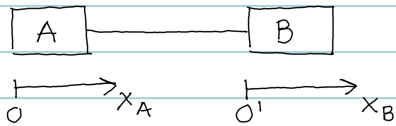
Föreläsning 29/01-14

Tvång



Linans längd $= x_B - x_A + (\text{konstant})_1$

Tvång Linans längd $= (\text{konstant})_2$

$$x_B - x_A = (\text{konstant})_2 - (\text{konstant})_1 = (\text{konstant})_3$$

Från förra föreläsningen:

Ex. 3/29 forts.

Antag $\ddot{s} > 0$

Hur gör vi om $\ddot{s} < 0$?

A) Börja om från början

B) $F = -\mu_k N$ Rätt svar!

C) Ingen ändring

Glöm inte att kontrollera att $\ddot{s} > 0$

I annat fall går rörelsen åt andra hållet

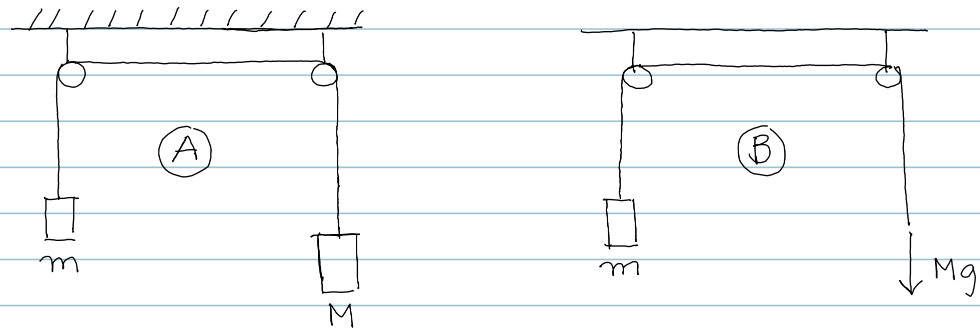
$\Rightarrow$ Använd då friktionsvillkoret

$$F = -\mu_k N$$

Kontrollera också att spännkraften

$T > 0$

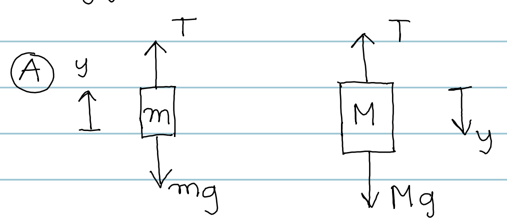
Ett experiment



Båda systemen startar i vila. Vilket system accelererar snabbast?

A) A snabbast
B) B snabbast
C) lika fort

Frilägg

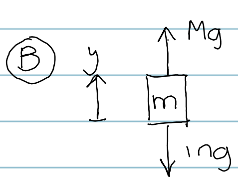


Newton II:

$\uparrow: \; T - mg = m\ddot{y}$

$\uparrow: \; T - Mg = M(-\ddot{y})$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{y} = \frac{M-m}{M+m} g}$ långsammare



$\uparrow: \; (M-m)g = m\ddot{y}$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{y} = \frac{(M-m)}{m} g}$ snabbare

$\Rightarrow$ B rätt

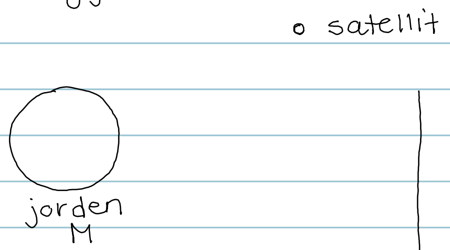
Kroklinjig rörelse

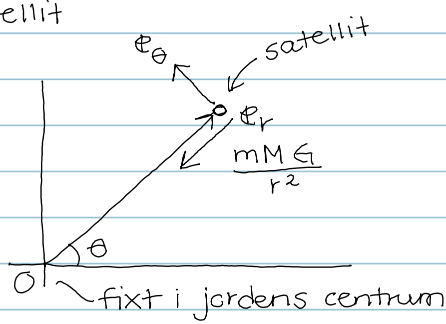
Repetition : $\mathbb{F} = m\,\mathbb{a}$

Denna vektorekvation kan analyseras i olika koordinatsystem (Cartesiska, polära, cylindriska, sfäriska, ...)

Ex Bestäm höjden h (i kilometer) ovanför jordytan där en satellit i en cirkulär bana har samma period, 23.9344 h, som jordens absoluta rotation

Frilägg satelliten





Ställ upp Newton II för satelliten

$$-\frac{mMG}{r^2}\,\mathbb{e}_r = m\left((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbb{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\mathbb{e}_\theta \right)$$

$\longrightarrow$

Vi får alltså ekvationerna

$$\begin{cases} -\dfrac{mMG}{r^2} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ 0 = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \end{cases}$$

Vi inskränker oss till en cirkulär bana

$\Rightarrow$ $r = r_0$ = konstant

Då förenklas ekvationerna till:

$$-\frac{\cancel{m}MG}{r_0^2} = -\cancel{m}r_0\dot{\theta}^2 \Rightarrow \dot{\theta} = \omega = \sqrt{\frac{MG}{r_0^3}}$$

$$0 = mr_0\ddot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \text{konstant} = \omega$$ vinkelhastighet

Fart $v = r\omega$

Omloppstid $T = \dfrac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r_0^3}{MG}}$

$$\Rightarrow r_0 = \sqrt[3]{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 MG}$$

Sätt in siffror

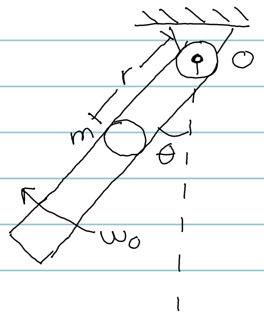
$M = 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg

$G = 6{,}6743 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2

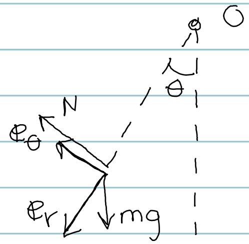
$T = 23{,}9344$ h

$$\boxed{\Rightarrow r_0 = 42164 \text{ km}}$$

3/342



Frilägg partikeln i röret



Ställ upp Newton II

$$N\mathbf{e}_\theta + mg(-\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta + \cos\theta\,\mathbf{e}_r) = m\big((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r +$$

$$+ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta\big)$$

dvs. $\begin{cases} N - mg\sin\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \\ \cancel{m}g\cos\theta = \cancel{m}(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \end{cases}$

Vi vet att $\dot{\theta} = \omega_0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} N - mg\sin\theta = 2m\dot{r}\omega_0 \\ g\cos\theta = \ddot{r} - r\omega_0^2 \end{cases}$$

$\longrightarrow$

Lös diff. ekv. $(\theta = \omega_0 t)$

$$\ddot{r} - r\omega_0^2 = g\cos\omega_0 t \qquad \text{(start vid } t=0\text{)}$$

Den allmänna lösningen är

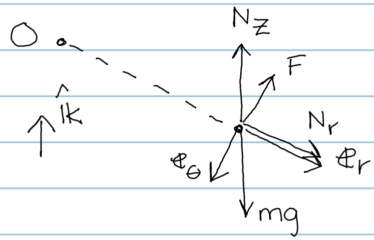
$$r = \underbrace{A e^{\omega_0 t} + B e^{-\omega_0 t}}_{\text{godtyckliga konstanter}} - \frac{g}{2\omega_0^2}\cos\omega_0 t$$

Randvärden $\quad r = 0$ vid $t = 0$

$\qquad\qquad\quad \dot{r} = 0$ vid $t = 0$

$$\Rightarrow \; r(t) = \frac{g}{2\omega_0^2}\left(\cosh\omega_0 t - \cos\omega_0 t\right)$$

3/95 Frilägg lilla ringen



Ställ upp Newton II: (cylindriska koordinater)

$$N_r e_r - F e_\theta + (N_z - mg)\hat{k} =$$

$$= m\left((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) e_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) e_\theta + \ddot{z}\hat{k}\right)$$

Tvång: r = konstant
z = konstant

Vi får ekvationerna

$$\begin{cases} N_r = -mr\dot{\theta}^2 \\ -F = mr\ddot{\theta} \\ N_z - mg = 0 \end{cases}$$

Vi har kinetisk friktion

$$F = \mu_k N = \mu_k \sqrt{N_r^2 + N_z^2}$$

Vi får alltså $\ddot{\theta} = \ldots = -\frac{\mu_k}{r}\sqrt{g^2 + r^2\dot{\theta}^4}$

$\longrightarrow$

Med $\dot{\theta} = \omega$ har vi

$$\dot{\omega} = -\frac{\mu_k}{r}\sqrt{g^2 + r^2\omega^4}$$

Den sökta båglängden är

$$s = r\theta = r\int_{\text{start}}^{\text{slut}} d\theta = r\int \omega\, dt$$

$$= r\int \omega \frac{d\omega}{\dot{\omega}} = -\frac{r^2}{\mu_k}\int \frac{\omega\, d\omega}{\sqrt{g^2 + r^2\omega^4}} =$$

$$= \ldots = -\frac{r}{2\mu_k} \ln \frac{v_0^2 + \sqrt{g^2 r^2 + v_0^4}}{gr}$$