\,dy = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n c_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i}\Bigg\{\underbrace{\int_{y_{j-1}}^{y_j}\Phi(x,y)\,dy}_{c_{ij}}\Bigg\}dx = \sum_{i=1}^m\int_{x_{i-1}}^{x_i}\Bigg\{\underbrace{\sum_{j=1}^n\int_{y_{j-1}}^{y_j}\Phi(x,y)\,dy}_{\int_c^d\Phi(x,y)\,dy}\Bigg\}dx =$$

$$= \int_a^b\left\{\int_c^d \Phi(x,y)\,dy\right\}dx$$

QED

Låt nu $f(x,y)$ vara en <u>begränsad</u> funktion på Δ

$M_1 = \{\phi : \phi \text{ trappfunktion}, \phi \leq f\}$

$M_2 = \{\psi : \psi \text{ trappfunktion}, \psi \geq f\}$

$M_1, M_2 \neq \emptyset$ (inte tomma) ty f begränsad

Sätt $\lambda_1 = \sup_{\phi \in M_1} \iint_\Delta \phi \, dx\,dy$

$\lambda_2 = \inf_{\psi \in M_2} \iint_\Delta \psi \, dx\,dy$

Vi har $\forall \phi \in M_1, \psi \in M_2 : \phi \leq f \leq \psi$

$\Rightarrow \iint_\Delta \phi \, dx\,dy \leq \iint_\Delta \psi \, dx\,dy$ och $\boxed{\lambda_1 \leq \lambda_2}$

Vidare $\boxed{\iint_\Delta \phi \, dx\,dy \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \iint_\Delta \psi \, dx\,dy \quad \forall \phi, \psi}$

<u>Def</u> f är (Riemann) integrerbar över Δ om $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Om f är integrerbar så kallas λ för <u>dubbelintegralen</u> av f över Δ och betecknas $\iint_\Delta f(x,y) \, dx\,dy$

Tydligen gäller att f är integrerbar omm

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \phi \in M_1, \psi \in M_2 : \iint_\Delta \psi \, dx\,dy - \iint_\Delta \phi \, dx\,dy < \varepsilon \quad (*)$

<u>Bevis</u> 1) f integrerbar, $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \exists \phi, \psi : \iint_\Delta \phi \, dx\,dy > \lambda - \frac{\varepsilon}{2}, \ \iint_\Delta \psi \, dx\,dy < \lambda + \frac{\varepsilon}{2}$

vilket ger $(*)$

2) Antag $(*)$ gäller. Då är $\lambda_2 \leq \iint_\Delta \psi \, dx\,dy \underset{(*)}{<} \iint_\Delta \phi \, dx\,dy + \varepsilon \leq \lambda_1 + \varepsilon$

$\therefore \lambda_2 < \lambda_1 + \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0$

$\therefore \lambda_2 \leq \lambda_1$

$\therefore \lambda_1 = \lambda_2$

$\Rightarrow f$ integrerbar

Sats 1 är nu uppenbar.

Vi har $\iint_\Delta \phi \, dx\,dy \leq \lambda \leq \iint_\Delta \psi \, dx\,dy \quad \forall \phi, \psi$

Om $\iint_\Delta \phi \, dx\,dy \leq \lambda < \lambda' \leq \iint_\Delta \psi \, dx\,dy \quad \forall \phi, \psi$

ger $\lambda_1 \leq \lambda < \lambda' \leq \lambda_2$, orimligt ty integrerbarhet givet

Sats 2

f är integrerbar över Δ

$$\Rightarrow \iint f\,dx\,dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)\,dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)\,dx \right\} dy$$

Om integralerna i högerledet existerar

Bevis Låt $\Psi \in M_2$, $f(x,y) \le \Psi(x,y)$ på Δ

Då är $\int_c^d f(x,y)\,dy \le \int_c^d \Psi(x,y)\,dy \quad \forall x \in [a,b]$

$$\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)\,dy \right\} dx \le \int_a^b \left\{ \int_c^d \Psi(x,y)\,dy \right\} dx = \iint_\Delta \Psi(x,y)\,dx\,dy$$

enligt (6) för trappfunktioner

Analogt fås att

$$\iint_\Delta \phi\,dx\,dy \le \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)\,dy \right\} dx \quad \forall \phi \in M_1,\ \phi(x,y) \le f(x,y)$$

Enligt sats 1 är då

$$\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)\,dy \right\} dx = \iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy$$

Sats 3 Kontinuerliga funktioners integrerbarhet

f kontinuerlig på sluten axelparallell rektangel Δ

$\Rightarrow$ f integrerbar över Δ

$\exists \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)\,dy \right\} dx$

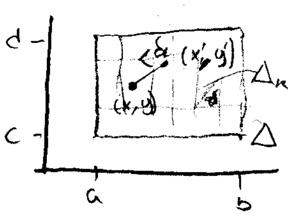
$\exists \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)\,dx \right\} dy$

Bevis Enligt sats 1.5 så är f likformigt kontinuerlig på Δ

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon \quad \forall (x,y)$ och $(x',y') \in \Delta$

med $|(x,y) - (x',y')| < \delta_\varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')| < \varepsilon \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \Delta$ med $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| < \delta_\varepsilon$



Låt nu $\varepsilon > 0$ vara givet och bestäm motsvarande $\delta_\varepsilon > 0$

Dela in Δ i delrektanglar Δ_k med diagonallängd $< \delta$

Låt M_k resp. m_k vara max resp. min av $f(x,y)$ på Δ_k. Då $M_k - m_k < \varepsilon$

Låt Ψ och ϕ vara trappfunktionerna med värden M_k resp. m_k på Δ_k $\Rightarrow \phi \le f \le \Psi$

$$\iint_\Delta \Psi\,dx\,dy - \iint_\Delta \phi\,dx\,dy = \iint_\Delta (\Psi - \phi)\,dx\,dy = \sum_k \iint_{\Delta_k} (M_k - m_k)\,dx\,dy =$$

$= \sum_k (M_k - m_k)\mu(\Delta_k) < \varepsilon \sum \mu(\Delta_k) = \varepsilon\,\mu(\Delta)$

Då $\varepsilon > 0$ kan väljas godtyckligt litet

$\Rightarrow$ f är integrerbar på Δ

$f(x,y)$ är kont i y för fixt x

$\Rightarrow \exists \int_c^d f(x,y)\,dy$

Låt ε och δ vara som ovan , $c<d$

Om $|x - x'| < \delta$ så är $|f(x,y) - f(x',y)| < \varepsilon \quad \forall y$

Därmed är

$$\left| \int_c^d f(x,y)\,dy - \int_c^d f(x',y)\,dy \right| = \left| \int_c^d (f(x,y) - f(x',y))\,dy \right| \leq$$

$$\leq \int_c^d \underbrace{|f(x,y) - f(x',y)|}_{<\varepsilon}\,dy < \varepsilon(d-c)$$

Då $\varepsilon(d-c)$ kan göras godtyckligt ~~litet~~ litet

så är $\int_c^d f(x,y)\,dy$ liktormigt kontinuerlig

$\Rightarrow \exists \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)\,dy \right\} dx$

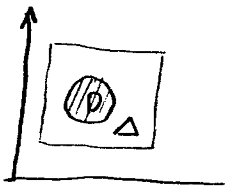
Analogt finns även $\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)\,dx \right\} dy$

och enl. sats 2 är

$$\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)\,dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)\,dx \right\} dy$$

QED

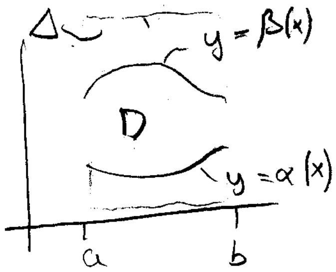
Låt $f(x,y)$ vara begränsad på en begränsad mängd D



Sätt

$$f_D(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

Sats 4



D är av formen

$D = \{(x,y): \alpha(x) \le y \le \beta(x),\ a \le x \le b\}$

$\alpha(x)$, $\beta(x)$ kontinuerliga

f kontinuerlig på D

$\Rightarrow$ f integrerbar på D och

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left\{ \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx$$

Bevis

$f(x,y)$ blir integrerbar (se boken)

Sätt $f_D(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ,(x,y) \in D \\ 0 & ,(x,y) \notin D \end{cases}$

f_D är integrerbar på Δ

$A(x) = \int_c^d f_D(x,y)\,dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy$ existerar $\forall x$ ty f är kont.

Vidare existerar $\int_a^b A(x)\,dx$ ty $A(x)$ är kont.
vilket kan inses genom att sätta

$y = \alpha(x) + t[\beta(x) - \alpha(x)]$, $0 \le t \le 1$

$$A(x) = \int_0^1 f(x, \alpha(x) + t[\beta(x) - \alpha(x)])(\beta(x) - \alpha(x))\,dt = \int_0^1 F(x,t)\,dt$$

$F(x,t)$ är kont. ty sammansatt av kontinuerliga funktioner

Enligt tidigare (Bevis sats 3) är $A(x)$ kont.

Enligt sats 2 är då

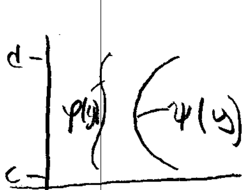
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f_D(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f_D(x,y)\,dy \right\} dx =$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx$$

QED

Analogt för områden D av typ

$D = \{(x,y): \varphi(y) \le x \le \psi(y),\ c \le y \le d\}$



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left\{ \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right\} dy$$

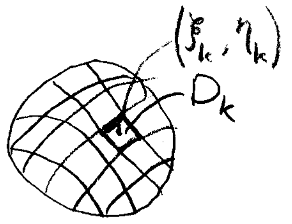
$\varphi(y)$, $\psi(y)$ kont.

Approximation med Riemannsummor

Antag D kompakt, f kontinuerlig

Dela in D i n delområden D_k

Välj $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$



Om indelningens finhet går mot noll så gäller att

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\mu(D_k) \longrightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

Fysikaliskt exempel

D har massbeläggning med ytdensitet $\rho(x,y)$

D_k har massan $m_k \approx \rho(\xi_k, \eta_k)\,\mu(D_k)$

Totala massan är $m = \sum_{k=1}^{n} m_k \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k)\,\mu(D_k) \approx \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy$

om indelningens finhet går mot noll fås

$m = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy$

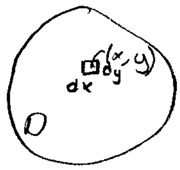
Kortare

Ett ytstycke med den infinitdecimala arean $dx\,dy$ kring punkten (x,y) har massa $\rho(x,y)\,dx\,dy$

Totalmassan blir $m = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy$

$dx\,dy$ kallas ytelementet

Arean är $D = \mu(D) = \iint_D dx\,dy$



förelösn

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \end{cases}$$

$$f_j(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f_j(\mathbf{a}) \approx \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\mathbf{a})h_1 + \ldots + \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(\mathbf{a})h_n =$$

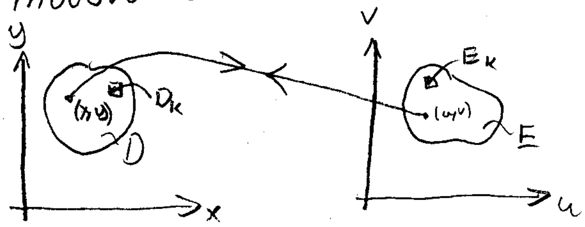
$$= \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(\mathbf{a})\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \text{grad } f_j(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = \nabla f_j(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}$$

För variabelsubstitution:

$$\frac{d(\mathbf{y})}{d(\mathbf{t})} = \frac{d(\mathbf{y})}{d(\mathbf{x})} \frac{d(\mathbf{x})}{d(\mathbf{t})}$$

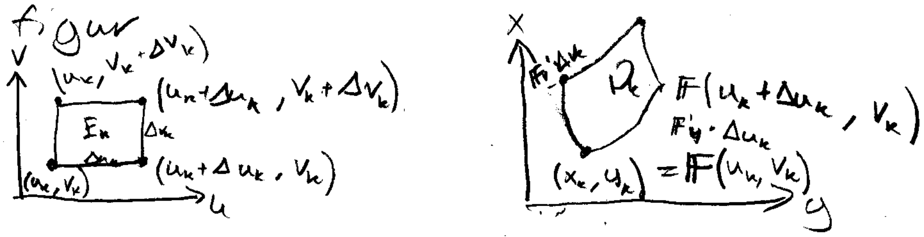
Variabelsubst. i dubbelintegraler

Låt $\begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbb{F}(u,v)$ vara en bijektiv C^1-avbildning, där ett område D i xy-planet motsvaras av ett område E i uv-planet



Betrakta ett litet område E_k av E och låt D_k vara motsvarande del av D. Vad är sambandet mellan deras areor?

Låt E_k vara en axelparallell rektangel enligt figur



$$\mathbb{F}(u_k+\Delta u_k, v_k) - \mathbb{F}(u_k, v_k) \approx \mathbb{F}'_u(u_k, v_k)\Delta u_k$$

$$\mathbb{F}(u_k, v_k+\Delta v_k) - \mathbb{F}(u_k, v_k) \approx \mathbb{F}'_v(u_k, v_k)\Delta v_k$$

$\mu(D_k) \approx$ aran av den parallellogram som spänns upp av $\mathbb{F}'_u \Delta u_k$ och $\mathbb{F}'_v \Delta v_k$

dvs $\left\| \begin{matrix} g'_u & g'_v \\ h'_u & h'_v \end{matrix} \right\| \Delta u_k \Delta v_k$

$\mu(D_k) \approx |J(u_k, v_k)|\mu(E_k)$ för

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} g'_u & g'_v \\ h'_u & h'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{d(x,y)}{d(u,v)}$$

Bilda Riemannsumman för en kontinuerlig funktion $f(x,y)$

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\mu(D_k) \approx \sum_{k=1}^{n} f(g(u_k, v_k), h(u_k, v_k)) |J(u_k, v_k)| \mu(E_k)$$

HL är också en Riemannsumma. Man leds till formeln

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f(g(u,v), h(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv}$$

Vi skriver symboliskt

$$\boxed{dx\,dy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| du\,dv}$$

<u>Ex</u> Polära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = r, \qquad dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$$

<u>Ex</u> Arean av en ellips, D

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

Elliptiskt-polära koordinater

$$x = ar\cos\varphi \qquad 0 \leq r \leq 1$$
$$y = br\sin\varphi \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix}\right| = |abr\cos^2\varphi + abr\sin^2\varphi| = \underline{\underline{abr}}$$

<u>Alt</u> $\begin{cases} x = ax_1 \\ y = by_1 \end{cases} \qquad x_1^2 + y_1^2 \leq 1$

$$\frac{d(x,y)}{d(x_1,y_1)} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$$

Arean av ellipsen D: $\iint_D dx\,dy = \iint_{x_1^2+y_1^2<1} ab\,dx_1\,dy_1 = \pi ab$

Polära koordinater för x_1, y_1

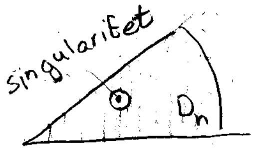
$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi \\ y_1 = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix}$$

$$\frac{d(x_1,y_1)}{d(r,\varphi)} = \frac{d(x,y)}{d(x_1,y_1)} \cdot \frac{d(x_1,y_1)}{d(r,\varphi)} = abr$$

Föreläsn

Generaliserade dubbelintegraler

Antag D är obegränsad och/eller $f(x,y)$ är obegränsad
Antag $f(x,y) \geq 0$



Välj en följd av delområden D_n, där
$D_n \subseteq D_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$

D_n är begränsad, $f(x,y)$ begränsad på D_n

Om $\exists \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy$ (och är ändligt) så är
$\iint_D f(x,y)\,dxdy$ en konvergent generaliserad integral med
värde $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy$. Annars är integralen divergent.

Gränsvärdet är oberoende av hur D_n väljs.
Man kan använda upprepad integration och variabelbyte även över obegränsade områden

Ex $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n}\left\{\int_{-n}^{n} e^{-x^2-y^2}\,dy\right\}dy = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-n}^{n} e^{-y^2}dy\right) =$
$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right]^2$

Välj nu i stället cirklar med radien n, och gå över till polära koordinater $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$\iint_{R^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi}\int_0^{n} e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = 2\pi \cdot \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr =$
$= 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$

Integralerna är lika oberoende av uträkningssätt så

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}}$$

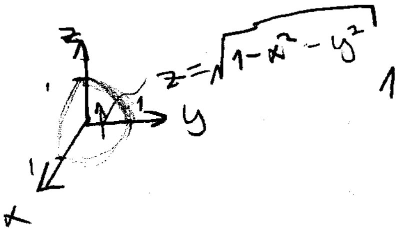
jämn funktion ger även

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Trippelintegraler

Ex $I = \iiint_D x y^2 z \, dx\, dy\, dz$

$D: \quad x^2+y^2+z^2 \leq 1, \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; z \geq 0$



1. $I = \iint_{D_1} \left\{ \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} x y^2 z \, dz \right\} dx\, dy =$

$= \iint_{D_1} x y^2 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx\, dy =$

$= \frac{1}{2} \iint_{D_1} x y^2 (1-x^2-y^2)\, dx\, dy = \left[\text{polära koord.}\right] =$

$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r\cos\varphi \cdot r^2 \sin^2\varphi \,(1-r^2)\, r\, dr\, d\varphi =$

$= \frac{1}{2} \int_0^1 (r^4 - r^6)\, dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin^2\varphi \, d\varphi =$

$= \frac{1}{2} \left[\frac{r^5}{5} - \frac{r^7}{7}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{105}$

2. $D_z: \quad x^2+y^2 \leq 1-z^2, \; x \geq 0, \; y \geq 0$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$0 \leq r \leq \sqrt{1-z^2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$I = \int_0^1 \left\{ \iint_{D_z} x y^2 z \, dx\, dy \right\} dz = \int_0^1 z \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r\cos\varphi\, r^2 \sin^2\varphi \, r\, dr\, d\varphi \right\} dz =$

$= \int_0^1 z \left\{ \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r^4\, dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \cos\varphi \, d\varphi \right\} dz =$

$= \int_0^1 z \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot (1-z^2)^{\frac{5}{2}}\, dz = \frac{1}{15} \int_0^1 \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} (1-z^2)^{\frac{7}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{105}$

3. rymdpolära koordinater:

$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \sin\theta \\ y = r\sin\theta \sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$dx\, dy\, dz = r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$

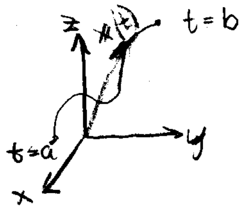
$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r\sin\theta\cos\varphi \cdot r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi \cdot r\cos\theta \cdot r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi =$

$= \int_0^1 r^6\, dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \cos\theta \, d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} \left[\frac{1}{5}\sin^5\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{105}$

förelän.

Kurvor

$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $a \le t \le b$



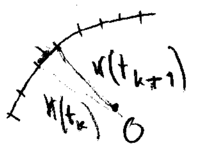
$\mathbf{x}'(t)$ ger tangentvektorn i punkten $\mathbf{x}(t)$

$\mathbf{r} = \mathbf{x} = (x, y, z)$ $\quad [(x,y)]$

t - tiden , $\mathbf{r}'(t)$ hastighet

$\mathbf{r}''(t)$ acceleration

Båglängd



$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$

Båglängden är appr.

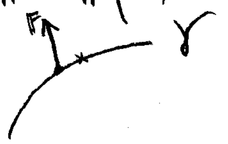
$$\sum_{k=0}^{n-1} |\mathbf{r}(t_{k+1}) - \mathbf{r}(t_k)| \approx \sum_{k=0}^{n-1} |\mathbf{r}'(t_k)| \underbrace{(t_{k+1} - t_k)}_{\Delta t_k}$$

Def Båglängd:

$$\boxed{L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt}$$

Kurvintegraler

Inledande exempel: En partikel rör sig längs en given kurva γ under inverkan av en kraft $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$



På ett litet tidsintervall, Δt, förflyttas partikeln $\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t) \approx \mathbf{r}'(t)\Delta t$

Kraftfältet uträttar då arbetet

$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,\Delta t$

Det totala uträttade arbetet blir då

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

Def Låt $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ [eller $\mathbf{F} = (P, Q)$ i planet] vara ett kontinuerligt vektorfält.

Låt γ vara en orienterad kurva med ekv. $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \xrightarrow{t} b$ där $\mathbf{r}(t)$ är en C^1-funktion

Då definieras kurvintegralen

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b \Big[P(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))\, z'(t)\Big]\, dt$$

Anm $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vilken parameterframställning av γ som väljs

Bevis $t=\varphi(u)$ $\quad a=\varphi(\alpha),\ b=\varphi(\beta),\ \alpha \xrightarrow{u} \beta$

$\varphi'(u)>0$

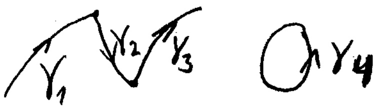
$$\int_\alpha^\beta \mathbb{F}(\mathbf{r}(\varphi(u)))\cdot \frac{d}{du}\mathbf{r}(\varphi(u))\,du = \int_\alpha^\beta \mathbb{F}(\mathbf{r}(\varphi(u)))\cdot\mathbf{r}'(\varphi(u))\varphi'(u)\,du =$$

$$=\begin{bmatrix} t=\varphi(u) \\ dt=\varphi'(u)\,du\end{bmatrix} = \int_a^b \mathbb{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$$

Det går att tillåta avtagande värden på t

$-\gamma:\ \mathbf{r}=\mathbf{r}(t),\quad b \xrightarrow{t} a$

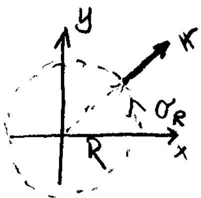
$$\int_{-\gamma}\mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}$$



$\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$

$$\int_\gamma \mathbb{F}\,d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1}\mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}+\dots+\int_{\gamma_4}\mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}$$

Ex Elektriskt fält runt en laddad ledare



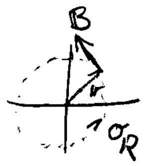
$$\mathbb{E}=\frac{\mathbf{r}}{r^2}=\frac{(x,y)}{x^2+y^2}$$

$\sigma_R:\ \mathbf{r}=R(\cos t,\ \sin t)\quad 0\le t\le 2\pi$

$d\mathbf{r}=(dx,dy)=R(-\sin t,\ \cos t)\,dt=(-y,x)\,dt\ ;\ \int_{\sigma_R}\mathbb{E}\cdot d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}\frac{(x,y)\cdot(-y,x)}{R^2}\,dt=0$

Ex Magnetiskt fält runt en strömgenomfluten ledare (z-axeln)

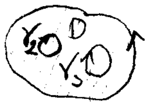
$$B=\frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$$



$$\int_{\sigma_R}\mathbb{B}\cdot d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}\frac{\overbrace{(-y,x)\cdot(-y,x)}^{y^2+x^2=R^2}}{R^2}\,dt=2\pi$$

Greens formel

P och Q är C^1-funktioner i en öppen mängd Ω i planet $D \subseteq \Omega$ är kompakt och randen ∂D är styckvis C^1 och positivt orienterad.



$\partial D = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$

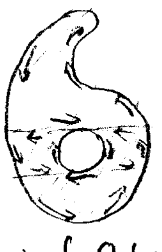
$$\boxed{\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy}$$

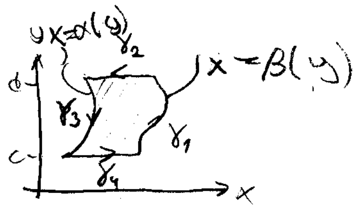
Bevis Vi nöjer oss med områden D som kan delas upp i ett ändligt antal delområden av formen

$E = \{(x,y) : \varphi(x) \leq y \leq \psi(x),\ a \leq x \leq b\}$

Och i ett ändligt antal delområden av formen

$F = \{(x,y) : \alpha(y) \leq x \leq \beta(y),\ c \leq y \leq d\}$





Visa: $\int_{\partial F} Q\,dy = \iint_F \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$

$$\iint_F \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c^d \left\{ \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx \right\} dy = \int_c^d \left[Q(x,y) \right]_{x=\alpha(y)}^{\beta(y)} dy =$$

$$= \int_c^d Q(\beta(y), y)\,dy - \int_c^d Q(\alpha(y), y)\,dy$$

$\gamma_1 : x = \beta(y),\quad c \xrightarrow{y} d \qquad \left.\begin{array}{l}\gamma_2 : \\ \gamma_4 : \end{array}\right\}$ y konst.

$\gamma_3 : x = \alpha(y),\quad d \xrightarrow{y} c$

$$\int_{\gamma_1} Q\,dy = \int_c^d Q(\beta(y), y)\,dy$$

$$\int_{\gamma_3} Q\,dy = \int_d^c Q(\alpha(\alpha), y)\,dy = -\int_c^d Q(\alpha(y), y)\,dy$$

$\int_{\gamma_2} Q\,dy = \int_{\gamma_4} Q\,dy = 0$ ty $dy = 0$ då y konstant

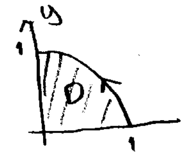
$$\therefore \underline{\iint_F \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy} = \int_{\gamma_1 + \gamma_3} Q\,dy = \underline{\int_{\partial F} Q\,dy}$$

Genom addition av delområden fås att

$\iint_D \frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{\partial D} Q\,dy$

Analogt fås $\boxed{\iint_D -\frac{\partial F}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{\partial D} P\,dx}$ vilket ger satsen

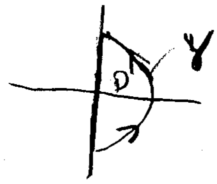
Ex



$$\int_{\partial D} xy\,dx + (x^3+y^2)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3+y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy)\right) dx\,dy =$$

$$= \iint_D (3x^2 - x)\,dx\,dy = \begin{bmatrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ dx\,dy = r\,dr\,d\theta \end{bmatrix} = \dots = \frac{3\pi}{16} - \frac{1}{3}$$

Ex



$\gamma : x = 1 - y^2$

Beräkna $\int_\gamma \underbrace{(xy^2+\sin x)}_{P}\,dx + \underbrace{(1-y-x^2y)}_{Q}\,dy$

Komplettera med σ enligt fig

$\gamma + \sigma$ rand till område D

Green: $\int_{\gamma+\sigma} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D (-2xy - 2xy)\,dx\,dy =$

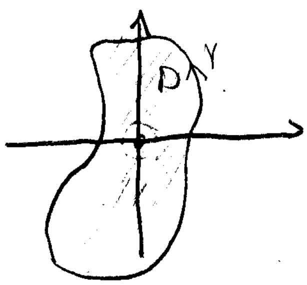
$= -4\iint_D xy\,dx\,dy = -4\cdot\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} xy\,dy\,dx = 0$ (udda integrand i y-led området symmetriskt kring x-axeln)

$\therefore \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = 0 - \int_\sigma P\,dx + Q\,dy =$

$= -\int_1^{-1} Q\,dy = \int_{-1}^{1} (1+y-\underbrace{x^2}_{=0}y)\,dy = \int_{-1}^{1}(1+y)\,dy = \underline{\underline{2}}$

Ex $\mathbb{E} = \frac{(x,y)}{x^2+y^2}$

γ en sluten kurva runt origo



$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ utanför origo

Greens formel kan inte användas på området innanför γ (singularitet i origo!). Låt σ vara en cirkel i origo enligt figur.

$\gamma - \sigma$ är rand till ett område D där vi kan tillämpa Greens formel

$\int_{\gamma-\sigma} \mathbb{E}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \mathbb{E}\,d\mathbf{r} - \int_\sigma \mathbb{E}\,d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$

Enligt tidigare så är $\int_\sigma \mathbb{E}\cdot d\mathbf{r} = 0$

$\therefore \int_\gamma \mathbb{E}\cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \forall$ slutna kurvor γ

föreläsn

Differentialer

$$f(x+h, y+k) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h + \sqrt{h^2+k^2}\,\underbrace{\rho(h,k)}_{\to 0 \;:\; (h,k)\to(0,0)} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)k$$

Def Differentialen av f i punkten (x,y) är funktionen

$$(h,k) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)k$$

skrivs $df(x,y)$ eller df

För funktionen $f(x,y) = x$ gäller $df = 1 \cdot h + 0 \cdot k = h$

Man skriver $dx = h$ analogt $dy = k$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad \Delta f = f(x+h, y+k) - f(x,y) \approx df$$

Om x och y är funktioner av u och v: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ så är å ena sidan $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ och å andra sidan $df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv$

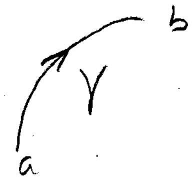
Dessa är lika enligt kedjeregeln

df är <u>oberoende av vilka variabler som f uttrycks i</u>

<u>Räkneregler</u>

$$d(f+g) = df + dg$$
$$d(fg) = f\,dg + g\,df$$

osv (deriveringsregler överförs)



$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$$

Def $\mathbb{F} = (P,Q)$ är ett konservativt fält (eller potentialfält) i ett område Ω om $\mathbb{F} = \nabla U$ för någon C^1-funktion U. U kallas en potential till $\mathbb{F}$.

Om $\mathbb{F}$ är konservativt så kallas differentialformen $P\,dx + Q\,dy$ <u>exakt</u>; det gäller att $dU = P\,dx + Q\,dy$

Sats. Följande villkor är ekvivalenta

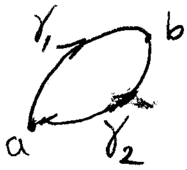
(a) $\mathbb{F} = (P,Q)$ är konservativt

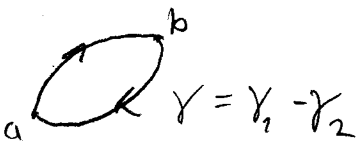
(b) $\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen mellan kurvans ändpunkter

(c) $\oint_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje sluten kurva γ i Ω

Om sant: $\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = U(b) - U(a)$ då U är potential till $\mathbb{F}$ och γ går från a till b

Bevis





(b) $\Rightarrow$ (c) Enligt (b) är $\int_{\gamma_1} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_{\gamma_2} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$.

$$\oint_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_{\gamma_1} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} - \int_{\gamma_2} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = 0$$

(c) $\Rightarrow$ (b) Välj två godtyckliga punkter, a och b, på γ och bilda ~~två~~ delintegraler som måste vara lika.

(a) $\Rightarrow$ (b) $\mathbb{F} = \nabla U$

Låt $\mathbb{r} = \mathbb{r}(t)$, $t_0 \xrightarrow{t} t_1$ vara ekv. för γ där $\mathbb{r}(t_0) = a$ och $\mathbb{r}(t_1) = b$

Då är $\int_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \cdot \mathbb{r}'(t)\, dt =$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial U}{\partial x}(\mathbb{r}(t))x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(\mathbb{r}(t))\, y'(t) \right] dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} U(\mathbb{r}(t))\, dt = \Big[U(\mathbb{r}(t)) \Big]_{t_0}^{t_1} = U(\mathbb{r}(t_1)) - U(\mathbb{r}(t_0)) = \underline{U(b) - U(a)}$$

Man skriver $\int_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_{\gamma} dU = \Big[U(\mathbb{r}) \Big]_a^b = U(b) - U(a)$

Återstår att visa (b) eller (c) $\Rightarrow$ (a)

Antag $\mathbb{F} = (P, Q) = \nabla U \Leftrightarrow$, $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$

Om U är C^2 är

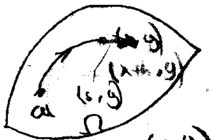
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \text{ och } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$$

Sats (a) Om $\mathbb{F} = (P, Q)$ är konservativt med en C^2-potential U så är $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

(b) Om $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ i ett enkelt sammanhängande område så är $\mathbb{F}$ konservativt i Ω

forts, Bevis

(b) $\Rightarrow$ (a)



Fixera $a \in \Omega$, låt (x,y) vara godtycklig. Låt γ vara en kurva från a till (x,y) och sätt

$$U(x,y) = \int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_a^{(x,y)} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$$

$$U(x+h,y) - U(x,y) = \int_a^{(x+h,y)} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} - \int_a^{(x,y)} \mathbb{F}\, d\mathbb{r} = \int_{(x,y)}^{(x+h,y)} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} =$$

$$= \int_x^{x+h} P(s,y)\,ds = h\,P(x+\theta h, y), \quad 0 \le \theta \le 1$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{U(x+h,y)-U(x,y)}{h} = \lim_{h \to 0} P(x+\theta h, y) = P(x,y)$$

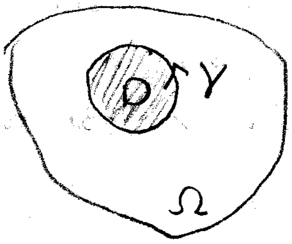
Analogt fås att

$$\lim_{k\to 0} \frac{U(x,y+k)-U(x,y)}{k} = Q(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q$$

QED

Enkelt sammanhängande område



Alla punkter innanför en sluten kurva γ i Ω måste tillhöra Ω (Området får inte ha några hål)

Bevis av $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ i enkelt sammanhängande område $\Omega \Rightarrow \mathbb{F}$ konservativt i Ω

Låt γ vara en enkelt sluten kurva i Ω. Området D innanför γ är då en del av Ω och vi kan använda Greens formel

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \pm \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$$ enligt föregående sats är (P,Q) konservativt.

Ex $\mathbb{F} = (P,Q) = (y^2 + ye^{xy}, 2xy + xe^{xy})$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y + e^{xy} + xye^{xy} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y + e^{xy} + xye^{xy}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{F} \text{ konservativt}$$

$$\exists\, u(x,y): \frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q$$

$$\int (y^2 + ye^{xy})\,dx = y^2x + e^{xy} + g(y)$$

$$\int (2xy + xe^{xy})\,dy = y^2x + e^{xy} + f(x)$$

$g = f =$ konst.

$$u = y^2x + e^{xy}$$

Ofta är det enklare att direkt titta på $P\,dx + Q\,dy$ och försöka skriva det som du

I detta fall $P\,dx + Q\,dy = \underline{y^2\,dx} + ye^{xy}\,dx + \underline{2xy\,dy} + xe^{xy}\,dy =$

$= d(xy^2) + d(e^{xy}) = d(xy^2 + e^{xy}) = du$ med $u = xy^2 + e^{xy}$

Ex $\mathbb{E} = \frac{(x,y)}{x^2+y^2} = (P,Q)$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ $\quad \mathbb{R}^2 \setminus 0$ som inte är enkelt sammanhängande

Trots det är $\int \mathbb{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$ om γ går runt origo, och det finns en potential

$$P\,dx + Q\,dy = \frac{x\,dx}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2} d \ln(x^2+y^2) = d \ln r \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\mathbb{B} = \frac{(-y,x)}{x^2+y^2} = (P,Q)$$

$P_y' = Q_x'$

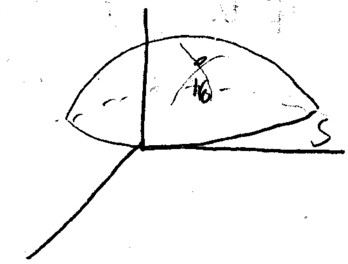
$\int_\gamma \mathbb{B} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ om γ går runt origo

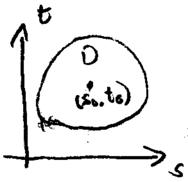
$\mathbb{B} \cdot d\mathbf{r} = d\varphi \qquad \varphi$ polära vinkeln

i områden som inte går runt origo

Föreläsn. 3.1 Ytor

En yta S i parameterform
$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s,t) \qquad (s,t) \in D$





Kurvorna $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s,t_0)$ resp $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s_0,t)$ (s_0 och t_0 fixa) ligger i ytan S. De har tangentvektorerna $\mathbf{r}'_s(s_0,t_0)$ resp. $\mathbf{r}'_t(s_0,t_0)$ i punkten $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0,t_0)$.
De spänner upp ett plan, tangentplanet
Det har normalvektorn $\boxed{\mathbf{n} = \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t}$

Ex en funktionsyta $z = f(x,y)$

$\mathbf{r} = (x, y, f(x,y))$

$\mathbf{r}'_x = (0, 1, f'_x)$

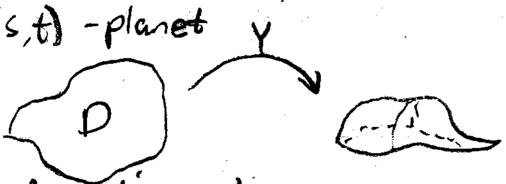
$$\mathbf{n} = \mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = (-f'_x, -f'_y, 1),$$ vilket överensstämmer med tidigare resultat.

JANA

Ytor och ytintegraler
(analogt med kurvor & kurvintegraler)

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ (ex på icke-plan kurva i spiral)
krav: γ kontinuerlig
(Räkna: styckvis C^1)

Ytor: Parametermängd $D \subset \mathbb{R}^2 \quad (s,t) \in D$
(s,t)-planet



kontinuerlig
räkna i styckvis C^1 (vi tillåter kanter)

$$\gamma: \left.\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \\ z = z(s,t) \end{cases}\right\} \mathbf{r} = \mathbf{r}(s,t)$$

$\mathbf{r}$ ortsvektor till en punkt på ytan

Tangentplan till Y?

Behövs: en punkt i planet < två vektorer $\parallel$ planet; $\boxed{\text{normalvektor till planet}}$

$\mathbf{r}=\mathbf{r}(s,t)$, $(s,t)\in D$

P: $\mathbf{r}(s_0,t_0)$

två kurvor: $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s_0,t)$; $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s,t_0)$

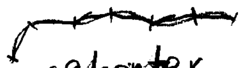
tangentvektorer $\underbrace{\mathbf{r}'_t(s_0,t_0),\ \mathbf{r}'_s(s_0,t_0)}_{\text{tangentvektorer till ytan i } P}$

Om $\mathbf{r}_s \not\parallel \mathbf{r}_p$ så bestämmer de tillsammans med P tangentplanet till Y i punkten P

Normalvektorn till tangentplanet i P = normalvektorn till Y i P: $N=\mathbf{r}_s\times\mathbf{r}_t$

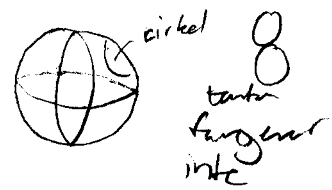
Längd av en kurva: analogt area av en buktig yta

Längd av en kurva

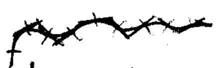


sekanter

$\sum$ sträcklängderna $\overset{\text{medelvärdessatsen}}{=}$ Riemannsumma för en viss integral "$\longrightarrow$" integralen



Annan tanke:



tangenter

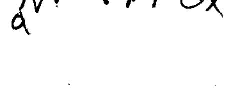
$\sum$ sträcklängder "$\to$" samma integral som för sekanterna

$$l=\int_a^b\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt$$

Om kurva är graf till en funktion (OBS: $\mathbb{R}^2$)

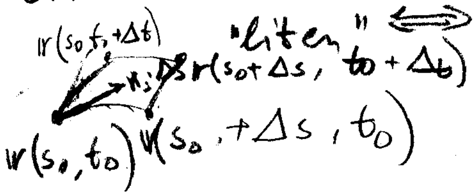
$$l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \qquad x \text{ parameter}$$

Ytor C^1 approximera Y med bitar av tangentplan



Formel för arean av buktig yta

"liten" $\Longleftrightarrow$ Δs, Δt små



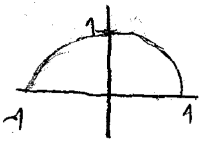
$\mathbf{r}(s,t) \approx \underbrace{\mathbf{r}(s_0,t_0) + \mathbf{r}_s(s_0,t_0)\Delta s + \mathbf{r}_t(s_0,t_0)\Delta t}_{\text{tangentplanet}} + \text{res}\cancel{\text{term}}$

Vi ersätter den buktiga ytbiten med parallellogramme i tangentplanet

arean av den buktiga ytbiten ≈ arean av motsvarande

parallelogram $= |\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t||\Delta s||\Delta t|$

Y:s area $\approx \sum |\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t||\Delta s||\Delta t| = \iint_D |\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t| \, ds\, dt = A$



$\begin{cases} x = x \\ y = \sqrt{1-x^2} \end{cases} \quad x \in [-1,1]$

$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \quad \theta \in [0,\pi]$

Samma kurva, olika funktion ... omparametrisering ger samma kurva

Yta: omparametrisering samma yta (tänk på ytan som ett geometriskt objekt)

Arean är invariant under $\underbrace{\text{omparametrisering}}$

kedjeregel + variabelsubst ; variabelsubst. dubbelvariabel

Ex 4, s.270

$A = \iint_Y dS$ ytintegral

dS areaelementet på ytan

Ytintegraler

$\iint_Y f(P)\, dS =$ $\quad (f \equiv 1:$ arean$)$

$P \in Y$

$\overset{\text{def}}{=} \iint_D f(\mathbf{r}(s,t)) |\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t| \, ds\, dt = \iint_D f(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) |\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t| \, ds\, dt$

Y belagd med massa med densitet f $(f \geq 0)$

$\iint_Y f\, dS =$ den totala massan

$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$? $\quad$ $\mathbf{F}$ vektorvärd funktion (fält)

ex $\quad \mathbf{F}(x,y,z) = (x^2+y, yz, x+yz)$

$\mathbf{N}$ vektor i $\mathbb{R}^3$; normalvektor till Y
?

$\|\mathbf{N}\| = 1$

$\mathbf{N}$:s riktning måste vara given (en av två möjliga)

Omm Y sluten yta: ut/in entydig riktning

ex sfär, utåtriktad normal

ex

snett uppåt

$\mathbb{N} = (\ldots, \ldots, \ldots)$ $\quad \ldots > 0$ $\qquad \mathbb{N} \cdot (0,0,1) > 0$

fysikalisk process
ex flöde

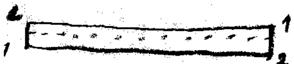
Krav på Y är att ytan är <u>orienterbar</u>, d.v.s man kan välja $\mathbb{N}$:s riktning s.a. $\mathbb{N}$ efter rundvandring pekar åt samma håll

($\mathbb{N}$ är en kontinuerlig funktion)

<u>Ex på orienterbara ytor:</u>
plan, sfär, halvsfär, ...

<u>Ex på icke-orienterbar yta.</u>

Möbiusband förbjudet i sammanhanget



ensidig yta

sammanbind en pappersremsa så att hörnen med samma tal sitter ihop

$$\mathbb{N} = \pm \frac{\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t}{|\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t|}$$

måste vara givet

$$dS = |\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t| \, ds \, dt$$

$$\mathbb{N} dS = \pm \mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t \, ds \, dt$$

I senare kurser:

$$\boxed{\mathbb{N} \cdot dS = d\mathbf{S}}$$

$$\iint_Y \mathbb{F} \cdot \mathbb{N} \, dS = \pm \iint_D \mathbb{F}(\mathbf{r}(s,t)) \cdot (\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t) \, ds$$

Fysikalisk tolkning

$\mathbb{F}$ flöde

Hur mycket rinner genom Y

$$\mathbb{F}_1 = \mathbb{F} \cdot \mathbb{N}$$

$$\iint_Y \mathbb{F} \cdot \mathbb{N} \, dS \; > 0 \Rightarrow \text{totalflöde i } \mathbb{N}\text{:s riktning}$$
$$< 0 \Rightarrow \text{totalflöde mot } \mathbb{N}\text{:s riktning}$$

$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$ Normalt sätt beroende av vägen
Arbetet som kraften $\mathbb{F} = (P, Q)$ uträttar när man följer γ

Undantag: $\int_\gamma$ oberoende av vägen: $\mathbb{F}$ konservativt fält (potentialfält)

$\mathbb{F} = (P, Q)$ Potentialfält: $\exists\, U(x,y) \in C^2(\Omega)$

s.a. $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$

$\mathbb{F} = \text{grad } U = \nabla U$

$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = P\,dx + Q\,dy$

$\int_\gamma dU = U(B) - U(A)$

potentialfält

$\Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$P, Q \in C^1(\Omega)$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$\Rightarrow \exists\, U \in C^2(\Omega) : \frac{\partial U}{\partial x} = P$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$

Ω enkelt sammanhängande.

$\int_\gamma$ oberoende av vägen

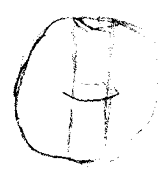
Ω bågvis sammanhängande

Enkelt sammanhängande
$\mathbb{R}^2$: inga hål

Homotopisk ekvivalens (topologi) $\gamma(s,t)$ kont i t, $s \in [a\ b]$ $\forall t$ kurva γ_1 och γ_2 homotopiskt ekvivalent, om $\exists\, \gamma(s,t)$ s.a. $\gamma_1 = \gamma(s, t_1)$ $\gamma_2 = \gamma(s, t_2)$

För den intresserade teknologen.
(Jana svarar på fråga)

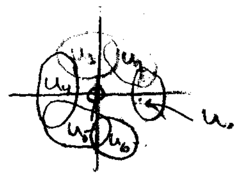
Enkelt samma hängade



inte enkelt sammanhängande

U

$P, Q \in C^1$ utom origo, ej enkelt sammanhängande



$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \not\Rightarrow \exists$ potential

Elektrostatiskt fält $\mathbb{E}$

Magnetiskt fält $\mathbb{M}$

$$xdy + ydx = d(xy)$$

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$$

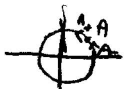
$\mathbb{E}$: $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ $(x,y) \neq (0,0)$

$\boxed{x\,dx = \frac{1}{2}dx^2 = d\frac{x^2}{2}}$ uppsamling

$$P dx + Q dy = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy = \frac{x dx + y dy}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{d\left(\frac{x^2}{2}\right) + d\left(\frac{y^2}{2}\right)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} d \ln(x^2+y^2) =$$

$$= d \ln\sqrt{x^2+y^2} = d \ln r$$



$U(A_+) = U(A_-)$

(endast beroende av r)

Konservativt i hela det punkterade planet

M: $\mathbb{B} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ $(x,y) \neq (0,0)$ $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

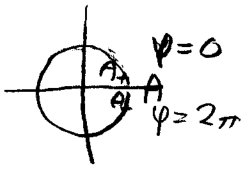
$$P dx + Q dy = \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \frac{\cancel{x^2}\, d\frac{y}{x}}{x^2+y^2} \cdot \frac{\frac{1}{\cancel{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \frac{d\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = d\left(\arctan\frac{y}{x} + C\right)$$

$k\pi$

olika

$$\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = d\varphi$$



$$\int_\gamma d\varphi = 2\pi = 2\pi = \underbrace{\varphi(A_-) - \varphi(A_+)}_{2\pi}$$

lokalt konservativ, ej konservativ i punkterade planet

$$\int_\gamma d\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\ln r + i\varphi = \ln\left(re^{i\varphi}\right)$$

Låt Y vara en funktionsyta, dvs $Y: z = f(x,y), (x,y) \in D$ (parametrisering med x, y som parametrar)

$r = (x, y, f(x,y))$

$r_x = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$

$r_y = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$$r_x \times r_y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}; -\frac{\partial f}{\partial y}; 1\right)$$ snett uppåt

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

$$N dS = (\pm)\left(-\frac{\partial f}{\partial x}; -\frac{\partial f}{\partial y}; 1\right) dxdy$$

Ex Sfär: $x^2+y^2+z^2=a^2$

1) parametrisering med rymdpolära koordinater

2) $z = \pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ två grafer

3) annat sätt att få N

$x^2+y^2+z^2=a^2$ är nivåyta till

$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$\underbrace{\text{grad } F}_{(2x,\,2y,\,2z)} \perp$ nivåytorna

$(2x, 2y, 2z)$ normalvektor

enhetsnormal $\pm\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right)$

$F(x,y,z)=C$ ∇F normalvektor om $\neq 0$

Definition av divergens

def $\mathbb{F}$ vektorfält

$\mathbb{F}(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3) \in C^1$

$$\underbrace{\operatorname{div} \mathbb{F}}_{\text{vektor-funktion}} = \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}}_{\text{skalär}}$$

Stokes sats (abstrakt)

$$\int_{\partial\gamma} \omega = \int_{\gamma} d\omega$$

$\partial\gamma$ randen till γ

ω någon typ av funktion

$d\omega$ någon typ av derivata till ω

Ex: $\int_{[a,b]} f'(x)dx = f(b)-f(a)$ $\quad \partial[a,b] = \{a, b\}$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$$

Gauss divergenssats

$\mathbb{F} \in C^1(\Omega)$, K kompakt $\subset \Omega$ öppen

$Y \in C^1$ (styckvis), $Y = \partial K$

N enhetsnormalen ut från K

$$\Rightarrow \iint_Y \mathbb{F}\cdot N\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\mathbb{F}\,dx\,dy\,dz$$

Bevis Ytterligare förutsättningar:

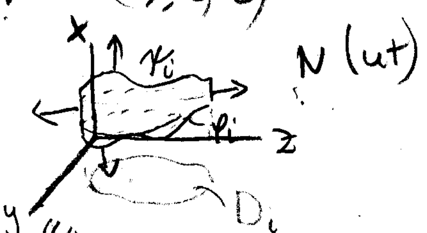
K kan delas in i bitar, som, i alla tre variablerna, framställs på följande sätt:

$K_i: \begin{cases} \varphi_i(y,z) \le x \le \psi_i(y,z) \\ (y,z) \in D_i \end{cases}$

$\mathbb{F} = (F_1, F_2, F_3) = \boxed{(F_1, 0, 0)} + (0, F_2, 0) + (0, 0, F_3)$

Bevis för vektorfält av typen $(F_1, 0, 0)$!

$$? \iint_{Y_i} (F_1, 0, 0)\cdot N\,dS = \iiint_{K_i} \frac{\partial F_1}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$$



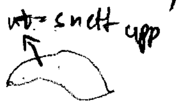
$Y_i = \partial K_i$

$$\text{HL: } \iiint_{K_1} \frac{\partial F_1}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint_{D_i}\left[\int_{\varphi_i(y,z)}^{\psi_i(y,z)} \frac{\partial F_1}{\partial x}\,dx\right] dy\,dz = \iint_{D_i} \big(F_1(\psi_i(y,z), y, z) -$$

$$F_1(\varphi_i(y,z), y, z)\big)\,dy\,dz$$

VL: $\iint_{Y_i} (F_1, 0, 0) \cdot N \, dS = \iint_{x=\psi_i} + \iint_{x=\varphi_i} + \iint_{\substack{\text{vertikala} \\ \text{sidorna}}}$

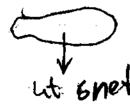
lock: $\iint_{x=\psi_i(y,z)} (F_1, 0, 0) \cdot N \, dS = I_{lock}$



$N\,dS = \left(1, -\frac{\partial \psi_i}{\partial y}, -\frac{\partial \psi_i}{\partial z}\right) dy\,dz$

$I_{lock} = \iint_{D_i} F_1(\underset{\overset{\shortparallel}{x}}{\psi_i(y,z)}, y, z)\, dy\,dz$

botten: $\iint_{x=\varphi_i(y,z)} (F_1, 0, 0) \cdot N \, dS = I_{botten}$



$N\,dS = \left(-1, \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\right) dy\,dz$

$I_{botten} = \iint_{D_i} F_1(\varphi_i(y,z), y, z)\, dy\,dz$

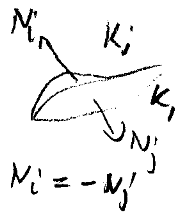
vertikala sidor:

$$N \perp (F_1, 0, 0) \iff N \cdot dS = 0$$

$\Rightarrow \iint_{Y_i} (F_1, 0, 0) \cdot N \, dS = \iiint_{K_i} \frac{\partial F}{\partial x} \, dx\,dy\,dz$

$K = \bigcup_{i=1}^{m} K_i \quad K_i \cap K_j$ ha mått noll

$\Rightarrow \iiint_K = \sum_{i=1}^{m} \iiint_{K_i}$



$\sum_{i=1}^{m} \iint_{Y_i} = \iint_{Y} + \overbrace{\sum \left(\iint_{Y_k} - \iint_{Y_k}\right)}^{0}$

analogt i de andra riktningarna

$\Rightarrow \iint_{\partial K = Y} \mathbb{F} \cdot \mathbb{N} \, dS = \iiint \operatorname{div} \mathbb{F} \, dx\,dy\,dz$

Nablaräkning (del-operatorn)

f skalär funktion

$\nabla f = \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f$

Formalism $\overset{\text{"nabla"}}{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ operator

$\nabla f = \nabla$ "gånger skalären f"

$\operatorname{div} \mathbb{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} F_1 + \frac{\partial}{\partial y} F_2 + \frac{\partial}{\partial z} F_3 = \nabla \overset{\text{formellt}}{\cdot} \mathbb{F}$

rotation $\mathbb{F}$ vektorfält $\quad \text{rot } \mathbb{F} = \text{curl } \mathbb{F}$ också en vektor

def $\mathbb{F} \in C^1$ $\quad \mathbb{F} = (F_1, F_2, F_3) \quad \text{rot } \mathbb{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}; \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}; \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$

Formellt! rot $\mathbb{F} = \nabla \times \mathbb{F}$

$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$ "Sätt att komma ihåg"

Nablaräkning

formalism (används ej i strikta bevis)

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f$$

$$\text{div } \mathbb{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \quad \underset{\text{formellt}}{=} \nabla \cdot \mathbb{F}$$

$$\text{rot } \mathbb{F} = (\dots, \dots, \dots) = \nabla \times \mathbb{F} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \leftarrow \boxed{\text{mycket formell determinant endast minneshjälp}}$$

$\text{rot}(\cancel{\text{div } u})$ skalär, $\text{div}(\text{rot } \mathbb{u})$, $\text{rot}(\text{grad } u)$, $\text{grad}(\text{div } \mathbb{u})$, $\text{div}(\text{grad } u)$, $\cancel{\text{grad}(\text{rot } u)}$ vektor

$\mathbb{u}$ vektorfält, u skalär funktion

$$\text{div}(\text{grad } f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \underset{(\nabla \cdot \nabla)}{\nabla^2 f} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \boxed{\text{gissning}}$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Bevis

$$\text{div}(\text{grad } f) = \text{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{Laplace operator}$$

$$\text{div}(\text{rot } \mathbb{F}) = \nabla \cdot \underbrace{(\nabla \times \mathbb{F})}_{\perp \nabla} = 0 \quad \text{gissning}$$

Bevis

$$\text{div}(\text{rot } \mathbb{F}) = \text{div}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y}} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial x} + \cancel{\frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z}} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} + \cancel{\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z}} = 0$$

Gauss sats $\quad \mathbb{F} \in C^1(\Omega)$, Ω öppet

K kompakt $\subset \Omega$

$Y = \partial K$, $Y \in C^1$ (åtminstone styckvis)

N utåtriktade enhetsnormalen till Y

$$\Rightarrow \iint_Y \mathbb{F} \cdot N \, dS = \iiint_K \text{div } \mathbb{F} \, dx\,dy\,dz$$

Exempel Elektrostatiska fältet (punktladdning i origo)

$\mathbb{R}^3$: $\quad \mathbb{F} = \frac{\mathbb{r}}{|\mathbb{r}|^3} \qquad |\mathbb{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\left(\mathbb{R}^2: \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} = \frac{r}{|r|^2} dr\right)$$

$$\text{div } \mathbb{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{|\mathbb{r}|^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{|\mathbb{r}|^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{|\mathbb{r}|^3}\right) = \frac{1}{|\mathbb{r}|^3} - \frac{3x}{|\mathbb{r}|^4} \cdot \frac{\partial |\mathbb{r}|}{\partial x} +$$

$$+ \frac{1}{|\mathbb{r}|^3} - \frac{3y}{|\mathbb{r}|^4} \cdot \frac{\partial |\mathbb{r}|}{\partial y} + \frac{1}{|\mathbb{r}|^3} - \frac{3z}{|\mathbb{r}|^4} \cdot \frac{\partial |\mathbb{r}|}{\partial z} =$$

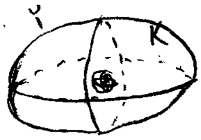
$$= \frac{3|\mathbf{r}| - 3\left(x\frac{\partial|\mathbf{r}|}{\partial x} + y\frac{\partial|\mathbf{r}|}{\partial y} + z\frac{\partial|\mathbf{r}|}{\partial z}\right)}{|\mathbf{r}|^4} = \frac{3|\mathbf{r}| - 3\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{|\mathbf{r}|}\right)}{|\mathbf{r}|^4} =$$

$$= \frac{3|\mathbf{r}| - 3|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|^4} = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial|\mathbf{r}|}{\partial x} = \frac{x}{|\mathbf{r}|}}$$

Beräkna $\iint_Y \mathbb{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ $\quad Y: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$

ellipsoidyta

Gauss sats kan inte användas, ty $\mathbb{F}\notin C^1(K)$ $K \ni$ origo



K: den solida ellipsoiden $\qquad$ $\mathbb{F}$ singulärt i origo

Y: ellipsoidytan

$K_\varepsilon : K \setminus \{(x,y,z) : |\mathbf{r}| < \varepsilon$

$\mathbb{F} \in C^1(\Omega), \Omega \supset K_\varepsilon$

$\partial K_\varepsilon \quad Y \cup \underbrace{\{(x,y,z) : |\mathbf{r}| = \varepsilon\}}_{S_\varepsilon}$

Gauss sats:

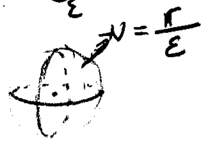
$$\iint_{Y \cup S_\varepsilon} \mathbb{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_{K_\varepsilon} 0\,dx\,dy\,dz = 0$$

N på S_ε ut från K_ε = in mot origo

$$0 = \iint_{Y\cup S_\varepsilon} \mathbb{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_Y \mathbb{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_{S_\varepsilon} \mathbb{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

$$\Rightarrow \iint_Y \mathbb{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{S_\varepsilon} \mathbb{F}\cdot\underbrace{(-\mathbf{N})}_{\text{bort från origo}}\,dS = I$$

$$I = \iint_{S_\varepsilon} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\cdot(-\mathbf{N})\,dS = \frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{S_\varepsilon} \mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{r}}{\varepsilon}\,dS = \frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{S_\varepsilon} \frac{|\mathbf{r}|^2}{\varepsilon}\,dS = \frac{1}{\varepsilon^2}\underbrace{\iint_{S_\varepsilon} dS}_{=4\pi\varepsilon^2} = 4\pi$$



$\operatorname{div} \mathbb{F} = ?$

kontinuerlig

$$\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iiint_{B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)} \operatorname{div} \mathbb{F}(\mathbf{x}) \underbrace{dx_1\,dx_2\,dx_3}_{d\mathbf{x}} = \frac{1}{\cancel{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}} \operatorname{div} \mathbb{F}(\xi_\varepsilon) \cancel{\iiint_{B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)} d\mathbf{x}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \operatorname{div} \mathbb{F}(\mathbf{x}_0)$$

$$|\xi_\varepsilon - \mathbf{x}_0| < \varepsilon$$

B_ε = bollen med radie ε
S_ε = sfären med radie ε

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iint_{S_\varepsilon(\mathbf{x}_0)} \mathbb{F}\cdot \mathbb{N}\,dS \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \operatorname{div} \mathbb{F}(\mathbf{x}_0)$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \mathbb{F}(\mathbf{x}_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iint_{S_\varepsilon(\mathbf{x}_0)} \mathbb{F}\cdot \mathbb{N}\,dS$$

koordinatoberoende framställning

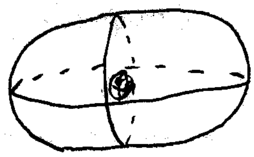
flödet ut genom $S_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$

$\underline{\text{def}}$ $\quad \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$

$\Rightarrow \operatorname{div} \mathbb{F}(\mathbf{x}_0)$ kan tolkas som det som flyter ut ur $\mathbf{x}_0$ / per tidsenhet och volymsenhet

---

$$\underbrace{\iint_{\partial K} F\cdot N\,dS}_{\text{Flödet ut genom randen till } K} = \underbrace{\iiint_K \operatorname{div} \mathbb{F}\,dx\,dy\,dz}_{\text{Sammanlagd produktion i } K}$$



$\operatorname{div} \mathbb{F} = 0$ utanför origo
$\frac{r}{|r|^3}$ källfritt utanför origo

$\iint_Y = \iint_{S_\varepsilon}$ ty ingen produktion mellan dem.

Strokes sats

Green: $\iint_D$ ytintegral ytor bild av xy-plan

Y kurva i rummet

$$\int_\gamma F\cdot dr \overset{?}{=} \iint_Y \operatorname{rot} F \cdot \mathbb{N}\,dS$$

$\gamma = \partial y$

Greens sats

$$\int_\gamma P\cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Gauss $\iint_Y F\cdot N\,dS = \iiint_K \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz$

Y yta i $\mathbb{R}^3$, parametriserad mha $(s,t) \in D \subset \mathbb{R}^2_{s,t}$

rand mängdteoretisk (topologisk) rand

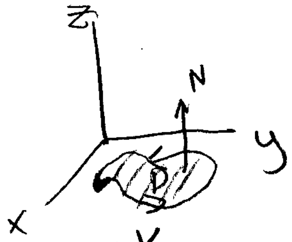
Y halvsfär $\quad \partial_{top} Y = Y$

rand i mångfaldsmening

mångfaldsranden ∂Y

$\mapsto$ bilden av ∂D under parametriseringen

Orientering



$N \times T$ ska peka mot Y

samorientering:

orienterat ytstycke med orienterad rand

Strokes sats

$\mathbb{F} \in C^1(\Omega)$ Ω öppet

Y orienterat ytstycke, med orienterad rand

$Y \in C^1$ (åtminstone styckvis)

Y kompakt $\subset \Omega$, ∂Y mångfaldsranden till Y

$$\Rightarrow \int_{\partial Y} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y \operatorname{rot} \mathbb{F} \cdot \mathbb{N} \, dS$$

$\gamma = \partial Y$ kan vara rand för olika ytbitar

Här följer en svartvit version av (2) i beviset av Stokes sats, på nästa sida:

2) Y kan delas in i bitar som är funktionsgrafer

$\partial Y_2 = \partial Y \cup \gamma_{fylld}$

$\partial Y_1 = \gamma_{öppen} = -\gamma_{fylld}$

$$\int_{\partial Y_1} + \int_{\partial Y_2} = \int_{-\gamma_{fylld}} + \int_{\partial Y} + \int_{\gamma_{fylld}}$$

$\Rightarrow$ satsen kan visas för en del av funktionsytan, och sedan visas för hela ytan genom summering

---

337. boken fel extra förutsättn.

Stokes sats

$\mathbb{F} \in C^1(\Omega)$, Ω öppen $\subset \mathbb{R}^3$

Y ytstycke (kompakt) $Y \in C^1$ (styckvis)

Y, ∂Y samorienterade (orienterat ytstycke med orienterad rand)

$$\Rightarrow \int_{\partial Y} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y \operatorname{rot} \mathbb{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$

Bevis Ytterligare förutsättningar:

1) $Y \in C^2$ (styckvis)
2) Y kan delas in i bitar som är funktions-grafer

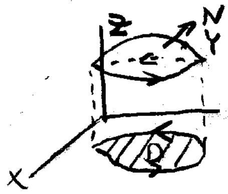
se föregående sida för svartvit version

$$\partial Y_2 = \partial Y \cup \gamma_{blå}$$
$$\partial Y_1 = \gamma_{grå} = -\gamma_{blå}$$

$$\int_{\partial Y_1} + \int_{\partial Y_2} = \cancel{\int_{-\gamma_{blå}}} + \int_{\partial Y} + \cancel{\int_{\gamma_{blå}}}$$

$\Rightarrow$ Vi kan visa satsen för en bit funktionsyta, och sedan summera över alla sådana bitar

Y funktionsyta $z = f(x,y)$, $f \in C^2$ (fel i boken)



Y: $z = f(x,y)$ $(x,y) \in D$

Välj N snett uppåtriktad

$\Rightarrow \partial Y$:s riktning är nu också bestämd

$\Rightarrow \partial D$ får moturs riktning

På Y: och på ∂Y $z = f(x,y) \Rightarrow dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

$$I = \int_{\partial Y} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial D} F_1(x,y,f(x,y))dx + F_2(x,y,f(x,y))dy + F_3(x,y,f(x,y))\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)$$

$$I = \int_{\partial D} \underbrace{\left(F_1(x,y,f(x,y)) + F_3(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}\right)}_{P}dx + \underbrace{\left(F_2(x,y,f(x,y)) + F_3(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{Q}dy = \left[\begin{array}{l}\text{Greens sats}\\ \text{(rätt ri på } \partial D)\end{array}\right] =$$

$$= \iint_D \left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}}\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \cancel{F_3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}\right) - \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}}\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \cancel{F_3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}\right)\right]dx\,dy =$$

$$= \iint \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx\,dy$$

HL: $I_2 = \iint_Y \operatorname{rot} \mathbb{F} \cdot \mathbb{N}\, dS$

$$\operatorname{rot} \mathbb{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$\mathbb{N}: \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$ snett uppåt

$\mathbb{N}\, dS = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) dx\, dy$

$$I_2 = \iint_D \operatorname{rot} \mathbb{F}\Big|_{z=f(x,y)} \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) dx\, dy =$$

$$= \iint_D \left(\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy$$

$$\text{VL: } I = \iint_D \left(\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy$$

$$I = I_2 \Rightarrow \int_{\partial Y} \mathbb{F} \cdot dr = \iint_Y \operatorname{rot} \mathbb{F} \cdot \mathbb{N}\, dS$$

Summera $\Rightarrow$ Strokes sats för hela Y, hela ∂Y

Y_ε: en cirkelskiva med radie ε

Medelvärdessatsen för integraler:

$$\operatorname{rot} \mathbb{F} \cdot \mathbb{N}(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{\partial Y_\varepsilon} \mathbb{F} \cdot dr$$

---

topologisk rand

stär $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

top. rand = stären

Varje omgivning till en punkt på stären innehåller de's punkter från stära och utan för

mångfaldsrand : $\emptyset$

$x = \cos\varphi \sin\theta$

$y = \sin\varphi \cos\theta$

$z = \cos\theta$

$$D: \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$ periodicitet

$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ $\quad$ a, b funktioner

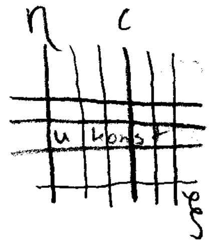
byt variabler

ξ, η

$\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \quad \left(\begin{array}{c} u = \text{const.} \\ \text{m.a.p } \xi \end{array}\right)$

Hur hittar man en ny variabel ξ s.a. u=konst m.a.p den?

$\xi = C$



$\eta = C$ $\quad$ $u(\xi,\eta)\Big|_{\eta = C}$ $\quad$ $\xi = \xi(x,y)$

$\eta = \eta(x,y)$

η = konst

$\eta(x,y)$ = **konst** kurva i xy-plan

Vi letar efter kurvor i xy-planet med egenskapen att $u \equiv$ konst längs kurvorna

Kurva i xy-planet: $\gamma: \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right.$ $\quad t \in [\alpha, \beta]$

u konstant på γ

$\Leftrightarrow u(x(t), y(t))$ = konst map t

$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{d}{dt} u(x(t), y(t))}$ $= 0$

$\frac{\partial u}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\dot{y}(t) = 0$

$\Rightarrow (a, b) \parallel (\dot{x}, \dot{y})$

$\exists \lambda : \dot{x}\ \lambda a, \quad \dot{y} = \lambda b$

$\frac{dx}{dt} = \lambda a(x, y(u)), \quad \frac{dy}{dt} = \lambda b(x, y)$

$\frac{dx}{a(x,y)} = \cancel{\lambda dt} = \frac{dy}{b(x,y)}$

$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}$ lösningarna ger kurvorna $\eta = C$

Detta kallas **Karakteristiska systemet** för PDE:n

Kurvorna längs vilka u=konst **kallas** **karakteristikor**

Koordinatsystem av sådana kurvor

$\exists$ koordinat kurva genom varje punkt

$\Leftrightarrow \exists$ lösning till ODE med givna begynnelsevillkor

Koordinat**kurvorna** får inte skära $\Leftrightarrow$ lösningen måste vara entydig

II. 42 Lös

$$x^3 \frac{\partial F}{\partial x} + (4\ln x - 2x^2y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$a(x,y) = x^3$

$b(x,y) = 4\ln x - 2x^2y$

Kar. system

$$\frac{dx}{x^3} = \frac{dy}{4\ln x - 2x^2y}$$

$4\ln x - 2x^2y = x^3\frac{dy}{dx}$ Linjär första ordn.

$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 4\frac{\ln x}{x^3}$ integrerande faktor $e^{\int\frac{2}{x}dx} = e^{\ln x^2} = x^2$

$(x^2y)'_x = 4\frac{\ln x}{x}$

$x^2y = 4\int \ln x \cdot \frac{1}{x} = 4\frac{\ln^2 x}{2} + C = 2\ln^2 x + C$

$\underbrace{x^2y - 2\ln^2 x}_{u(x,y) = x^2y - 2\ln^2 x} = C$ lösningarna

$v(x,y) = x$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \left(2xy - 4\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = x^2\frac{\partial F}{\partial u}$$ $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$

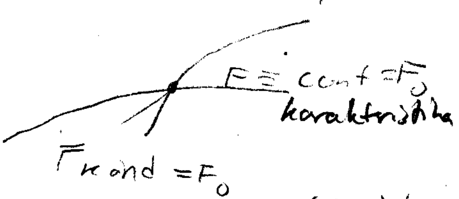
$$\cancel{(2x^4y - 4x^2\ln x)\frac{\partial F}{\partial u}} + x^3\frac{\partial F}{\partial v} + \cancel{(4\ln x - 2x^2y)x^2\frac{\partial F}{\partial u}} = 0$$

$\frac{\partial F}{\partial v} = 0$ F oberoende av $v \Rightarrow F = \varphi(u)$

$F(x,y) = \varphi(x^2y - 2\ln^2 x)$

Begynnelsevilkor: Grafen till lösn. ska gå genom kurvan

$F(e,y) = e^y$



går inte om kurvan själv är karakteristika

$F(x,y) = \varphi(x^2y - 2\ln^2 x) = e^y$

$\varphi(\underbrace{e^2y - 2}_{=s}) = e^y$

$e^2y = s + 2$ $y = \frac{s+2}{e^2}$

$\varphi(s) = e^{(s+2)/e^2}$

$$F(x,y) = e^{(x^2y - 2\ln^2 x + 2)/e^2}$$

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = \begin{cases} 0 \\ f \end{cases}$$

a, b, f beroende av x, y, eventuellt u självt
krasilinjär ekvation (linjär map derivatorna av högst förekommande ordning)

Linjärt fall:

Hitta en kurva: lösningen är konstant längs kurvar (Variabelsubstitution: en av derivatorna försvinner)

$u(x(t), y(t))$ lösningen längs kurvan

$\frac{d}{dt}(u(x(t), y(t))=0$ (om lösningen konst längs kurvan)

$$\frac{\partial u}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\dot{y}=0$$

Ekvation (homogen)

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

Välj $(\dot{x}, \dot{y}) \parallel (a, b)$

$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}$ Karakteristiska systemet

En kurva, längs vilken $\underline{u}$=konstant kallas karakteristika

Begynnelsevillkor längs γ (ej karakteristika)

Ex II.44 $y>0$ $f=?$: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} - 2xy\frac{\partial f}{\partial y} = ye^{x^2} \\ f(1,y) = 1+\ln y \end{cases}$

<u>Kar ekv.</u> $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2x}$

$$\int -2x\,dx = \int\frac{dy}{y}$$

$$-x^2 = \ln y + C$$

$\boxed{x^2+\ln y = C}$ karakteristikorna

Variabelsubst: $\begin{cases} u = x^2+\ln y \\ v = x \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{1}{y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 0$$

$$\cancel{2x\frac{\partial f}{\partial u}} + \frac{\partial f}{\partial v} \cancel{- 2xy\cdot\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial u}} = ye^{x^2}, \quad \begin{matrix} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{matrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = e^u \quad \Big|\int\ldots dv$$

$$f = e^u\cdot v + \varphi(u)$$

$f(x,y) = xye^{x^2} + \varphi(x^2+\ln y)$ den allmänna lösningen

Begynnelsevillkoret:

$f(1,y) = ye + \varphi(\underbrace{1+\ln y}_{=s}) = 1+\ln y$

$1+\ln y = s$

$y = e^{s-1}$ $\quad e \cdot e^{s-1} \cdot \varphi(s) = s$

$\varphi(s) = s - e^{s}$

$\Rightarrow$ lösningen till begynnelsevärdesproblemet är

$$f(x,y) = xye^{x^2} + \underbrace{(x^2+\ln y) - e^{x^2+\ln y}}_{=\varphi(x^2+\ln y)} =$$

$$= \underline{xye^{x^2} + x^2 + \ln y - ye^{x^2}}$$

Viftande:

$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{b}$ $\quad (\dot{x},\dot{y}) \parallel (a,b)$

$\quad (\dot{x},\dot{y}) \parallel (0,b)$

$dx = 0$

$x = \text{konst} \leftarrow \dot{x} = 0$

$\boxed{x = c}$ karakteristikor

Inversa och implicita funktioner

$f \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad , f \in C^1$

$? \; \exists f^{-1}$

Om ja, $? \; f^{-1} \in C^1$

Om ja hur beräknas f^{-1}:s derivata?

$f(f^{-1}(y)) = id(y) = y$

$\underbrace{Df}_{\text{matris}} \cdot D(f^{-1}) = D(id) = I$

$D(f^{-1}) = (Df)^{-1}$

$\det D(f^{-1}) = \frac{1}{\det Df}$

Nödvändigt villkor: Df inverterbar $\Leftrightarrow \det Df \neq 0$

Inversa funktionssatsen

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n , \; f \in C^1$

$\det Df(a) \neq 0$

$\Rightarrow \exists$ öppna omgivningar U till a och V till $f(a)$

så $f : U \to V$ är inverterbar

och $f^{-1} : V \to U$ är i $C^1(V)$ och $D(f^{-1}) = (Df)^{-1}$

"Bevis"

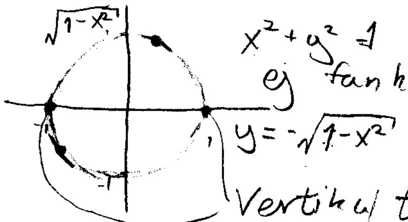
$y = f(x) \approx f(a) + (Df)(a)(x-a)$

$Df(a)(x-a) \approx y - f(a)$

$x \approx a + (Df(a))^{-1}(y - f(a))$

$f^{-1}(y) \approx f^{-1}(\underbrace{f(a)}_{y_0}) + \underbrace{(Df(a))^{-1}}_{=D(f^{-1})(y_0)}(y - \underbrace{f(a)}_{y_0})$

Implicita funktioner



$x^2+y^2=1$

ej funktionsgraf

Vertikal tangent ⇒ inte möjligt att skapa funktionsgraf nära punkten

$x^2+y^2(x)=1 \quad \Big| \frac{d}{dx}$

$2x + 2y \cdot y' = 0$

$y' = -\frac{x}{y}$ ∀ punkter där $y \neq 0$

$\frac{\partial}{\partial x}\Big|_y \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \frac{\partial r}{\partial x}\Big|_y, \ \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|_y = ?$

$\begin{cases} 1 = \frac{\partial r}{\partial x}\cos\varphi - r\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ 0 = \frac{\partial r}{\partial x}\sin\varphi + r\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} \end{cases}$

LES m.a.p. $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial x}$

Lös ...

$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$

Villkor för existens och deriverbarhet av implicit funktion

$F(x,y)=0$

villkor: $F'_y(a,b) \neq 0$

Implicita funktionssatsen Givet är kurvan $F(x,y)=0$

$(a,b) \in$ kurvan, d.v.s $F(a,b)=0$; $F \in C^1$

$F'_y(a,b) \neq 0$

$\Rightarrow y = f(x)$ i en omgivning till (a,b)

$f \in C^1 \quad f: \ f(a)=b$

$F(x, f(x)) \equiv 0$, nära a

Om $y = f(x)$

$F(x, f(x)) \equiv 0 \quad | \frac{d}{dx}$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot f'(x) = 0$$

$$f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

$\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ i omgivning till (a, b)

---

grad $F \neq 0$

$\Rightarrow$ antingen $y = f(x)$

eller $x = g(y)$

Optimering

Största/minsta värde till en funktion?

Sats $f: D \to \mathbb{R}$, D kompakt

f kontinuerlig på D

$\Rightarrow f$ antar både största och minsta värde på D

$f: D \to \mathbb{R}$

Hur hittar vi max/min f på D?

Om D är kompakt vet vi att de finns

Om inte: Vi måste först visa att de finns/inte finns

Existensen är klarad

punkterna i vilka f har max/min (globalt på D) måste tillhöra en av tre kategorier:

1) stationära punkter ($f' = 0$)

2) randen ($^{max}/_{min}$)

3) singulära punkter ($\nexists f'$), ex $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ origo singulär

$f(0,0) = 0 = \min_{\mathbb{R}^2} f$

randen $D \subset \mathbb{R}^n$

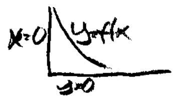
$\Rightarrow \underset{\text{yta}}{\partial D} \subset \mathbb{R}^n$ ∂D egentliga dimension $n-1$

Max/min f på randen?

1 Lös ut en variabel (bitvis)

sätt in och lös max/min problem i lägre dimension.

rektangel, cirkel i polära koordinater



2) $\mathbb{R}^2$, randen har ekv $g(x,y)=0$ (model: $x^2+y^2-1=0$)

$\max/\min f(x,y)$ förutsatt att $g(x,y)=0$ bivillkor

Optimering med bivillkor

Sats $f \in C^1$, $g \in C^1$
f har största eller minsta värde i en punkt (a,b), ligger på kurvan $g(x,y)=0$; $\operatorname{grad} g(a,b) \neq 0$

Då: $\operatorname{grad} f(a,b) \parallel \operatorname{grad} g(a,b)$

Användning: $\left| \begin{array}{l} \nabla f = \lambda \nabla g(a,b) \\ g(a,b)=0 \end{array} \right.$

tre ekv. tre obekanta, lösningar

$(a_1, b_1) \ldots (a_p, b_p)$ jämför f:s värden i de punkterna

---

Sats $f \in C^1$, $g \in C^1$ (i ett öppet område)

Om (x_0, y_0) är en punkt i vilken f har största/minsta värde på kurvan $g(x,y)=0$, så är $\nabla f(x_0,y_0)$ och $\nabla g(x_0,y_0)$ linjärt beroende.

Bevis (1) $\nabla g(x_0,y_0)=0$, nollvektorn LB med vilka andra vektorer som helst $\Rightarrow$ klart

(2) $\nabla g(x_0,y_0) \neq 0$

antingen $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0$ eller $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ enl. implicita funktionssatsen är $x = x(y)$ eller $y = y(x)$ i närheten av (x_0, y_0)

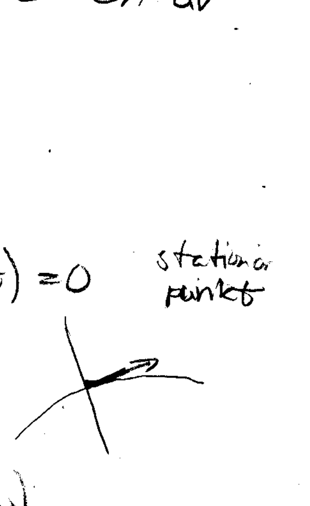
$\left| \begin{array}{l} x = x(y) \\ y = y \end{array} \right.$ eller $\left| \begin{array}{l} x = x \\ y = y(x) \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ kurvan kan parametriseras i närheten av (x_0,y_0) med en C^1-parametrisering

$\left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right.$ $t \in$ intervall

$\max/\min \; f = f(x(t), y(t))$, $t \in I$

$\frac{d}{dt}\left(f(x(t), y(t))\right) \overset{\text{kedjeregeln}}{=} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \dot{y}(t) = 0$ stationär punkt



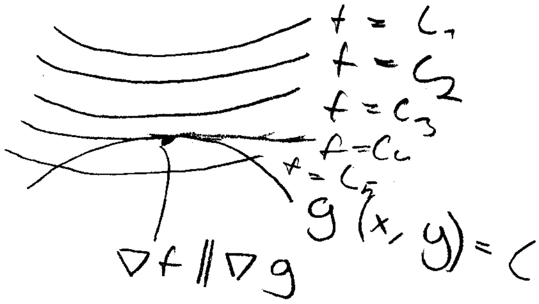
$\nabla f \cdot \underbrace{(\dot{x}, \dot{y})}_{\text{tangentvektor},\ t=t_0} = 0$

$\Rightarrow \nabla f \perp$ tangentvektorn $(\dot{x}, \dot{y})$ i (x_0, y_0)

kurvorna nivåkurva för g
$\Rightarrow \nabla g \perp$ tangentvektorn $\Rightarrow \nabla f \parallel \nabla g \Rightarrow \nabla f$ och ∇g LB

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = c \end{cases}$$

(x_0, y_0, λ_0), ev flera ? max/min
(om kurvan är kompakt så $\exists$ max/min, hittas genom att jämföra)

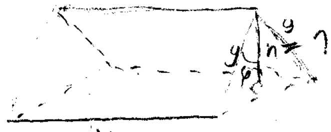


$c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < \ldots$

$\phi(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$
$(g(x,y) = 0)$

På kurvan $g = 0$;
$f = \phi$
Vi letar efter punkter där $\nabla \phi = 0$ dvs
äkta stationära punkter till ϕ

4.29 utan Beta



volym $2V = g$ bivillkor

minimal area

$$S = 2xy + y^2 \sin 2\varphi = f(x, y, \varphi)$$

$$V = \frac{1}{2} y^2 \sin 2\varphi \cdot x \qquad g(x,y,\varphi) = xy^2 \sin 2\varphi = C_{\cdot} = 2V$$

$$\phi(x, y, \varphi) = f(x,y,\varphi) - \lambda(g(x,y,\varphi) - 2V)$$

"Äkta stationära punkter till ϕ"?

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 2y - \lambda y^2 \sin 2\varphi = 0 & ① \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 2x + 2y \sin 2\varphi - \lambda 2xy \sin 2\varphi = 0 & ② \\ \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = 2y^2 \cos 2\varphi - \lambda 2xy^2 \cos 2\varphi = 0 & ③ \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = \underbrace{g(x,y,\varphi) - 2V}_{\text{bivillkoret}} = 0 & ④ \end{cases}$$

③ $2y^2 \cos 2\varphi (1 - \lambda x) = 0$

$y \neq 0$ ty annars $V = 0$ >!<

$\cos 2\varphi = 0$, $0 < 2\varphi < \pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

$x = \frac{1}{\lambda}$

$\varphi = \frac{\pi}{4}$: $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ $2y - \lambda y^2 = 0$

$y(2 - \lambda y) = 0$

$y \neq 0$ $\quad y = \frac{2}{\lambda}$

$\frac{\partial \phi}{\partial y}$ $\cancel{2}x + \cancel{2}y - \cancel{2}\lambda xy = 0$

$y = \frac{2}{\lambda} \Rightarrow x + \frac{2}{\lambda} - 2x \quad x = \frac{2}{\lambda}$

$x = y$

④ $x^3 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 2V \quad x = y = \sqrt[3]{2V}$

Stationär punkt för ϕ: $\left(\underset{x}{\sqrt[3]{2V}}, \underset{y}{\sqrt[3]{2V}}, \underset{\varphi}{\frac{\pi}{4}}, \underset{\lambda}{\frac{2}{\sqrt[3]{2V}}}\right)$

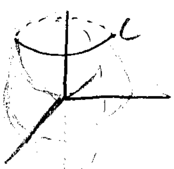
Arean $f(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{\pi}{4}) = 2(2V)^{2/3} + (2V)^{2/3} \cdot 1 = 3(2V)^{2/3} = f_{min}$ under bivillkoret

Titta tillbaka på $x = \frac{1}{\lambda}$

②: $\frac{2}{\lambda} + \cancel{2y \sin 2\varphi} - \cancel{\lambda \cdot \frac{2}{\lambda}} \sin 2\varphi = 0$ >!<

4.31] $f(x,y,z) = x+y+z$

max på $C\ \left|\ \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=2 \\ x^2+y^2-z=0 \end{array}\right.$



C kompakt

$\phi = x+y+z-\lambda(x^2+y^2+z^2)-\mu(x^2+y^2-z)$

$\phi=\phi(x,y,z,\lambda,\mu)$? stationära pkt för ϕ

$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 1-2\lambda x-2\mu x=0$

$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 1-2\lambda y-2\mu y=0$

$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 1-2\lambda z+\mu=0$

$-\frac{\partial\phi}{\partial\lambda} = x^2+y^2+z^2-2=0$

$-\frac{\partial\phi}{\partial\mu} = x^2+y^2-z=0$

$z=\frac{1+\mu}{2\lambda}$ $\quad(\lambda=0?)$

$x=\frac{1}{2(\lambda+\mu)}$ $\quad(\lambda+\mu=0?)$

$y=\frac{1}{2(\lambda+\mu)}$

$x=y$

$z=2x^2$

$2x^2+4x^4-2=0$

$2x^4+x^2-1=0$

$\left(\sqrt{2}\,x^2+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{9}{8}$

$\sqrt{2}\,x^2+\frac{1}{2\sqrt{2}}=\pm\frac{3}{2\sqrt{2}}$

$2x^2+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$2x^2=1$

$x^2=\frac{1}{2}$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+1=\sqrt{2}+1$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)=-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+1=-\sqrt{2}+1$

frågetecken

$\lambda+\mu\stackrel{?}{=}0$ $\quad 1-2(\lambda+\mu)x=0$ $\quad 1=0$ >!<

$\lambda\stackrel{?}{=}0$ (behövs egentligen inte)

$1-2\mu x=0$ $\quad x=-\frac{1}{2}$

$1-2\mu y=0$ $\quad\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$ $\quad$ fungerar inte med bivillkoret

$1+\mu=0$ $\quad\Rightarrow \mu=-1$

4.31 alt| $f(x,y,z) = x+y+z$

max f på $C \left| \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=2 \\ x^2+y^2-z=0 \\ \quad \Rightarrow z \geq 0 \end{array} \right.$

$z^2+z-2=0$

$(z+2)(z-1)=0$

$\Rightarrow z=1$

$\Rightarrow$ projektion av C i xy-planet

$x^2+y^2=1$

$\Rightarrow$ på C: $(\cos\varphi, \sin\varphi, 1)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$\max\limits_{\varphi \in [0,2\pi]} (\cos\varphi + \sin\varphi + 1)$ ...

Optimering med bivillkor

max/min f (målfunktion)

för punkter på $\left| \begin{array}{l} g_1 = c_1 \\ \vdots \\ g_k = c_k \end{array} \right\}$ bivillkor

Lagranges multiplikatormetod:

Om f har max/min i en punkt som satisfiera bivillkoren, så ger dess punkter "äkta" stationär punkt för $\phi = f - \lambda_1(g-c_1) - \dots - \lambda_k(g_k - c_k)$

$\phi = f$ i alla punkter som uppyller bivillkoren

Geometrisk tolkning

max/min $f(x,y,z)$ på $g(x,y,z)=c$

(implicita funktionssatsen)

parametrisera ytan

$r = r(s,t)$

$\max/\min\limits_{(s,t) \in R^2} f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$

I sådana punkter så skall

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{array}\right\} f(x(s,t), \dots) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

...

$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f \cdot r_s = 0 \\ \nabla f \cdot r_t = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$ ∇f normalvektor till ytan

∇g normalvektor till ytan

$\Rightarrow \nabla f \parallel \nabla g$ $\boxed{\nabla f = \lambda \nabla g}$

Derivering under integraltecknet

$f(x) \in$ lämplig funktionsmängd

f:s Fouriertransform

$$\hat{f}(\xi) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)\,dx$$

$$\hat{f}'(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} -ixe^{-ix\xi} f(x)\,dx = \widehat{-ixf(x)}(\xi)$$

$$x \overset{f}{\in} \mathbb{R} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \xi \in \mathbb{R}\ \hat{f}$$

$$\widehat{f'}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f'(x)\,dx \overset{\text{p.i.}}{=} \underbrace{\Big[f(x)e^{-ix\xi}\Big]_{-\infty}^{\infty}}_{=0 \text{ (lämplig funktionsmängd)}} + \int_{-\infty}^{\infty} i\xi e^{-ix\xi} f(x)\,dx =$$

$$= i\xi\hat{f}(\xi)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi$$

$$u'' + au' + bu = f \xrightarrow{\mathcal{F}} -\xi^2\hat{u} + ai\xi\hat{u} + b\hat{u} = \hat{f}$$

$$u(x) \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} \hat{u} = \frac{\hat{f}}{-\xi^2 + ai\xi + b}$$

$\exists$ problem!

<u>Ex</u> $\quad F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin sx}{x}\,dx$ <u>konv</u>

Derivera formellt

$$F'(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cancel{x}\cos sx}{\cancel{x}}\,dx \qquad \underline{\text{div}}$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(sx)}{sx} \cdot \overset{dt}{\boxed{s\,dx}} = \begin{bmatrix} t = sx \\ x = -\infty \Rightarrow t = -\infty \\ x = \infty \Rightarrow t = \infty \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

$(s > 0)$

$F'(s) = 0$

Sats (1) $F(s)=\int_a^b f(s,x)\,dx$

$f,\ \frac{\partial f}{\partial s}$ kontinuerliga i $\alpha<s<\beta$ (α,β kan vara $\pm\infty$)

$\boxed{a\leq x\leq b}$ Kompakt intervall

$\Rightarrow \exists\, F'(s)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(s,\cancel{x})\,dx$

Sats (2) $F(s)=\int_a^{b(s)} f(s,x)\,dx$

$f,\ \frac{\partial f}{\partial s}$ kontinuerliga i $\begin{cases}\alpha<s<\beta\\ a\leq x\leq b\end{cases}$

b deriverbar

$\Rightarrow F'(s)=\int_a^{b(s)}\frac{\partial f}{\partial s}(s,x)\,dx+f(s,b(s))\,b'(s)$

Bevis Sats (2)

$G(s,t)=\int_a^t f(s,x)\,dx$

$\Rightarrow F(s)=G(s,b(s))$

$\Rightarrow F'(s)=\frac{\partial G}{\partial s}(s,b(s))+\frac{\partial G}{\partial t}(s,b(s))\cdot b'(s)=$

$=\int_a^{b(s)}\frac{\partial f}{\partial s}(s,x)\,dx+f(s,b(s))\cdot b'(s)$

Bevis Sats (1)

$\left|\frac{F(s+h)-F(s)}{h}-\int_a^b\frac{\partial f}{\partial s}(s,x)\,dx\right|=$

$=\left|\frac{1}{h}\left(\int_a^b f(s+h,x)\,dx-\int_a^b f(s,x)\,dx\right)-\int_a^b\frac{\partial f}{\partial s}(s,x)\,dx\right|=$

$=\left|\int_a^b\left(\frac{f(s+h,x)-f(s,x)}{h}-\frac{\partial f}{\partial s}(s,x)\right)dx\right|=$ [medelv. satsen] $=$

$=\left|\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial s}(\sigma,x)-\frac{\partial f}{\partial s}(s,x)\right)dx\right|\overset{\text{T.O}}{\leq}\int_a^b\left|\frac{\partial f}{\partial s}(\sigma,x)-\frac{\partial f}{\partial s}(s,x)\right|dx = I$

σ mellan s och $s+h$

Välj $[\alpha_1,\beta_1]$ s.a. $s,\ s+h\in[\alpha_1,\beta_1]$ $(\Rightarrow \sigma_h\in[\alpha,\beta_1])$

$K\left|\begin{array}{l}s\in[\alpha_1,\beta_1]\\ x\in[a,b]\end{array}\right.$ Kompakt mängd ; $\frac{\partial f}{\partial s}$ kont. i $K\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial s}$ likformigt kontinuerlig på K

$\Rightarrow \forall\varepsilon>\ \exists\delta>0:\ |s-\sigma|<\delta\quad\left|\frac{\partial f}{\partial s}(\sigma,x)-\frac{\partial f}{\partial s}(s,x)\right|<\varepsilon\ \ \forall x\in[a,b]$, $\forall s,\sigma\in[\alpha,\beta_1]$

$I\leq\varepsilon\int_a^b dx=\varepsilon(b-a)$ för $|h|<\delta$; $\varepsilon>0$ godt. litet

$\Rightarrow I\underset{h\to 0}{\to}0\Rightarrow\exists\lim_{h\to 0}\frac{F(s+h)-F(s)}{h}=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial s}(s,x)\,dx$

5.6 $F(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} f(y)\,dy$

$F^{(n)}(x) = ?$ $\qquad f$ kont.

$(x \in [a, b])$

$F'(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^{n-2}}{(n-2)!} f(y)\,dy + \underset{(x-x)^{n-1}}{0}$

...

$F^{(n-2)}(x) = \int_0^x (x-y) f(y)\,dy$

$F^{(n-1)}(x) = \int_0^x f(y)\,dy + \underbrace{(x-x)}_{0} f(x)$

$\boxed{F^{(n)}(x) = f(x)}$

Sats $\quad F(s) = \int_a^\infty f(s,x)\,dx$

$f, \frac{\partial f}{\partial s}$ kontinuerliga för $\alpha < s < \beta$, $a \leq x < \infty$

för $\alpha_1 \leq s \leq \beta_1$

$\left|\frac{\partial f}{\partial s}(s,x)\right| \leq g(x) \quad \forall\, x \in [a, \infty)$

där $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergent

$\Rightarrow \exists! F'(s) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial s}(s,x)\,dx$

5.8) $F(s) = \int_0^\infty e^{-(x^2 + \frac{s^2}{x^2})} dx$

Formellt:

$F'(s) = \int_0^\infty e^{-(x^2+\frac{s^2}{x^2})}\left(-\frac{2s}{x^2}\right)dx = \left[\begin{array}{ll} \frac{s}{x} = y & x = \frac{s}{y} \\ s>0 & dx = -\frac{s}{y^2}dy \\ x=0+ : & y = +\infty \\ x = +\infty ; & y = 0 \end{array}\right] =$

$= \int_\infty^0 e^{-(\frac{s^2}{y^2}+y^2)}(+2)\frac{y^2}{s}\cdot\left(+\frac{s}{y^2}\right)dy =$

$= -2\int_0^\infty e^{-(\frac{s^2}{y^2}+y^2)}dy = -2F(s)$ | kräver $s \neq 0$

$\Rightarrow F'(s) + 2F(s) = 0$

$\Rightarrow F(s) = Ce^{-2s}$

$F(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ← F? kont. i 0 ($s \neq 0$ för DE)

$\Rightarrow \boxed{F(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2s}, \quad s>0}$

1) Konvergens F $x\to\infty$? F' $x \to 0$?

2) $s \in [\alpha_1, \beta_1]$? $\left|e^{(-x^2+\frac{s^2}{x^2})}\left(-\frac{2s}{x^2}\right)\right| \overset{?}{\leq} g(x)$ integrerbar på $[0,\infty)$

3) F? kont. i 0

$F(s) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cdot e^{-\frac{s^2}{x^2}}$ $\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{s^2}{x}} = \begin{cases} 1 & s=0 \\ 0 & s\neq 0\end{cases}$

$\Rightarrow$ F väldefinierad (ty $\int$ konvergent)

$\underbrace{\left|e^{-x^2}e^{-\frac{s^2}{x^2}}\left(-\frac{2s}{x^2}\right)\right|}_{2e^{x^2}e^{-\frac{s^2}{x}}\frac{s}{x^2}} \overset{?}{\leq} g(x)$! $\int_0^\infty g(x)\,dx < \infty$

$s=0$ Ok (insättning)

$s\in[\alpha_1,\beta_1]$, $0 \notin [\alpha_1, \beta_1]$ $2e^{-x^2}\cdot e^{-\frac{s^2}{x^2}}\cdot\frac{|s|}{x^2} \leq 2e^{-x^2}\boxed{e^{-\frac{\alpha_1^2}{x^2}}\cdot\frac{\beta_1}{x^2}} \leq$

begränsad (polynom·exp.-funktion)

$\leq \underbrace{C(\alpha_1,\beta_1)e^{-x^2}}_{g(x)}$

3) $\underset{s>0}{|F(s) - F(0)|} = \left|\int_0^\infty e^{-x^2}e^{-\frac{s^2}{x^2}}dx - \int_0^\infty e^{x^2}dx\right| =$ ($F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

$= \left|\int_0^\infty e^{-x^2}(e^{-\frac{s^2}{x^2}}-1)dx\right| \leq \int_0 |e^{-x^2}|\,|e^{-\frac{s^2}{x^2}}-1|\,dx$

$\varepsilon > 0$; $\exists \delta : |s| < \delta$; $\int_0^\infty e^{-x^2}\left|e^{-\frac{s^2}{x^2}} - 1\right| dx < \varepsilon$

$$\underbrace{\int_0^\gamma e^{-x^2}\left|e^{-\frac{s^2}{x^2}} - 1\right| dx}_{\leq 2\int_0^\gamma dx = 2\gamma < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\int_\gamma^R e^{-x^2}\left|e^{-\frac{s^2}{x^2}} - 1\right| dx}_{< \frac{\varepsilon}{3} \quad |s|<\delta} + \underbrace{\int_R^\infty e^{-x^2}\left|e^{-\frac{s^2}{x^2}} - 1\right| dx}_{\leq 2\int_R^\infty e^{-x^2}dx < \frac{\varepsilon}{3}}$$

R stort

$\boxed{2.94}$ $f(x,y) = e^y\left(y+1-(y-1)\sin x\right)$

Stationära punkter: Karaktär?

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -e^y(y-1)\cos x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^y\left(y+2-(y-1)\sin x\right) + \cancel{e^y(1-\sin x)} = 0 \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$: $y = 1$; $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$

$\frac{\partial f}{\partial y}$, $y=1$; $e\left(\underbrace{2+1-\sin x}_{>0}\right) = 0$ omöjligt

$x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ $\quad \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = (-1)^k$

$\cancel{e^y}\left(y+2-y(-1)^k\right) = 0$

k jämnt: $\cancel{y}+2-\cancel{y} = 0$ omöjligt

k udda: $y+2+y = 0$

$y = -1$

Oändligt många stationära punkter

$$\left(\frac{(2(2m+1)+1)\pi}{2}, -1\right) = \left(\frac{(4m+3)\pi}{2}, -1\right) \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = +e^y(y-1)\sin x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -ye^y\cos x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^y(y+2-y\sin x) + e^y(1-\sin x)$$

I de stationära punkterna

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) = -2e^{-1}(-1) = 2e^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) = e^{-1}(1-1) + e^{-1}(1+1) = 2e^{-1}$$

Kvadratisk formen ; P_m

$2e^{-1}h^2 + 2e^{-1}k^2 > 0 \qquad \forall (h,k) \neq (0,0)$

pos. def $\Rightarrow$ minima i alla stationära punkter

$$\iint_Y F_1\,dy\,dz + F_2\,dz\,dx + F_3\,dx\,dy = \iint_Y F \cdot N\,dS$$

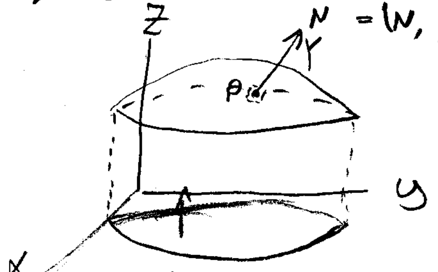
$(F_1, 0, 0)$

$$\iint_Y F_1\,dy\,dz$$

x riktning

$dy\,dz$ "liten" area i yz-planet

$N = (N_1, N_2, N_3)$



Projicera en figur (plan)

$A_{pr} = A\cos\alpha$

vinkeln mellan planen

$$\cos\alpha_P = \frac{N \cdot (0,0,1)}{|N| \cdot |(0,0,1)|} = N_3$$

= vinkel mellan normalvektorerna

$F = (0, 0, F_3)$

$F \cdot N\,dS = F_3 N_3\,dS = F_3\cos\alpha\,dS = F_3\,dx\,dy$

$dx\,dy = -dy\,dx$

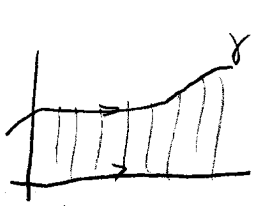
$x = x(s,t)$

$y = y(s,t) \qquad (s,t) \in D$

$z = z(s,t)$

$$\iint_Y F_3\,dx\,dy = \iint_D F_3 \boxed{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}\,ds\,dt}$$

$= (r_s \times r_t)_3\,ds\,dt = N_3\,dS$



$$\int_\gamma P\,dx$$