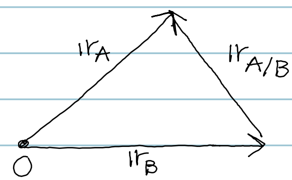
Föreläsning 28/01-14

Relativ rörelse

Vi har två partiklar A och B med ortsvektorer $\mathbf{r}_A$ o $\mathbf{r}_B$ m.a.p en fix punkt O



Deras (absoluta) hastigheter är

$$\begin{cases} \mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_A \\ \mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_B \end{cases}$$

Deras accelerationer $\begin{cases} \mathbf{a}_A = \ddot{\mathbf{r}}_A \\ \mathbf{a}_B = \ddot{\mathbf{r}}_B \end{cases}$

Vi inför A's ortsvektor relativt B $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$

" hastighet " $\mathbf{v}_{A/B} = \dot{\mathbf{r}}_{A/B} = $
$= \dot{\mathbf{r}}_A - \dot{\mathbf{r}}_B$

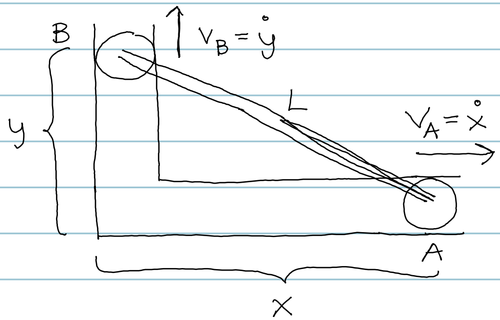
" acceleration " $\mathbf{a}_{A/B} = \dots$

Tvång (constraint)

Ibland är rörelserna för två partiklar A och B relaterade genom ett tvångsvillkor

Ex. A och B kan röra sig i horisontella resp. vertikala spår och är förenade med en stång med fix längd L.

$\longrightarrow$



Enligt Pythagoras sats

$$x^2 + y^2 = L^2$$

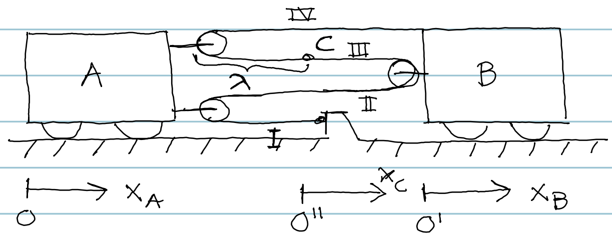
Ta derivatan

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$$

så att

$$\boxed{v_A = -\frac{y}{x} v_B}$$

Ex



O, O', O'' fixa

Absoluta hastigheter och accelerationer för A, B & C

$$v_A = \dot{x}_A \qquad v_B = \dot{x}_B \qquad v_C = \dot{x}_C$$
$$a_A = \ddot{x}_A \qquad a_B = \ddot{x}_B \qquad a_C = \ddot{x}_C$$

Tvångsvillkor:

Linans konstanta längd = konstant $- \overbrace{x_A}^{I} +$

$$+ \overbrace{(x_B - x_A)}^{II} + \overbrace{(x_B - x_A)}^{III} + \overbrace{(x_B - x_A)}^{IV} =$$

$$= 3x_B - 4x_A + \text{konstant}$$

Konstant längd av andra delen av linan:

$$= \underbrace{(x_C - x_A)}_{\lambda} + \underbrace{(x_B - x_A)}_{IV} + \text{konstant} =$$

$$= x_B - 2x_A + x_C + \text{konstant}$$

Tag tidsderivator:

$$\begin{cases} 0 = 3v_B - 4v_A \\ 0 = v_B - 2v_A + v_C \end{cases}$$

$\longrightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_A = \frac{3}{4} v_B \\ v_C = 2v_A - v_B = \frac{1}{2} v_B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad v_{B/A} = v_B - v_A = \frac{1}{4} v_B$$

$$\begin{cases} 0 = 3a_B - 4a_A \\ 0 = a_B - 2a_A + a_C \end{cases} \Rightarrow \quad a_{B/A} = a_B - a_A = \frac{1}{4} a_B$$

Kap 3 Kraft och acceleration

En kropp med massan m växelverkar med andra kroppar och utsätts för en resulterande kraft $\mathbb{F}$ (tidsberoende) Den rör sig med accelerationen $\mathbb{a}$.
Då gäller Newtons andra lag

$$\mathbb{F} = m\,\mathbb{a}$$

Hur löser man dynamiktal?

1) Dela upp problemet i lämpliga delkroppar
2) Frilägg delkropparna separat

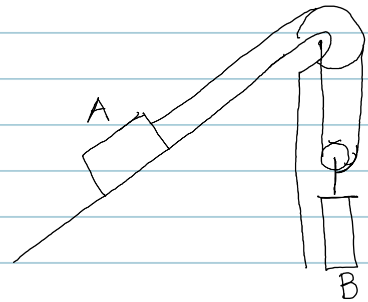
} som i statiken

3) Ställ upp Newton II för varje delkropp separat
4) Ställ upp eventuella tvångsvillkor och friktionsvillkor (kinetisk friktion)

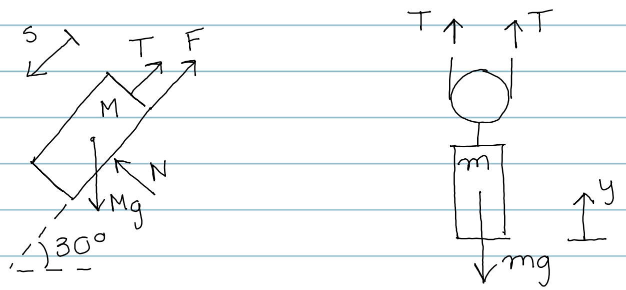
} Ger ett antal ekvationer

5) Lös ut de efterfrågade storheterna

Ex 3/29



Frilägg A och B separat



Ställ upp Newton II för A:

$\nearrow$: $T + F - \frac{1}{2}Mg = M(-\ddot{s})$

$\nwarrow$: $N - \frac{\sqrt{3}}{2}Mg = 0$

för B: $\uparrow$: $2T - mg = m\ddot{y}$

Tvångsvillkor: $s - 2y = \text{konstant}$ (Linans längd = $= s - 2y + \text{konst.}$)

$\Rightarrow \boxed{\ddot{s} = 2\ddot{y}}$

Antag att jämvikt råder $\Rightarrow$ $\ddot{s} = \ddot{y} = 0$

3 ekv, 3 obekanta (T, N, F) Lös!

Kontrollera: om $\frac{F}{N} < \mu_s$

Med givna data är detta inte fallet

Antagandet var alltså felaktigt

Kropparna rör sig

Antag att $\ddot{s} > 0$

Friktionsvillkor: $F = \mu_k N$

5 ekvationer, 5 obekanta $(\ddot{s}, \ddot{y}, T, F, N)$

Lös!

$$\begin{cases} N = \frac{\sqrt{3}}{2} Mg \\ F = \frac{\sqrt{3}}{2} \mu_k Mg \end{cases} \qquad \begin{cases} T + F - \frac{1}{2} Mg = -2M\ddot{y} \\ 2T - mg = m\ddot{y} \end{cases}$$

eliminera $\ddot{y}$ $\Rightarrow$ $m(T + F - \frac{1}{2}Mg) + 2M(2T - mg) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{mMg}{(4M+m)} \left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_k\right)}$$

Glöm inte att kontrollera att $\ddot{s} > 0$!

I annat fall går rörelsen åt andra hållet