

Övningskrivning i flervariabelanalys (MVE035), F1/TM, 2010-02-13
kl. 11.00-13.00 i V

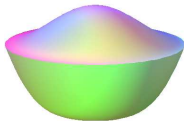
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Bernhard Behrens, tel. 0768-681630

OBS: Tentan rättas anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper.
Fyll i omslaget ordentligt.

1. Lös problemet $yf'_x - xf'_y = 4xy \sinh(x^2 - y^2)$, $f(x, x) = \sinh(2x^2)$, $x > 0$, $y > 0$ genom att införa nya variabler u och v givna av $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - y^2$. Motivera även varför u och v duger som nya variabler. (7p)

2. Bestäm alla stationära punkter och deras karaktär till $f(x, y) = \arctan(x + y) - \arctan x - \arctan y$. (6p)

3. Beräkna volymen av kroppen $K = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}, 1 - \cos(x^2 + y^2) \leq z \leq \cosh\left(\frac{2(x^2 + y^2) - \pi}{\pi}\right) \right\}$.  (6p)

4. Låt $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^5}{x^2 + y^6} & \text{då } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{då } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Visa att f är differentierbar men inte C^1 i origo. (7p)

5. a) Definiera ”positivt definit kvadratisk form i \mathbb{R}^3 ”. (2p)
b) Definiera ”riktningsderivatan av f i punkten \mathbf{a} i riktningen \mathbf{v} ”. (2p)

7p – 13p: 1 bonuspoäng
14p – 20p: 2 bonuspoäng
21p – 27p: 3 bonuspoäng
28p – 30p: 4 bonuspoäng

Övningstenta i flervariabelanalys F1 (mve035), 10-01-13

uppg. 1

Transformationen $\mathbb{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x^2 - y^2 \end{cases}$ är C^∞ och i varje punkt $(x, y) \in D = \{(x, y) ; x > 0, y > 0\}$ gäller

$$\frac{d\mathbb{T}}{d\mathbf{x}}(x, y) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -8xy \neq 0, \text{ inversa funktionsssatsen}$$

ger att \mathbb{T} lokalt i varje punkt $(x, y) \in D$ är bijektiv. dvs. u, v dyger som nya variabler. Kedjeregeln ger

$$\left. \begin{aligned} f'_x &= f'_u u'_x + f'_v v'_x = 2x f'_u + 2x f'_v \\ f'_y &= f'_u u'_y + f'_v v'_y = 2y f'_u - 2y f'_v \end{aligned} \right\} \Rightarrow y f'_x - x f'_y = 4xy f'_v \stackrel{!}{=} 4xy \sinh(x^2 - y^2)$$
$$\xRightarrow{xy \neq 0} f'_v = \sinh v \text{ med den allmänna lösningen } f(u, v) = \cosh v + g(u)$$

(g en godtycklig C^1 -funktion), alltså $f(x, y) = \cosh(x^2 - y^2) + g(x^2 + y^2)$.

För $y = x$ skall $f(x, x) = 1 + g(2x^2) \stackrel{!}{=} \sinh(2x^2)$, det ger $g(t) = \sinh(t) - 1$.

svar: $f(x, y) = \cosh(x^2 - y^2) + \sinh(x^2 + y^2) - 1$.

uppg. 2

$f(x, y) = \arctan(x + y) \arctan x - \arctan y$ är C^∞ , stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x = \frac{1}{1+(x+y)^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \\ f'_y = \frac{1}{1+(x+y)^2} - \frac{1}{1+y^2} = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{subtrahera}} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+y^2} \Rightarrow x^2 = y^2.$$

fall 1: $x = y$: $f'_x(x, x) = \frac{1}{1+4x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{-3x^2}{(1+4x^2)(1+x^2)} = 0 \Rightarrow x = 0$

fall 2: $x = -y$: $f'_x(x, -x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{-x^2}{1+x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$, origo är alltså

den enda stationära punkten. Dess typ kan inte avgöras med vårt kriterium ty alla andragsderivator är 0 i origo (räkna ut dem eller titta på McLaurinutvecklingen: $\arctan t = t + t^3 B(t)$, alltså $f(x, y) = x + y - x - y + \dots$ (termer av ordning ≥ 3)), den kvadratiska formen är alltså bara semidefinit. Men om vi studerar f längs linjen $y = x$ så ser vi att origo är en sadelpunkt, ty

$g(x) = f(x, x) = \arctan(2x) - 2 \arctan(x)$ är udda och strängt avtagande

$$(g'(x) = \frac{2}{1+4x^2} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{-6x^2}{(1+4x^2)(1+x^2)} < 0 \text{ för } x \neq 0), \text{ alltså}$$

$f(-x, -x) > f(0, 0) = 0 > f(x, x)$ för $x > 0$, det ger att det i varje omgivning $U_\delta(0, 0) : x^2 + y^2 < \delta^2$ ($\delta > 0$) till origo finns punkter, t.ex. $(-\frac{\delta}{2}, -\frac{\delta}{2})$ och $(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})$ med $f(-\frac{\delta}{2}, -\frac{\delta}{2}) > f(0, 0)$ och $f(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}) < f(0, 0)$.

svar: $(0, 0)$, sadelpunkt

uppg. 3

Låt $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}\}$ och

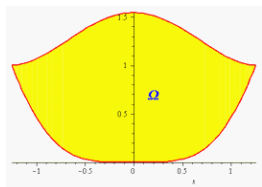
$$K = \left\{ (x, y, z) : (x, y) \in D, 1 - \cos(x^2 + y^2) \leq z \leq \cosh\left(\frac{2(x^2 + y^2) - \pi}{\pi}\right) \right\}.$$

ANM: K är den punktmängd i \mathbb{R}^3 som begränsas nedåt av $z = 1 - \cos(x^2 + y^2)$

och uppåt av $z = \cosh\left(\frac{2(x^2 + y^2) - \pi}{\pi}\right)$; K är den rotations kropp som uppstår då

området $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ mellan $y = 1 - \cos(x^2)$ och $y = \cosh\left(\frac{2x^2 - \pi}{\pi}\right)$, $|x| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,

roterar kring y -axeln ($0 \leq 1 - \cos(x^2 + y^2) \leq 1 \leq \cosh\left(\frac{2(x^2 + y^2) - \pi}{\pi}\right)$):



K 's volym är $\underline{m(K)} =$

$$= \iint_D \left(\cosh\left(\frac{2(x^2 + y^2) - \pi}{\pi}\right) - (1 - \cos(x^2 + y^2)) \right) dx dy = [\text{polära koordinater}]$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left(\cosh\left(\frac{2r^2 - \pi}{\pi}\right) - 1 + \cos(r^2) \right) r dr d\varphi =$$

$$= 2\pi \left[\frac{\pi}{4} \sinh\left(\frac{2r^2 - \pi}{\pi}\right) - \frac{r^2}{2} + \frac{1}{2} \sin(r^2) \right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \underline{\frac{\pi}{2} (\pi \sinh 1 - \pi + 2)}.$$

svar: $\boxed{\frac{\pi}{2} (\pi \sinh 1 + 2 - \pi)}$

uppg. 4

$f(0, 0) = 0$ och $f(x, y) = \frac{xy^5}{x^2 + y^6}$ då $(x, y) \neq (0, 0)$. Först visar vi att f är partiellt

$$\left. \begin{aligned} \text{tiellt deriverbar i origo: } f(0, 0) = 0, \quad \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \frac{0 - 0}{x} = 0 \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow 0 \\ \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \frac{0 - 0}{y} = 0 \rightarrow 0 \text{ då } y \rightarrow 0 \end{aligned} \right\}$$

visar att f är partiellt deriverbar i origo med $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$. För

$$(x, y) \neq (0, 0) \text{ är } f'_x(x, y) = \frac{y^5(x^2 + y^6 - 2x^2)}{(x^2 + y^6)^2} = \frac{y^5(y^6 - x^2)}{(x^2 + y^6)^2} \text{ och (t.ex.) } f'_x(0, y) = \frac{1}{y}$$

går inte mot $f'_x(0, 0) = 0$ då $(0, y) \rightarrow (0, 0)$, det ger att f'_x inte är C^0 , alltså att f

inte är C^1 , i origo. Det relativa felet $\rho(h, k) = \frac{f(0+h, 0+k) - (f(0, 0) + f'_x(0, 0)h + f'_y(0, 0)k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$

$$= \frac{hk^5}{\sqrt{h^2 + k^6}} \text{ går mot 0 då } (h, k) \rightarrow (0, 0) \text{ ty } \rho(h, 0) = \rho(0, k) = 0 \text{ och för}$$

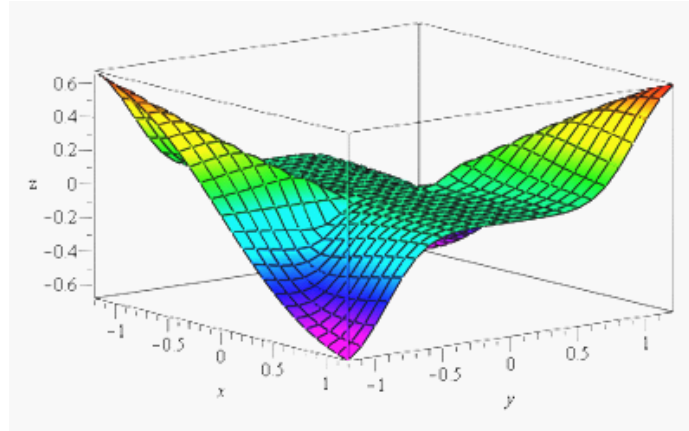
$$hk \neq 0 \text{ är } 0 < |\rho(h, k)| \leq \left| \frac{hk^5}{2hk^3\sqrt{h^2 + k^2}} \right| = \frac{k^2}{2\sqrt{h^2 + k^2}} < \frac{k^2}{2\sqrt{k^2}} [h^2 + k^6 \geq 2hk \text{ ty}$$

$$(h - k^3)^2 \geq 0], \text{ instängningslagen ger påståendet; eller } \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \rho(h, k) = [\text{pol.}$$

$$\text{koord.}] = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos \varphi \sin^5 \varphi}{\cos^2 \varphi + r^4 \sin^6 \varphi} = 0 \text{ ty } \cos^2 \varphi + r^4 \sin^6 \varphi > 0 \text{ för alla } \varphi, r > 0 (|\varphi| \neq \frac{\pi}{2}$$

ty $h \neq 0$). Det visar att f är differentierbar i origo. vsv

Så ser ytan $z = f(x, y)$ ut:



ANM (teoriuppgift 5):

- a) En positivt definit kvadratisk form i \mathbb{R}^3 är en avbildning $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $(x, y, z) \mapsto Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz$ ($A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$)
sådan att $Q(x, y, z) > 0$ för alla $(0, 0, 0) \neq (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- b) Riktningderivatan av $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i punkten \mathbf{a} i riktningen \mathbf{v} är
 $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t}$ där \mathbf{a} är inre punkt i D_f och $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ med $|\mathbf{v}| = 1$
(om gränsvärdet existerar).