MATEMATIK
Chalmers

Övningstenta för MVE035 F/TM
Tid: 2011-02-12, kl 08.30 - 10.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Hossein Raufi, tel 0703-088304.

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Gränser för bonuspoäng (bp):
7-13 poäng ger 1 bp, 14-20 poäng ger 2 bp, 21-27 poäng ger 3 bp, 28-30 poäng ger 4 bp.

---

1. a) Funktionen (3p)

$$f(x,y) = \frac{x-y}{1-xy} \quad (xy < 1)$$

har två stationära punkter - vilka?

b) Avgör punkternas karaktärer (lokalt minimum/maximum, sadelpunkt). (3p)

c) Beräkna riktningsderivatan av f i origo, tagen i riktning mot punkten $(3,4)$. (3p)

2. a) Använd koordinatbytet (6p)

$$(u,v) = (x, -2x^3 + 3y^2)$$

för att transformera och därefter bestämma allmänna lösningen till den partiella differentialekvationen

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x^2 \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y \quad (x > |y|)$$

b) Bestäm linjariseringen av funktionen (3p)

$$\boldsymbol{f}(x,y) = (x, -2x^3 + 3y^2)$$

i punkten $(x,y) = (-1,1)$.

3. Beräkna (6p)

$$\iint_D (x^3 + y)\, dxdy$$

där D är triangeln med hörn i $(0,1)$, $(1,1)$ och $(1,0)$.

4. Betrakta funktionen (3p)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y+2xy^3}{x^2+y^2} & \text{då } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{då } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Undersök om f är differentierbar i $(0,0)$. (3p)

b) Beräkna $f''_{xy}(0,0)$ och $f''_{yx}(0,0)$.

Lycka till!
/Lennart

MATEMATIK
Chalmers

Lösningar till övningstenta för MVE035 F/TM 2011-02-12.

1. a) Vi beräknar de partiella derivatorna:

$$f'_x(x,y) = \frac{1-xy+y(x-y)}{(1-xy)^2} = \frac{1-y^2}{(1-xy)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{-(1-xy)+x(x-y)}{(1-xy)^2} = \frac{x^2-1}{(1-xy)^2}$$

De stationära punkterna uppfyller alltså $x^2 = y^2 = 1$, och eftersom val av samma tecken på x och y ger $xy = 1$, så återstår punkterna $(1,-1)$ och $(-1,1)$.

b) För att avgöra punkternas karaktärer, behöver vi bestämma den kvadratiska form $Q(h,k)$ som approximerar differensen för små (h,k):

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) \approx Q(h,k) = \frac{1}{2}(f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2)$$

där (a,b) är en stationär punkt. Vi deriverar vidare:

$$f''_{xx} = \frac{2y(1-y^2)}{(1-xy)^3},\quad f''_{xy}(x,y) = \frac{2(x-y)}{(1-xy)^3},\quad f''_{yy}(x,y) = \frac{2x(x^2-1)}{(1-xy)^3}$$

I båda de stationära punkterna är $f''_{xx} = f''_{yy} = 0$, medan $f''_{xy}(1,-1) = \frac{1}{2}$ och $f''_{xy}(-1,1) = -\frac{1}{2}$. Den kvadratiska formen blir därmed $Q(h,k) = hk$ respektive $Q(h,k) = -hk$. Båda dessa har olika tecken i $(h,k) = (1,1)$ och $(h,k) = (1,-1)$ och är alltså indefinita, vilket betyder att båda stationära punkterna är sadelpunkter.

c) Med enhetsvektorn $\boldsymbol{v} = \frac{1}{5}(3,4)$ är den aktuella riktningsderivatan

$$f'_{\boldsymbol{v}}(0,0) = \boldsymbol{v} \cdot \nabla f(0,0) = \frac{1}{5}(3,4)\cdot(1,-1) = -\frac{1}{5}.$$

2. a) Med $z(x,y) = \tilde{z}(u,v)$ och utnyttjande kedjeregeln får vi:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}(-6x^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u}\cdot 0 + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}\cdot 6y$$

Högerledet i vår PDE blir

$$y\Big(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}(-6x^2)\Big) + x^2\Big(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}\cdot 6y\Big) = y\frac{\partial \tilde{z}}{\partial u}$$

och efter strykning av faktorn y har vi en ny PDE:

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} = u^2$$

med allmänna lösningen $\tilde{z}(u,v) = \frac{u^3}{3} + g(v)$, där g är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel. I ursprungliga koordinater: $z(x,y) = \frac{x^3}{3} + g(-2x^3+3y^2)$.

b) Den lokala linjariseringen av $\boldsymbol{f}$ i $(-1,1)$ är $\boldsymbol{L}(x,y) = \boldsymbol{f}(-1,1) + \boldsymbol{f'}(-1,1)\begin{bmatrix} x+1 \\ y-1 \end{bmatrix}$.
Vi behöver alltså funktionalmatrisen (med u och v som i (a)):

$$\boldsymbol{f'}(x,y) = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6x^2 & 6y \end{bmatrix}$$

Insättning av $(x, y) = (-1, 1)$ ger nu

$$\begin{bmatrix} x \\ -2x^3 + 3y^2 \end{bmatrix} \approx \boldsymbol{L}(x, y) = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + 1 \\ y - 1 \end{bmatrix}$$

3. Triangeln begränsas av linjerna $x + y = 1, \;\; x = 1$ och $y = 1$. Om vi t. ex. väljer att integrera i x-led först (andra ordningen går också bra), ser den upprepade integrationen ut så här:

$$\iint_D (x^3 + y)\, dxdy = \int_0^1 dy \int_{1-y}^1 (x^3 + y)\, dx = \int_{1-y}^1 dy \Big[\frac{x^4}{4} + xy\Big]_{x=1-y}^{x=1} =$$

$$= \int_0^1 \Big(\frac{1}{4} + y - \frac{(1-y)^4}{4} - (1-y)y\Big) dy = \int_0^1 \Big(\frac{1}{4} - \frac{(1-y)^4}{4} + y^2\Big) dy =$$

$$= \Big[\frac{y}{4} + \frac{(1-y)^5}{20} + \frac{y^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{8}{15}.$$

4. a) Eftersom f är konstant noll på koordinataxlarna, så måste gälla att $f(0, 0) = f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$.
Därmed är $f(0 + h, 0 + k) = 0 + 0 \cdot h + 0 \cdot k + \sqrt{h^2 + k^2}\rho(h, k)$, varmed relativa felet ges av

$$\rho(h, k) = \frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h^3 k + 2hk^3}{(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Med $r = \sqrt{h^2 + k^2}$ vet vi att $|h| \leq r$ och $|k| \leq r$, så

$$|\rho(h, k)| \leq \frac{|h^3 k| + 2|hk^3|}{r^3} \leq \frac{3r^4}{r^3} = 3r$$

vilket visar att $\rho(h, k) \to 0$ då $(h, k) \to (0, 0)$. Detta innebär att f är differentierbar i $(0, 0)$.

b) För att bestämma andraderivatorna i $(0, 0)$ räcker det att känna till f'_x på y-axeln och f'_y på x-axeln. De är faktiskt lättare att beräkna med definitionen än med deriveringsregler:

$$f'_x(0, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 y + 2y^3}{h^2 + y^2} = 2y$$

$$f'_y(x, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, k) - f(x, 0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{x^3 + 2xk^2}{x^2 + k^2} = x$$

Detta ger de blandade derivatorna på varsin koordinataxel: $f''_{xy}(0, y) = 2,\; f''_{yx}(x, 0) = 1$. Då är speciellt $f''_{xy}(0, 0) = 2,\; f''_{yx}(0, 0) = 1$. (Funktionen kan alltså inte vara $\mathcal{C}^2$ i origo, då dessa derivator skulle varit lika!)