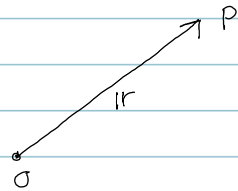
Föreläsning 21/01-14

Kinematik (= rörelsegeometri)

Beskrivning av en kropps rörelse utan att blanda in de krafter som är verksamma

Vi beskriver läget P för en partikel genom att ge dess ortsvektor $\mathbf{r}$ m.a.p en fix referenspunkt O



I allmänhet är $\mathbf{r}$ tidsberoende.

Vi definierar hastighetsvektorn

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}$$

och accelerationsvektorn

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} = \ddot{\mathbf{r}}$$

OBS:

$r = |\mathbf{r}|$ = avståndet till O

$v = |\mathbf{v}|$ = farten (hastighetens storlek)

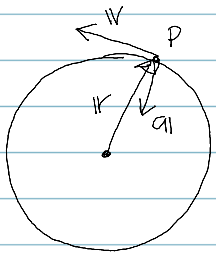
$a = |\mathbf{a}|$ (accelerationens storlek

OBS:

$$v = |\mathbf{v}| = |\dot{\mathbf{r}}| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| \neq \frac{d}{dt}|\mathbf{r}| = \frac{d}{dt}r = \dot{r}$$

$$a = |\mathbf{a}| = |\dot{\mathbf{v}}| = \left|\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right| \neq \frac{d}{dt}|\mathbf{v}| = \frac{d}{dt}v = \dot{v}$$

exempel



Rörelse på en cirkelbana med konstant fart och radie r:

$r = |\mathbf{r}| =$ konstant s.a. $\dot{r} = 0$

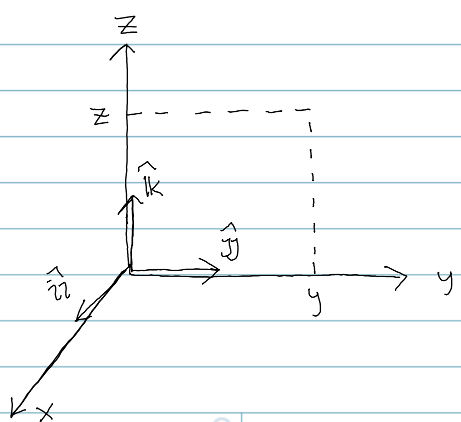
men $v = |\mathbf{v}| =$ konstant $\neq 0$

Vidare är $\dot{v} = 0$ men $\mathbf{a} \neq 0$ (riktad mot O) och därmed är $a = |\mathbf{a}| \neq 0$ Alltså $a \neq \dot{v}$

Läs själva om rörelse i en dimension

I flera dimensioner inför vi basvektorer $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ och $\hat{\mathbf{k}}$ längs koordinataxlarna så att

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \quad (\text{skriv ej } \mathbf{r} = (x,y,z))$$



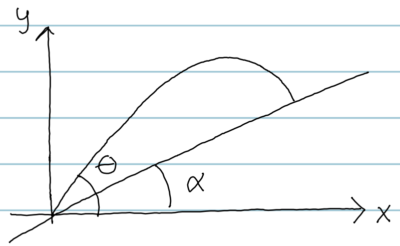
Vi har då att

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

(ty $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ konstanta)

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

Ex 2/95



Givet utgångsfarten v_0, hur ska θ väljas så att skottvidden blir maximal

Partikeln har en likformigt accelererad rörelse med

$$\mathbf{a} = \underbrace{-g}_{\text{konstant } 9.8\, m/s^2}\,\hat{\mathbf{j}}$$

Hastigheten är

$$\mathbf{v} = -gt\,\hat{\mathbf{j}} + \underbrace{\mathbf{v}_0}_{\text{hastigheten då } t=0} = -gt\,\hat{\mathbf{j}} + v_0(\underbrace{\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}}_{\text{enhetsvektor i utgångsriktningen}})$$

Ortsvektorn blir $(\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}})$

$$\mathbf{r} = -g\frac{t^2}{2}\,\hat{\mathbf{j}} + v_0(\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}})\,t + \underbrace{\mathbf{r}_0}_{\text{läge i } t=}$$

$$\mathbf{r} = \underbrace{v_0\cos\theta\, t}_{x\text{-koordinat}}\,\hat{\mathbf{i}} + \underbrace{\left(v_0\sin\theta\, t - \frac{gt^2}{2}\right)}_{y\text{-koordinat}}\hat{\mathbf{j}}$$

Vid nedslaget gäller: $\tan\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{v_0\sin\theta\, t - gt^2/2}{v_0\cos\theta\, t}$

så att $t = \dfrac{2v_0}{g}(\sin\theta - \tan\alpha\cos\theta)$

Då är alltså x-koordinaten

$$x_1 = v_0\cos\theta\,\frac{2v_0}{g}(\sin\theta - \tan\alpha\cos\theta)$$

Vi vill välja θ så att x_1 blir så stor som möjligt

→

$$\frac{dx_1}{d\theta} = \frac{2v_0^2}{g}\left[-\sin\theta(\sin\theta - \tan\alpha\cos\theta) + \cos\theta(\cos\theta + \right.$$

$$\left. + \tan\alpha \sin\theta)\right] = \frac{2v_0^2}{g}\left[\cos 2\theta + \tan\alpha \sin 2\theta\right] =$$

$= 0$ vid maximum

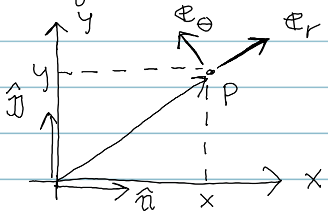
$$\Rightarrow \tan 2\theta = -\cot\alpha \Rightarrow \theta = \frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}$$

$$\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \cot\beta\right]$$

Kontroll: $\alpha = 0 \Rightarrow \theta = \pi/4$

Polära koordinater

I två dimensioner kan vi bestämma läget för en punkt P med Cartesiska koordinater (x, y) eller polära koordinater (r, θ) relaterade enligt figuren



Vi inför även motsvarande basvektorer $\hat{i}, \hat{j}$ resp. e_r, e_θ

Pekar sig alltså i riktningen
- e_r om r ökar medan θ hålls fixt
- e_θ om θ ökar medan r hålls fixt

$\longrightarrow$

Vi har

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = 1 \qquad \text{enhetsvektorer}$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = 0 \qquad \text{ortogonala}$$

En godtycklig vektor kan skrivas som en linjärkombination av basvektorerna $\hat{\imath}$ o $\hat{\jmath}$

Tillämpa detta på $\mathbf{e}_r$ o $\mathbf{e}_\theta$

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\, \hat{\imath} + \sin\theta\, \hat{\jmath}$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\, \hat{\imath} + \cos\theta\, \hat{\jmath}$$

eller omvänt

$$\hat{\imath} = \cos\theta\, \mathbf{e}_r - \sin\theta\, \mathbf{e}_\theta$$

$$\hat{\jmath} = \sin\theta\, \mathbf{e}_r + \cos\theta\, \mathbf{e}_\theta$$

I allmänhet rör sig punkten P, alltså är r och θ tidsberoende. Detta gäller även basvektorerna $\mathbf{e}_r$ och $\mathbf{e}_\theta$

konstanta

$$\mathring{\mathbf{e}}_r = \frac{d}{dt}\left(\cos\theta\, \hat{\imath} + \sin\theta\, \hat{\jmath}\right) = \mathring{\theta}\left(-\sin\theta\, \hat{\imath} + \cos\theta\, \hat{\jmath}\right) =$$

$$= \mathring{\theta}\, \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathring{\mathbf{e}}_\theta = \frac{d}{dt}\left(-\sin\theta\, \hat{\imath} + \cos\theta\, \hat{\jmath}\right) = \mathring{\theta}\left(-\cos\theta\, \hat{\imath} - \sin\theta\, \hat{\jmath}\right) =$$

$$= -\mathring{\theta}\, \mathbf{e}_r$$