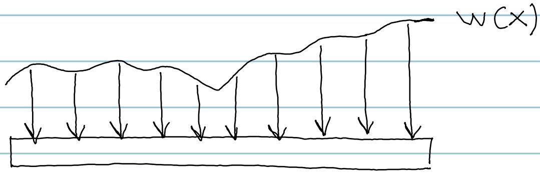
Föreläsning 2/12-13

Förra gången: Kraftfördelningar

Idag: 5.6 – 5.8 Balkar

BALKAR

Vi betraktar en belastad balk



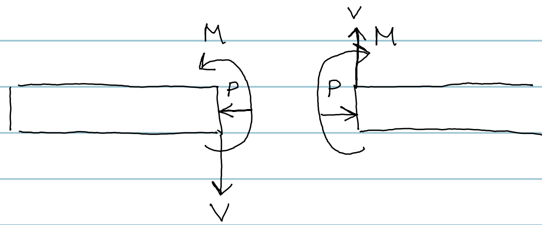
(vertikala) kraften per längdenhet

x koordinat längs balken

Dessutom påverkas balken av krafter och vridmoment från infästningen.

Gör ett tänkt snitt i ~~k~~ balken vid koordinaten x

Hur påverkar de olika delarna varandra?



Benämningar: Tryckkraft (dragkraft om $p<0$)

Skjuvkraft V (vinkelrät mot balken, men inte nödvändigtvis i tavlans plan)

Böjmoment M (vrider kring en axel vinkelrät mot balken, men inte nödvändigtvis vinkelrät mot tavlan)

Torsionsmoment T (vrider kring en axel längs balken)

Storheterna P, V, M och T är i allmänhet funktioner av läget x längs balken

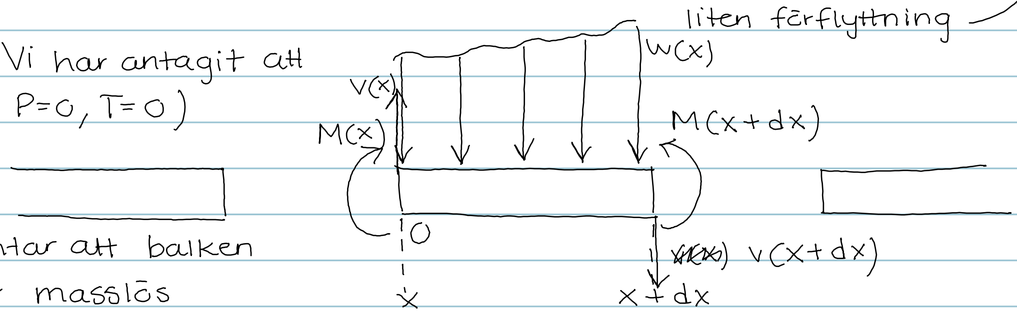
$V = V(x)$, $M = M(x)$, ...

Vi vill finna differentialekvationer, som, tillsammans med randvärden, bestämmer dessa

Vi gör två tänkta snitt i balken vid x och $x+dx$

liten förflyttning

(Vi har antagit att $P=0$, $T=0$)



Antar att balken är masslös

Ställ upp jämviktsekvationerna för den lilla biten balk:

$\uparrow$: $$V(x) - V(x+dx) - w(x)\,dx = 0$$

$\circlearrowleft O$: $$-V(x+dx)\,dx + M(x+dx) - M(x) - \underbrace{\tfrac{1}{2}dx}_{\text{hävarm}}\ \underbrace{\cancel{w(x)\,dx}}_{\text{kraft}} = 0$$

Använd Taylors formel

$$\begin{cases} V(x+dx) = V(x) + V'(x)\,dx + \tfrac{1}{2}\cancel{V''(x)(dx)^2} + \dots \\ M(x+dx) = M(x) + M'(x)\,dx + \tfrac{1}{2}\cancel{M''(x)(dx)^2} + \dots \end{cases}$$

Insättning i jämviktsekvationenerna:

$$\begin{cases} \cancel{V(x)} - \cancel{V(x)} - V'(x)\,dx - w(x)\,dx = 0 \\ -dx\,V(x) + \cancel{M(x)} + M'(x)\,dx - \cancel{M(x)} = 0 \end{cases}$$

dividera med dx

$$\begin{cases} V'(x) = -w(x) & (1) \\ M'(x) = V(x) & (2) \end{cases}$$

Om vi vill kan vi kombinera (1) och (2) till

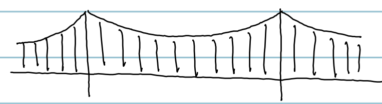
$$M''(x) = -w(x)$$

Om $w(x)$ är en känd funktion så bestämmer (1) funktionen $V(x)$ om vi även känner t.ex. $V(x_0)$ ← en viss punkt

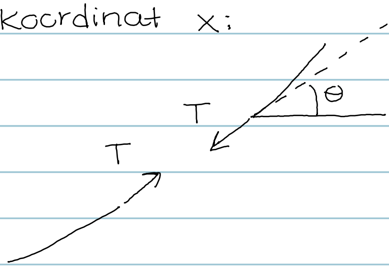
På samma sätt bestämmer (2) tillsammans med $M(x_0)$ funktionen $M(x)$

KABLAR (ej på tentan)

Tänk på Älvsborgsbron



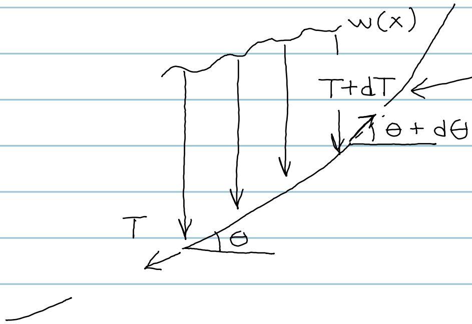
Gör ett snitt i kabeln vid en koordinat x:



Hur varierar T och θ med läget längs kabeln?

→

Gör två snitt och frilägg delen i mitten



ökning i spännkraft

w(x) vertikal last

Ställ upp jämviktsekv:

$\uparrow$: $(T+dT)\sin(\theta+d\theta) - T\sin\theta - w(x)dx = 0$

$\rightarrow$: $(T+dT)\cos(\theta+d\theta) - T\cos\theta = 0$

Taylorutveckling

$$\begin{cases} \sin(\theta+d\theta) = \sin\theta + \cos\theta\, d\theta + O(d\theta^2) \\ \cos(\theta+d\theta) = \cos\theta - \sin\theta\, d\theta + O(d\theta^2) \end{cases}$$

Sätt in i ekvationen och försumma högre ordningens termer:

$$\begin{cases} \cancel{T\sin}\theta + T\cos\theta\, d\theta + dT\sin\theta - \cancel{T\sin}\theta - w(x)dx = \\ \quad = 0 \\ T\cos\theta - T\sin\theta\, d\theta - T\cos\theta + dT\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T\cos\theta \dfrac{d\theta}{dx} + \dfrac{dT}{dx}\sin\theta = w \\ -T\sin\theta \dfrac{d\theta}{dx} + \dfrac{dT}{dx}\cos\theta = 0 \end{cases}$$

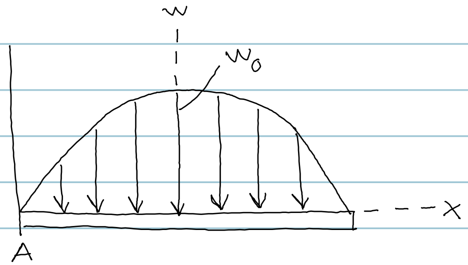
Se som ett linjärt ekv. system. med obekanta

$$\frac{dT}{dx} \quad \text{och} \quad \frac{d\theta}{dx}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$T'(x) \qquad \theta'(x)$$

Ex 5/153



Lasten ges av funktionen

$$w(x) = w_0\left(1 - \left(\frac{2}{\ell}\right)^2 x^2\right)$$

avståndet från ~~A~~ mitten av balken

V(x) och M(x) ska uppfylla diff. ekv.

$$\begin{cases} V'(x) = -w(x) \\ M'(x) = +V(x) \end{cases}$$

Men vi behöver även randvärden

Var ska vi välja att lägga våra randvärden?

Svar: vid $x = \ell/2$ (längst till höger)

$$\begin{cases} V(\ell/2) = 0 \\ M(\ell/2) = 0 \end{cases}$$

Frilägg sista delen av balken

Lös

$$V'(x) = -w(x) = w_0\left(-1 + \frac{4}{\ell^2}x^2\right)$$

$$\Longrightarrow V(x) = w_0\left(-x + \frac{4}{3\ell^2}x^3 + \text{konstant}\right)$$

$$\underset{V(\frac{\ell}{2})=0}{=} w_0\left(-x + \frac{4x^3}{3\ell^2} + \frac{\ell}{3}\right)$$

$$M'(x) = V(x) = w_0\left(\frac{\ell}{3} - x + \frac{4x^3}{3\ell^2}\right)$$

$$\Longrightarrow M(x) = w_0\left(\frac{\ell}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{3\ell^2} + \text{konstant}\right)$$

$$\underset{M(\frac{\ell}{2})=0}{=} w_0\left(\frac{\ell}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{3\ell^2} - \frac{\ell^2}{16}\right)$$