<u>Övningsskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035), 2006-02-11</u>
<u>kl. 8.30-10.30 i V</u>

<u>Hjälpmedel:</u> Inga, ej heller räknedosa
<u>Telefon:</u> Bernhard Behrens, tel. 0768–681630
<u>OBS:</u> Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på <u>varje</u> inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Bevisa att ekvationen $x + xy + yz = 2\sin(x) + 3\sin(y) + 2\sin(z)$ definierar lokalt i origo z som en C^1 funktion av (x, y) och ange en ekvation för tangentplanet till denna yta $z = z(x, y)$ i origo. (6p)

2. Låt $\begin{cases} u = z - x \\ v = z - y \\ w = z^4 - 2xz^3 - 2yz^3 + 6xyz^2 \end{cases}$ och $\Omega = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$.

a) Bevisa att $\boldsymbol{T} : \underset{(x,y,z)}{\mathbb{R}^3} \to \underset{\mapsto\ (u,v,w)}{\mathbb{R}^3}$ är bijektiv lokalt i varje punkt i Ω. (3p)

b) Bestäm den allmänna lösningen till problemet $f'_x + f'_y + f'_z = xyz$, $(x, y, z) \in \Omega$.
[ledning: använd u,v,w som nya variabler] (7p)

3. Låt $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{då } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{då } (x, y) = (0,0) \end{cases}$;

bevisa att f är differentierbar (4p) men inte C^1 i $(0,0)$ (3p). (7p)

4. Bevisa att om $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är C^1 i en omgivning till $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ så är f differentierbar i (a,b). (7p)

7p – 13p: 1 bonuspoäng
14p – 20p: 2 bonuspoäng
21p – 27p: 3 bonuspoäng
28p – 30p: 4 bonuspoäng

BB

(ÖVNINGS-) TENTAUPPGIFTER

1. Låt $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x-y)^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Visa att f är kontinuerlig i $(0,0)$ (1p), partiellt deriverbar i $(0,0)$ (3p), men inte differentierbar i $(0,0)$ (5p) (9p)

2. Låt $F(x,y,z)=x^4+y^2-z^3$.

a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan $F(x,y,z)=1$ i punkten $(1,1,1)$. (4p)

b) I vilken riktning växer funktionsvärdena snabbast i punkten $(1,1,1)$? (2p)

3. Låt $f(x,y)=\cosh(x-y^2)+\sin(x^2-y)$.

a) Bestäm en normalvektor till ytan $z=f(x,y)$ i punkten $(1,1,1)$. (4p)

b) Bestäm en ekvation för normalen till nivåkurvan $f(x,y)=1$ i punkten $(1,1)$. (3p)

4. Given är ytan $z=1+\ln(1+x^2+y^2)$.

a) Bestäm ytans nivåkurvor. (2p)

b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan i punkten $(1,-2,1+\ln 6)$. (5p)

5. Lös för $x>0, y>0$ problemet $xf'_x-yf'_y=x+y,\ f(x,x)=\cosh x$ genom att införa nya variabler $u=xy,\ v=x-y$. Duger u,v som nya variabler? (7p)

6. Låt $f(x,y)=3\ln\sqrt{x^2+y^2+1}+xy-x^2-y^2$.

a) Taylorutveckla f kring origo med termer till och med fjärde graden och visa med hjälp härav att origo är en sadelpunkt till f. (7p)

b) Bestäm alla stationära punkter till f och deras karaktär. (7p)

svar: **2a)** $4x+2y-3z=3$, **b)** $(4,2,-3)$ **3a)** $(2,-1,-1)$, **b)** $x+2y=3$

4a) $x^2+y^2=k\ (k\geq 0)$, **b)** $x-2y-3z=2-3\ln 6$ **5)** $f(x,y)=x-y+\cosh(\sqrt{xy})$

6a) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+xy-\frac{3}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2y^2-\frac{3}{4}y^4$, **b)** $(0,0)$ sadelpunkt, $\pm(1,1)$ globala maximipunkter