Föreläsning 22/01-14

Vi uttrycker nu vektorerna $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{a}$

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r + 0\,\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(r\,\mathbf{e}_r) = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\,\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta) = \ddot{r}\,\mathbf{e}_r + \dot{r}\underbrace{\dot{\mathbf{e}}_r}_{=\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\underbrace{\dot{\mathbf{e}}_\theta}_{=-\dot{\theta}\mathbf{e}_r}$$

$$= \ddot{r}\,\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\,\mathbf{e}_r$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta$$

Sammanfattning:

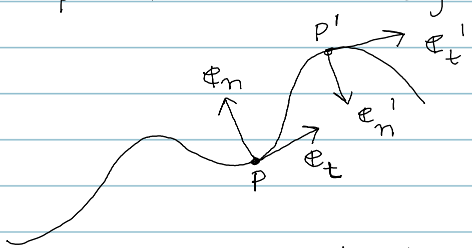
$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{v} = v_r\,\mathbf{e}_r + v_\theta\,\mathbf{e}_\theta \quad : \quad v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$\mathbf{a} = a_r\,\mathbf{e}_r + a_\theta\,\mathbf{e}_\theta \quad : \quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

Tangential och normalkoordinater

En partikel som rör sig längs en kurva i planet:



Vi inför koordinater

$\mathbf{e}_t$ i hastighetens riktning

$\mathbf{e}_n$ vinkelrät mot banan riktad mot krökningscentrum

Observera att $\mathbf{e}_n$ byter riktning i banans inflektionspunkter

Vi uttrycker $\mathbf{v}$ och $\mathbf{a}$ i basen $\mathbf{e}_t$ och $\mathbf{e}_n$:

$$\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_t$$

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(v\,\mathbf{e}_t) = \dot{v}\,\mathbf{e}_t + v\,\dot{\mathbf{e}}_t$$

$$= \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n + \dot{v}\,\mathbf{e}_t$$

Se boken

banans krökningsradie

Sammanfattning:

$$\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_t$$

$$\mathbf{a} = a_n\mathbf{e}_n + a_t\mathbf{e}_t \quad \text{med} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \; a_t = \dot{v}$$

Ex 2/130

$$\begin{cases} x = 2t^2 + 3t - 1 \\ y = 5t - 2 \end{cases}$$

Bestäm koordinaterna för krökningscentrum C vid tiden $t=1$

Plan: Läs av ρ från a_n, dvs acc. i tangential och normalkoord.

Partikelns ortsvektor, hastighet o acceleration är:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = (2t^2+3t-1)\hat{\imath} + (5t-2)\hat{\jmath} \\ \mathbf{v} = (4t+3)\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} \\ \mathbf{a} = 4\hat{\imath} \end{cases}$$

Då $t=1$ $\begin{cases} \mathbf{v} = 7\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} \\ \mathbf{a} = 4\hat{\imath} \end{cases}$

För att bestämma krökningsradien ρ använder vi tang. och normalkoord.

$$\begin{cases} \mathbf{e}_t = \frac{7}{\sqrt{74}}\hat{\imath} + \frac{5}{\sqrt{74}}\hat{\jmath} \\ \mathbf{e}_n = \frac{5}{\sqrt{74}}\hat{\imath} - \frac{7}{\sqrt{74}}\hat{\jmath} \end{cases}$$

← enhetsvektor i hastighetens riktning

← enhetsvektor $\perp$ $\mathbf{e}_t$ och riktad mot krökningscentrum

⟶

Använd $\mathbf{a} = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n + \dot{v} \mathbf{e}_t$
varav följer:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_n = \frac{v^2}{\rho}$ så att

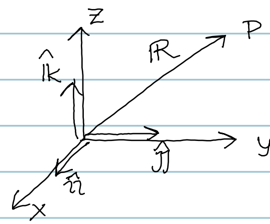
$$\rho = \frac{v^2}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_n} = \frac{74}{4 \cdot \frac{5}{\sqrt{74}}} = \frac{74\sqrt{74}}{4 \cdot 5}$$

Kinematik i 3 dimensioner

Välj koordinatsystem beroende på problemet

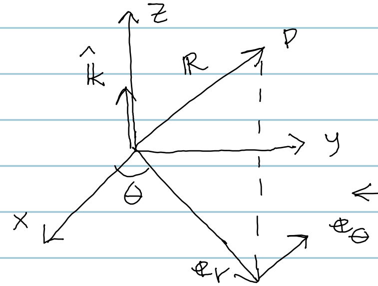
Cartesiska koordinater (x, y, z)

$$\begin{cases} \mathbf{R} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \\ \dot{\mathbf{R}} = \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}} \\ \ddot{\mathbf{R}} = \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}} \end{cases}$$



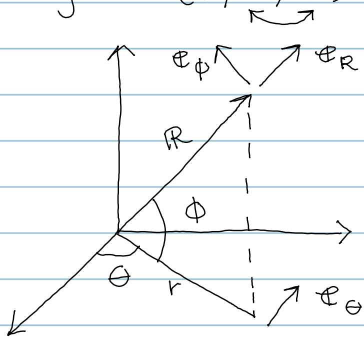
Cylindriska koordinater (r, θ, z)

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + z\hat{\mathbf{k}} = r\mathbf{e}_r + z\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}}$$



← i xy-planet

Sfäriska koordinater (R, Θ, ϕ)
(enligt M & K)
Vanligare (r, θ, ϕ)



Vi uttrycker $\mathbb{R}$, $\mathbb{v} = \dot{\mathbb{R}}$ och $\mathbb{a} = \ddot{\mathbb{R}}$ i dessa basvektorer

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{R} &= R\, e_R \\ \mathbb{v} &= \dot{R}\, e_R + R\dot{\phi}\, e_\phi + \dot{\Theta}\, \overbrace{R\cos\phi}^{r}\, e_\Theta \end{aligned}\right\} \text{ utantill!}$$

$$\mathbb{a} = a_R\, e_R + a_\phi\, e_\phi + a_\Theta\, e_\Theta$$

Se uttryck i boken 5.81

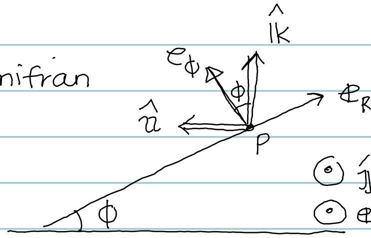
Ex 2/172 Bestäm $\dot{R}$, $\dot{\theta}$ och $\dot{\phi}$ i punkten B för flygplanet som har den givna rörelsen.

Strategi: Uttryck flygplanets hastighet i Cartesiska basvektorer $\hat{i}$, $\hat{j}$ o $\hat{k}$. Byt sedan bas och uttryck detta $\mathbf{v}$ i de sfäriska basvektorerna $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ o $\mathbf{e}_\phi$. Jämför med uttrycket för $\mathbf{v}$ i sfäriska koordinater och bestäm $\dot{R}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$

Vi har $\mathbf{v} = v\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{k}\right)$

Basbytet är:

Framifrån



$$\begin{cases} \hat{i} = +\sin\phi\,\mathbf{e}_\phi - \cos\phi\,\mathbf{e}_R \\ \hat{j} = \mathbf{e}_\theta \\ \hat{k} = +\cos\phi\,\mathbf{e}_\phi + \sin\phi\,\mathbf{e}_R \end{cases}$$

så att $\mathbf{v} = v\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\cos\phi\,\mathbf{e}_\phi + \sin\phi\,\mathbf{e}_R\right)\right)$

$$\dot{R} = \frac{v}{\sqrt{5}}\sin\phi$$

$$R\dot{\phi} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cos\phi\, v \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{R} = \frac{v}{\sqrt{5}}\sin\phi \\ \cancel{\theta}\,\dot{\phi} = \frac{v}{\sqrt{5}R}\cos\phi \\ \dot{\theta} = \frac{2v}{\sqrt{5}R\cos\phi} \end{cases}$$

$$\dot{\theta}R\cos\phi = v\frac{2}{\sqrt{5}}$$