

Övningskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035), 2009-02-14

kl. 8.30-10.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Bernhard Behrens, tel. 0768-681630

OBS: Tentan rättas anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper.

Fyll i omslaget ordentligt.

1. Lös problemet $y^2 f'_x - x^2 f'_y = x^2 y^2 \cos(x^3 - y^3)$, $f(x, y) = \cos(x^3)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
 [ledning: inför de nya variablerna $u = x^3 + y^3$, $v = x^3 - y^3$]. (5p)

2. Låt D vara den triangelyta i xy -planet som begränsas av linjerna $x + 2y = 4$, $x - y = 1$ och $y = 2$.
 Beräkna volymen av kroppen $K = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 1 \leq z \leq \cosh(x - 2y)\}$. (6p)

3. Låt $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{då } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{då } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

a) Visa att tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$ går genom origo för varje $(0, 0) \neq (a, b) \in \mathbb{R}^2$. (4p)

b) Visa att origo är en stationär punkt till f och bestäm dess karaktär. (4p)

c) Existerar de andragsderivatorna $f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, f''_{yx}$ i origo? (4p)

d) Existerar riktningsderivatan till f i origo i någon annan riktning än $(\pm 1, 0)$ och $(0, \pm 1)$? (4p)

e) Är f differentierbar i origo? (3p)

7p – 13p: 1 bonuspoäng
 14p – 20p: 2 bonuspoäng
 21p – 27p: 3 bonuspoäng
 28p – 30p: 4 bonuspoäng

Övningstenta i flervariabelanalys F1 (mve035), 09-02-14

uppg. 1

Transformationen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} u = x^3 + y^3 \\ v = x^3 - y^3 \end{cases}$ är C^1 (och bijektiv: visa det!).

Kedjeregeln ger

$$\left. \begin{aligned} f'_x &= f'_u u'_x + f'_v v'_x = 3x^2 f'_u + 3x^2 f'_v \\ f'_y &= f'_u u'_y + f'_v v'_y = 3y^2 f'_u - 3y^2 f'_v \end{aligned} \right\} \Rightarrow y^2 f'_x - x^2 f'_y = 6x^2 y^2 f'_v \stackrel{!}{=}$$

$$\stackrel{!}{=} x^2 y^2 \cos(x^3 - y^3) \quad \Longrightarrow \quad f'_v = \frac{1}{6} \cos v \text{ med den allmänna}$$

lösningen $f(u, v) = \frac{1}{6} \sin v + g(u)$ (g en godtycklig C^1 -funktion), alltså $f(x, y) = \frac{1}{6} \sin(x^3 - y^3) + g(x^3 + y^3)$.

För $y = x$ skall $f(x, x) = g(2x^3) \stackrel{!}{=} \cos(x^3)$, det ger $g(t) = \cos(\frac{t}{2})$.

svar: $f(x, y) = \frac{1}{6} \sin(x^3 - y^3) + \cos\left(\frac{x^3 + y^3}{2}\right)$.

uppg. 2

Skärningspunkten mellan $x + 2y = 4$ och $x - y = 1$ är $(2, 1)$ [subtraktion av de två ekvationerna ger $3y = 3 \dots$], triangeln D ges då av (se figur på sidan 2)

$$D : \begin{cases} 4 - 2y \leq x \leq 1 + y \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}, \text{ volymen av kroppen}$$

$K = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 1 \leq z \leq \cosh(x - 2y)\}$ är alltså

$$\underline{m(K)} = \iint_D (\cosh(x - 2y) - 1) dx dy = \int_1^2 \left(\int_{4-2y}^{1+y} (\cosh(x - 2y) - 1) dx \right) dy =$$

$$= \int_1^2 \left([\sinh(x - 2y) - x]_{x=4-2y}^{x=1+y} \right) dy =$$

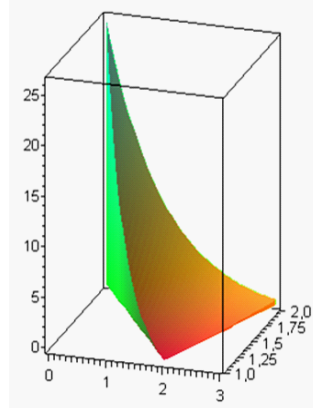
$$= \int_1^2 (4 - 2y - 1 - y + \sinh(1 - y) - \sinh(4 - 4y)) dy =$$

$$= \left[3\left(y - \frac{1}{2}y^2\right) + \frac{1}{4} \cosh(4 - 4y) - \cosh(1 - y) \right]_1^2 =$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{4} \cosh 4 - \frac{1}{4} - \cosh 1 + 1 = \underline{\underline{\frac{1}{4} \cosh 4 - \cosh 1 - \frac{3}{4} = \text{svar.}}}$$



triangeln D



Kroppen K

uppg. 3

a) För $(x, y) \neq (0, 0)$ är $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f'_x = y \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$

och $f'_y = x \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{x^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$, alltså har tangentplanet i en punkt $(a, b) \neq (0, 0)$ ekvationen $z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b^3}{(\sqrt{a^2+b^2})^3}(x - a) + \frac{a^3}{(\sqrt{a^2+b^2})^3}(y - b) = \frac{b^3}{(\sqrt{a^2+b^2})^3}x + \frac{a^3}{(\sqrt{a^2+b^2})^3}y$ eller $b^3x + a^3y - (\sqrt{a^2+b^2})^3z = 0$, det är ett plan genom origo. vsv

b) Vi visar att f är partiellt deriverbar i origo: $f(0, 0) = 0$ och

$$\left. \begin{aligned} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} &= \frac{0-0}{x} = 0 \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow 0 \\ \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} &= \frac{0-0}{y} = 0 \rightarrow 0 \text{ då } y \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \text{visar att } f \text{ är part. deriverbar i origo}$$

med $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ och därmed att origo är en stationär punkt till f .

Origo är en sadelpunkt, ty i varje omgivning $B_\delta = \{(x, y) : x^2 + y^2 < \delta^2\}$ till origo finns punkterna $(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})$ resp. $(\frac{\delta}{2}, -\frac{\delta}{2})$ med $f(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}) > 0 = f(0, 0)$ resp. $f(\frac{\delta}{2}, -\frac{\delta}{2}) < 0 = f(0, 0)$.

ANM: För att bestämma typen av origo kan man inte använda Taylorutvecklingen (den kvadratiske formen ...) ty f är inte C^3 (inte ens C^1 som **d**) visar!

c) Vi har $f'_x = \frac{y^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$, $f'_y = \frac{x^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$ (från **a**) och

$f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ (från **b**), alltså

$$\left. \begin{aligned} \frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y} &= \frac{y^3}{y(\sqrt{y^2})^3} = \frac{1}{|y|} \rightarrow \infty \text{ då } y \rightarrow 0 \\ \frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x} &= \frac{x^3}{x(\sqrt{x^2})^3} = \frac{1}{|x|} \rightarrow \infty \text{ då } x \rightarrow 0 \end{aligned} \right\}, \text{det visar att } f''_{xy} \text{ och } f''_{yx}$$

inte existerar i origo.

$$\left. \begin{aligned} \frac{f'_x(x,0) - f'_x(0,0)}{x} &= \frac{0-0}{x(\sqrt{x^2})^3} = 0 \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow 0 \\ \frac{f'_y(0,y) - f'_y(0,0)}{y} &= \frac{0}{y(\sqrt{y^2})^3} = 0 \rightarrow 0 \text{ då } y \rightarrow 0 \end{aligned} \right\}, \text{ det visar att}$$

$$f''_{xx}(0,0) = f''_{yy}(0,0) = 0.$$

d) Låt $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$ med $v_1 v_2 \neq 0$.

$$\frac{f(0+tv_1, 0+tv_2) - f(0,0)}{t} = \frac{t^2 v_1 v_2}{t \sqrt{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2}} = \frac{t v_1 v_2}{|t| \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \begin{cases} v_1 v_2 & \text{då } t > 0 \\ -v_1 v_2 & \text{då } t < 0 \end{cases} \text{ saknar}$$

gränsvärde då $t \rightarrow 0$, alltså existerar inte riktningsderivatan i origo i någon annan riktning än $\pm(1, 0)$ och $\pm(0, 1)$ ($f'_{\pm(1,0)} = \pm f'_x$, $f'_{\pm(0,1)} = \pm f'_y$).

e) Det relativa felet $\rho(h, k) = \frac{f(0+h, 0+k) - (f(0,0) + f'_x(0,0)h + f'_y(0,0)k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{hk}{h^2 + k^2}$ går inte mot 0 då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ ty t.ex. $\rho(h, h) = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0$ då $(h, h) \rightarrow (0, 0)$, alltså är f inte differentierbar i origo (och därmed inte C^1).

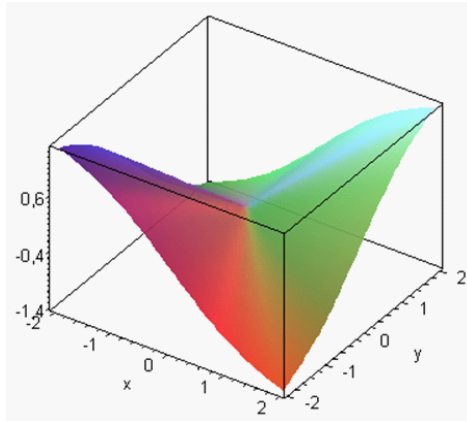
Alternativt inses det med **d)**: skulle f vara differentierbar i origo så skulle riktningsderivatorna existera.

ANM: f är inte C^1 i origo, t. ex. går $f'_x(x, y)$ inte mot $f'_x(0, 0) = 0$

då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ (t. ex. $f'_x(x, x) = \frac{x^3}{(\sqrt{x^2 + x^2})^3} = \begin{cases} 1, & \text{då } x > 0 \\ -1, & \text{då } x < 0 \end{cases}$),
men det ger INTE att f inte är differentierbar i origo!

svar:

b) $(0, 0)$ är en sadelpunkt **c)** bara $f''_{xx}(0, 0) = f''_{yy}(0, 0) = 0$ existerar i $(0, 0)$
d) $f'_v(0, 0)$ existerar bara för $\mathbf{v} = \pm(1, 0)$ och $\mathbf{v} = \pm(0, 1)$ **e)** nej



ytan $z = f(x, y)$