Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM521 och 520)

Tid och plats:	Tisdagen den 3 juni 2014 klockan 08.30-12.30 i M-huset.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook.
Examinator:	Christian Forssén.
Jourhavande lärare:	Christian Forssén (031–772 3261).

FFM521: Tentamen består av sex uppgifter. För att bli godkänd krävs minst 8 poäng på uppgifterna 1–4 (inklusive eventuell bonuspoäng).
För dem som har klarat föregående krav bestäms slutbetyget av poängsumman från uppgifterna 1–4 samt 6–7 plus eventuell bonuspoäng enligt följande:
8–17 poäng ger betyg 3, 18–25 poäng ger betyg 4, 26+ poäng ger betyg 5.

FFM520: För studenter som skriver FFM520 gäller att de skriver samma tentamen som FFM521 med en extra uppgift (uppgift 5, 4p). För dessa studenter är kravet för godkänt 10p på uppgifterna 1–5 inklusive eventuell bonuspoäng.
Betygsgränser: 10–19 (betyg 3), 20–27 (betyg 4), 28+ (betyg 5).

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

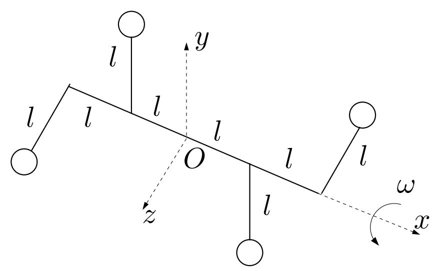
- För full (4 eller 6) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) ger 3-4 poängs avdrag om orimligheten pekas ut; annars fullt poängavdrag.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Lösningsförslag som är ofullständiga eller innehåller felaktigheter, men där en tydlig lösningsstrategi har presenterats, genererar i allmänhet det lägre av poängavdragen ovan.

Lycka till!

Obligatorisk del

1. Bestäm tröghetsmatrisen med avseende på punkten O i det givna koordinatsystemet för ett system av fyra punktmassor, vardera med massan m, som är förbundna med masslösa stänger enligt figuren. Givet en rotation runt x-axeln, ge ett uttryck för kroppens rörelsemängdsmoment i det givna läget. *(4 poäng)*



2. (a) Betrakta en stel kropp som utför allmän plan rörelse och härled uttrycket för kroppens kinetiska energi

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2.$$

I uppgiften ingår att förklara vad de olika storheterna i ovanstående uttryck motsvarar.

(b) Förklara kortfattat vilket antagande i ovanstående härledning som inte gäller när vi istället betraktar allmän rörelse i rummet.

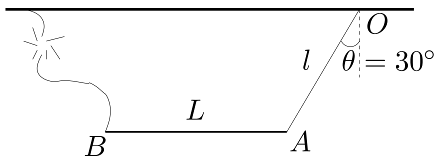
(4 poäng)

3. En homogen balk med massan m och längden L är upphängd i två likadana, masslösa vajrar vardera med längden l och vinkeln $\theta = 30°$. Se figur. Den vänstra vajern brister. Bestäm:

(a) stångens och den högra vajerns vinkelaccelerationer i det givna läget.

(b) spännkraften i den högra vajern vid jämvikt (när båda vajrarna är hela) samt i ögonblicket efter att den vänstra vajern har brustit.

(6 poäng.)

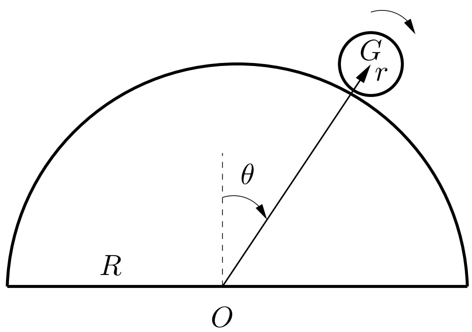


4. En pendel i form av en liten kula med massan m är fäst i ett snöre med längden L och hänger från taket i en bil som accelerar med $a = xg$ (där g är tyngdaccelerationen) på en rak, horisontell väg. Beräkna periodtiden för små svängningar kring pendelns jämviktsläge, och jämför med periodtiden då bilen kör med konstant hastighet *(6 poäng.)*

Extrauppgift (enbart FFM520)

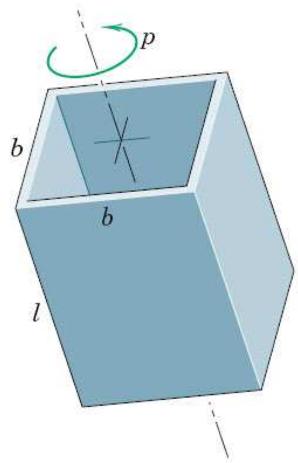
- Uppgiften utgör en del av den grundläggande delen på tentamen för studenter på kursen FFM520.
- Studenter på FFM521 (dvs inskrivna fr.o.m ht 2012) skall **inte** göra denna uppgift.

5. En homogen cylinder med massan m och radien r rullar, utan att glida, på ytan av en halvcylinder med radien R (se figur). Bestäm den lilla cylinderns kinetiska energi T samt dess rörelsemängdsmoment $\vec{L}_O$ om lägesvektorn $\vec{r}_{OG}$ roterar med vinkelhastigheten $\dot{\theta} = \omega$. *(4 poäng.)*

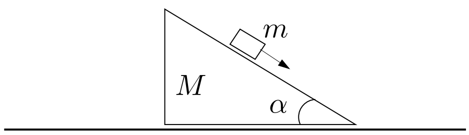


Överbetygsuppgifter

6. Den rektangulära lådan med öppna ändar spinner runt sin symmetriaxel enligt figur. Trots att inget externt vridmoment påverkar kroppen kan den ändå ha en precessionsrörelse, sk fri precession. För vilka värden på l/b kommer precessionen att vara retrograd, dvs precessionsrörelsen vara motriktad spinnrörelsen? *(6 poäng.)*



7. En partikel med massa m glider på en kil med massa M, vilken i sin tur glider på en horisontell yta (se figur). Ingen friktion.



   (a) Bestäm partikelns acceleration relativt kilen.

   (b) Använd detta exempel för att illustrera sambandet mellan en symmetri hos ett systems Lagrangian och konservering av motsvarande generaliserade rörelsemängd.

(6 poäng.)

Lösningsskiss för tentamen – Mekanik F del 2 (FFM521/520)

Tid och plats: Tisdagen den 3 juni 2014 klockan 08.30-12.30 i M-huset.

Lösningsskiss: Christian Forssén

Obligatorisk del

---

1. Ren summering över de fyra punktmassorna ger

$$
\begin{aligned}
I_{xx} &= \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) = ml^2(1+0+1+0+1+0+1+0) = 4ml^2 \\
I_{yy} &= \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2) = ml^2(4+1+1+0+1+0+4+1) = 12ml^2 \\
I_{zz} &= \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) = \ldots = 12ml^2 \\
I_{xy} &= -\sum_i m_i x_i y_i = -ml^2(-1-1) = 2ml^2 \\
I_{xz} &= -\sum_i m_i x_i z_i = -ml^2(-2-2) = 4ml^2 \\
I_{yz} &= -\sum_i m_i y_i z_i = 0
\end{aligned}
$$

så att den sökta tröghetsmatrisen i det givna koordinatsystemet blir

$$
\mathbf{I}_O = ml^2 \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 12 & 0 \\ 4 & 0 & 12 \end{pmatrix}
$$

Med en rotationsvektor $\vec{\omega} = \omega\hat{\mathbf{x}}$ får vi rörelsemängdsmomentet

$$
\vec{L}_O = \mathbf{I}_O\vec{\omega} = \omega ml^2(4\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} + 4\hat{\mathbf{z}}).
$$

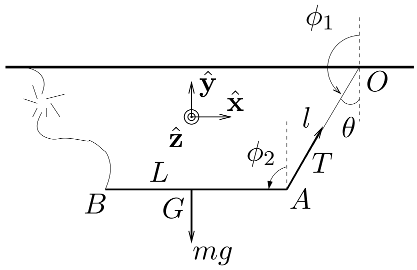
2. (a) Se kursboken, avsnitt 6/6. Storheter: m är den stela kroppens totala massa, ω är rotationshastigheten medan $\bar{v}$ är masscentrums fart och $\bar{I}$ är tröghetsmomentet med avseende på en axel genom masscentrum (vinkelrät mot planet).

(b) I härledningen för rörelse i planet kan vi anta att orts- och hastighetsvektorer ligger i planet medan rotationsvektorn är vinkelrät mot detsamma. Alla termer av typen $\vec{\rho}_i \times (\vec{\rho}_i \times \vec{\omega})$ har därmed samma riktning och denna riktning kan därmed lyftas ut ur summationen. Detta faktum gäller inte för allmän rörelse i rummet.

3. Med koordinatsystem enligt nedan, beteckna vajerns och stångens accelerationer med $\ddot{\vec{\phi}}_1 = \ddot{\phi}_1\hat{\mathbf{z}}$ respektive $\ddot{\vec{\phi}}_2 = \ddot{\phi}_2\hat{\mathbf{z}}$. I det givna läget är $\pi - \phi_1(0) = \theta = 30°$, $\dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$. Detta ger lägesvektorerna $\vec{r}_{OA} = l(-\hat{\mathbf{x}}/2 - \sqrt{3}\hat{\mathbf{y}}/2)$ samt $\vec{r}_{AG} = -L\hat{\mathbf{x}}/2$. Dessutom är givetvis $\vec{a}_O = 0$. Kinematiken ger därmed att

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \ddot{\phi}_1\hat{\mathbf{z}} \times \vec{r}_{OA} + \dot{\vec{\phi}}_1 \times (\dot{\vec{\phi}}_1 \times \vec{r}_{OA}) = l\ddot{\phi}_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{y}}\right) \quad (1)$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \ddot{\phi}_2\hat{\mathbf{z}} \times \vec{r}_{AG} + \dot{\vec{\phi}}_2 \times (\dot{\vec{\phi}}_2 \times \vec{r}_{AG} = \ldots = l\ddot{\phi}_1\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}(l\ddot{\phi}_1 + L\ddot{\phi}_2)\hat{\mathbf{y}}. \quad (2)$$



Med dessa uttryck kan vi nu teckna krafteekvationerna för stången

$$\hat{\mathbf{x}}: \quad ml\ddot{\phi}_1\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}T \quad (3)$$

$$\hat{\mathbf{y}}: \quad -m\frac{1}{2}(l\ddot{\phi}_1 + L\ddot{\phi}_2) = -mg + \frac{\sqrt{3}}{2}T \quad (4)$$

$$(5)$$

Medan momentekvationen runt stångens masscentrum (positiv riktning moturs) blir

$$\bar{I}\ddot{\phi}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}T\frac{L}{2}, \quad (6)$$

med $\bar{I} = mL^2/12$. Från dessa tre rörelseekvationer kan vi lösa ut de okända

$$\ddot{\phi}_1 = \frac{2}{13}\frac{g}{l}$$
$$\ddot{\phi}_2 = \frac{18}{13}\frac{g}{L}$$
$$T = \frac{2\sqrt{3}}{13}mg,$$

vilket ger rätt dimensioner och rimliga svar.

För att jämföra med snörkraften vid jämvikt tecknar vi NII i y-led med bägge snörena. Vi finner att

$$\hat{\mathbf{y}}: \quad 2T_{\text{jvkt}}\frac{\sqrt{3}}{2} - mg = 0,$$

vilket ger att

$$\frac{T}{T_{\text{jvkt}}} = \frac{6}{13},$$

och det är givetvis rimligt att T är mindre än T_{jvkt} eftersom vi ser en acceleration av masscentrum neråt när snöret brister.

4. Inför ett bilfixt koordinatsystem med ξ-axeln i bilens accelerationsriktning och η-axel uppåt. Pendelns upphängningspunkt kallas B, dess längd l, och dess utslagsvinkel medurs från lodlinjen för θ.

   Ortsvektorn för pendelns masscentrum i ett inertialsystem blir

$$\vec{r}_G = \vec{r}_B + \vec{r}_{G/B}$$

   Spänningen i snöret betecknas $\vec{F}$. Pendeln betraktas som en stel kropp. Ekvationerna för dess rotation kring masscentrum, och för dess masscentrums rörelse är

$$\bar{I}\ddot{\theta}\hat{\zeta} = -\vec{r}_{G/B} \times \vec{F},$$
$$m\vec{a}_G = m(a\hat{\xi} + \ddot{\vec{r}}_{G/B}) = \vec{F} - mg\hat{\eta}.$$

   Relativa ortsvektorn $\vec{r}_{G/B}$ har längd l och bestäms helt av vinkeln θ. Med polära koordinater ges ortsvektorn och accelerationen av

$$\vec{r}_{G/B} = l\hat{\mathbf{e}}_r, \quad \ddot{\vec{r}}_{G/B} = -l\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{e}}_r + l\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

   Rörelseekvationerna är tre komponentekvationer för tre obekanta, (snörkraftens två komponenter och vinkeln), så de skall räcka för att lösa uppgiften.

Kraften $\vec{F}$ kan elimineras genom att vektormultiplicera första ekvationen med $\vec{r}_{G/B}$ och sedan addera ekvationerna. Eftersom kulans tröghetsmoment är försumbart får vi

$$\vec{r}_{G/B} \times \ddot{\vec{r}}_{G/B} = \vec{r}_{G/B} \times (-a\hat{\xi} - g\hat{\eta}).$$

Detta ger den skalära ekvationen

$$l\ddot{\theta} = -a\cos\theta - g\sin\theta.$$

Denna ekvation kan alternativt och enklare härledas genom att observera att bilens acceleration ger en tröghetskraft i det bilfixa koordinatsystemet så att gravitationsaccelerationen $-g\hat{\eta}$ ersätts av $-a\hat{\xi} - g\hat{\eta}$. Eftersom $a\cos\theta + g\sin\theta = \sqrt{a^2+g^2}\sin(\theta+\theta_0)$, med $\tan\theta_0 = a/g = x$ känner vi igen rörelseekvationen. Det är en plan pendel. Jämviktsläget är $\theta = -\theta_0$, och för små utslag ger approximationen $\sin(\theta+\theta_0) \approx (\theta+\theta_0)$ harmonisk svängning med periodtiden

$$T = 2\pi\sqrt{l/\sqrt{a^2+g^2}} = 2\pi\sqrt{l/g}(1+x^2)^{-1/4}.$$

Om bilen kör med konstant hastighet gäller samma räkning fast med $a = 0$. Då blir periodtiden en faktor $(1+x^2)^{1/4}$ längre.

Extrauppgift (enbart FFM520)

- Uppgiften utgör en del av den grundläggande delen på tentamen för studenter på kursen FFM520.
- Studenter på FFM521 (dvs inskrivna fr.o.m ht 2012) skall **inte** göra denna uppgift.

5. Från kinematiken fås hastigheten för den rullande cylinderns masscentrum $\bar{v} = (R+r)\omega$. Eftersom cylindern inte glider fås sambandet $\dot{\phi}r = \omega(R+r)$, där $\dot{\phi}$ är dess rotationshastighet. Den kinetiska energin blir därför
$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}m(r+R)^2\omega^2,$$
där vi också har använt att $\bar{I} = mr^2/2$.

Vad gäller rörelsemängdsmomentet kan vi använda sambandet

$$\begin{aligned}\vec{L}_O = \vec{L}_G + m\vec{r}_{O/G} \times \vec{\bar{v}} &= \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}\hat{\mathbf{z}} + m(R+r)\hat{\mathbf{e}}_r \times \bar{v}\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &= \frac{1}{2}mr^2\frac{R+r}{r}\omega\hat{\mathbf{z}} + m(R+r)(R+r)\omega\hat{\mathbf{z}} \\ &= m(r+R)\left(\frac{3}{2}r + R\right)\omega\hat{\mathbf{z}}.\end{aligned}$$

Överbetygsuppgifter

---

6. **Kortfattad lösningsskiss**

- I ett kroppsfixt koordinatsystem ($\xi\eta\zeta$, med ζ i huvudsymmetri-axlens riktning) blir tröghetsmatrisen diagonal, Med totala massan $M = 4m$ fås

$$I_0 \equiv I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta} = \frac{m}{3}\left(2b^2 + L^2\right); \qquad I_\zeta \equiv I_{\zeta\zeta} = \frac{4}{3}mb^2.$$

- Fri precession ger

$$\Omega = \frac{I_\zeta p}{(I_0 - I_\zeta)\cos\theta},$$

där p är spinnet, Ω presecessionshastigheten och θ är den fixa vinkeln mellan dessa vektorer.

- Retrograd precession fås därför då $I_\zeta > I_0$.

Svar: $(L/b) < \sqrt{2}$.

7. **Kortfattad lösningsskiss**

- Välj kilens horisontella läge relativt en punkt i planet som en generaliserad koordinat (y), samt massans läge (x) relativt kilens sluttande plan som den andra. Notera att den sistnämnda inte är given i ett inertialsystem och att det blir viktigt att tänka på när vi tecknar den kinetiska energin.

- Potentiella energin blir $V = -mgx\sin\alpha$.
- Den kinetiska energin är

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 - 2\dot{y}\dot{x}\cos\alpha + \dot{x}^2\cos^2\alpha + \dot{x}^2\sin^2\alpha) + \frac{1}{2}M\dot{y}^2.$$

- Den eftersökta accelerationen fås från Lagranges ekvationer

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

  vilket ger

$$\begin{aligned} y: &\quad \ddot{y} = \frac{m}{M+m}\cos\alpha\ddot{x} \\ x: &\quad \ddot{x} = \frac{(M+m)}{M+m\sin^2\alpha}\sin\alpha g \end{aligned}$$

- Vi noterar att Lagrangianen är oberoende av y-koordinaten. Detta betyder att systemet uppvisar en translationssymmetri i det horisontella planet, dvs rörelsen beror inte på var systemet befinner sig i y-led. Konsekvensen blir att $\partial L/\partial y = 0$ och därmed att $\partial L/\partial \dot{y}$ är en röreslekonstant. Det sistnämnda är en generaliserad rörelsemängd och motsvarar i detta fall systemets totala rörelsemängd i horisontell riktning.