Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM521 och 520)

Tid och plats:	Tisdagen den 27 augusti 2013 klockan 14.00-18.00.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta samt en egenhändigt handskriven A4 med valfritt innehåll (bägge sidor).
Examinator:	Christian Forssén.
Jourhavande lärare:	Christian Forssén (031–772 3261).

Betygsgränser: Tentamen består av sex uppgifter. För att bli godkänd krävs minst 8 poäng på uppgifterna 1–4 (inklusive eventuell bonuspoäng). För de som har klarat föregående krav bestäms slutbetyget av poängsumman från uppgifterna 1–4 samt 6–7 plus eventuell bonuspoäng enligt följande: 8–17 poäng ger betyg 3, 18–25 poäng ger betyg 4, 26+ poäng ger betyg 5.

FFM520: För studenter som skriver FFM520 gäller att de skriver samma tentamen som FFM521 med följande tillägg: Har man inte gjort inlämningsuppgiften 2012 eller 2013 skall man istället lösa en extra uppgift (uppgift 5, 4p). För dessa studenter är kravet för godkänt 10p på uppgifterna 1–5 inklusive eventuell bonuspoäng.
Betygsgränser: 10–19 (betyg 3), 20–27 (betyg 4), 28+ (betyg 5).

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

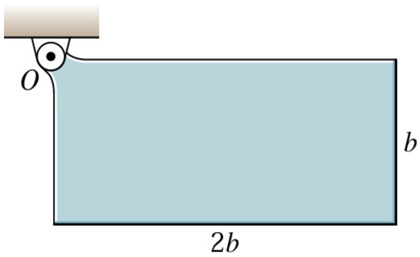
- För full (4 eller 6) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) ger 3-4 poängs avdrag om orimligheten pekas ut; annars fullt poängavdrag.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Lösningsförslag som är ofullständiga eller innehåller felaktigheter, men där en tydlig lösningsstrategi har presenterats, genererar i allmänhet det lägre av poängavdragen ovan.

Lycka till!

Obligatorisk del

1. En homogen, rektangulär platta med massa m släpps från vila i det illustrerade läget. Bestäm den maximala vinkelhastigheten som plattan har under den efterföljande rörelsen. Försumma friktion i leden. *(4 poäng)*



2. Besvara följande flervalsfrågor. Svaren behöver ej motiveras. Ett poäng för varje rätt svar utöver två. Dvs: 0–2 rätt = 0p, 3 rätt = 1p, 4 rätt = 2p, osv. *(4 poäng)*

   (a) Hur många frihetsgrader har en stel kropp som kan röra sig i planet och vars masscentrum är tvingat att röra sig längs en cirkulär bana?

1: 1	X: 2	2: 3

   (b) En partikel rör sig med konstant hastighet i ett plan. Partikelns läge beskrivs med polära koordinater (r, φ). Vid ett visst ögonblick är $r = 4.00$ m, $\dot{r} = 4.00$ m/s, $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0.750$ rad/s. Hur stor är partikelns fart?

1: 4.75 m/s	X: 5.0 m/s	2: 7.0 m/s

   (c) En bil med massan 1.0 ton kör rakt norrut med farten 100 km/h på 30° sydlig bredd. Åt vilket håll är corioliskraften riktad?

1: västerut	X: österut	2: ingenstans, den är noll

   (d) Ett hjul som rullar utan att glida på ett plant underlag påverkas i allmänhet av

1: en friktionskraft, som dock inte utför något arbete.	X: ingen friktionskraft.	2: en friktionskraft, som utför ett negativt arbete.

(e) Betrakta ett roterande koordinatsystem $\xi\eta\zeta$ (högersystem) som roterar med vinkelhastigheten $\vec{\Omega} = \Omega\hat{\zeta}$. Vad blir tidsderivatan av enhetsvektorn i ξ-riktningen?

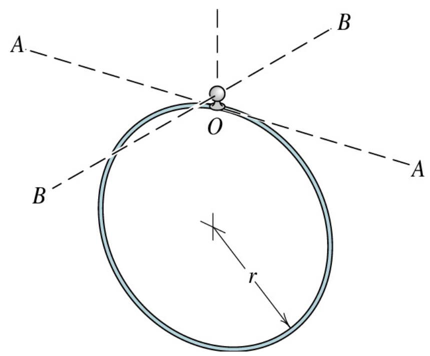
1: $\dot{\hat{\xi}} = \Omega\hat{\zeta}$ X: $\dot{\hat{\xi}} = \Omega\hat{\eta}$ 2: $\dot{\hat{\xi}} = 0$

(f) Resonansfrekvensen för en driven svängningsrörelse med svag dämpning är

1: större X: lika stor 2: mindre

än resonansfrekvensen för motsvarande system utan dämpning.

3. En cirkulär ring med massa m och radie r är upphängd så att den kan rotera helt fritt kring punkten O. Försumma storlek, massa och friktion hos denna infästning. Betrakta små svängningar runt axeln $A - A$, respektive runt axeln $B - B$. Vad blir kvoten mellan vinkelfrekvenserna för dessa två svängningsrörelser? *(6 poäng.)*



4. Tyngdaccelerationen som uppmäts i ett jordfixt koordinatsystem betecknas med $\mathbf{g}$. Pga jordens rotation skiljer sig $\mathbf{g}$ från den *verkliga* gravitationsaccelerationen $\mathbf{g}_0$ som hade uppmätts om jorden inte hade roterat. Antag (något förenklat och felaktigt) att jorden är ett perfekt klot och räkna ut

(a) Skillnaden i storlek $g - g_0$ som en funktion av latituden ϕ;

(b) Den maximala vinkeln mellan $\mathbf{g}$ och $\mathbf{g}_0$ samt vid vilken latitud denna inträffar.

(6 poäng.)

Extrauppgift

- Studenter på FFM521 (dvs inskrivna fr.o.m ht 2012) skall **inte** göra denna uppgift.
- Studenter på FFM520 som har gjort inlämningsuppgiften på stelkroppsrörelse i rummet år 2012 eller 2013 skall **inte** lösa denna uppgift. Men ange gärna på ett tentamensblad, med uppgiftens nummer, vilket år du har gjort inlämningsuppgiften.
- Studenter på FFM520 som inte har blivit godkända på uppgiften 2012 eller 2013, kan göra denna uppgift som en del av den grundläggande delen på tentamen.

5. Betrakta en boll med radie R och massa m som glider (helt utan att rulla) med farten v_0 på en horisontell yta. Bollen har tröghetsmomentet $\beta m R^2$ runt en axel genom masscentrum ($\beta < 1$). Friktionen gör att bollen börjar rulla. Härled bollens fart i det läge då den rullar utan att glida. Härled också hur mycket kinetisk energi den har förlorat fram till det läget. *(4 poäng.)*

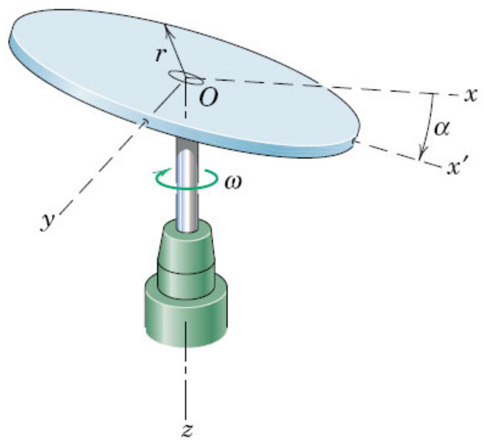
Överbetygsuppgifter

6. En homogen skiva (massa m och radie r) är monterad på en vertikal axel med en vinkel α mellan skivans plan och rotationsplanet (se figur).

   (a) Ge ett uttryck för skivans rörelsemängdsmoment m.a.p. punkten O. (4p)

   (b) Beräkna vinkeln mellan den vertikala axeln och rörelsemängdsmomentsvektorn då $\alpha = 45°$. (2p)

   (6 poäng.)



7. En tunn stav med längden $2l$ rör sig i rummet. Vi väljer fem generaliserade koordinater enligt följande: kartesiska koordinater (x, y, z) för masscentrums läge samt sfäriska vinkelkoordinater (θ, ϕ) för stavens riktning. Detta betyder alltså att stavens ena ände har de sfäriska koordinaterna (l, θ, ϕ) relativt masscentrum.

   En kraft $\vec{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}$ verkar på just denna ände. Härled ett uttryck för denna krafts generaliserade kraftkomponenter och tolka dessa i termer av krafter och vridmoment. *(6 poäng.)*

Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM521 och 520)

Tid och plats: Tisdagen den 27 augusti 2013 klockan 14.00-18.00.
Lösningsskiss: Christian Forssén

Obligatorisk del

---

1. **Lösningsskiss**

   - Använd arbete-energi principen.
   - För rotationsrörelse runt en fix punkt kan vi använda att $T = I_O\omega^2/2$.
   - Det blir då uppenbart att maximal rotationshastighet fås när den potentiella energin är som minst, dvs när skivans masscentrum befinner sig rakt nedanför O.
   - Den enda svårigheten blir då att räkna ut I_O (använd Steiners sats), samt höjdskillnaden h mellan start- och slutlägen. Vi finner att
   $$I_O = \frac{5}{3}mb^2, \quad h = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b.$$
   - Insättning i $V_1 + T_1 = V_2 + T_2$ ger slutligen
   $$\omega = \sqrt{\frac{3g}{5b}\left(\sqrt{5}-1\right)},$$
   vilket lätt kontrolleras för rätt dimension.

2. **Rätt svarsalternativ:**

   (a) X
   (b) X
   (c) 1
   (d) 1
   (e) X
   (f) 2

3. **Lösningsskiss**

- Rörelseekvationen för små svängningar i detta fall är

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I}\theta = 0,$$

  där I är det relevanta tröghetsmomentet för den aktuella rotationsaxeln och d är avståndet till masscentrum. Vi ser alltså att $\omega \propto 1/\sqrt{I}$

- Avståndet $d = r$ i bägge fall.
- För att finna tröghetsmomenten är det enklast att använda Steiners sats

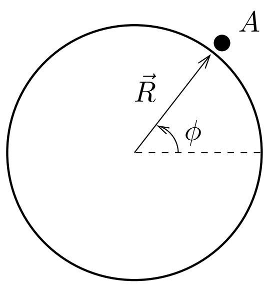
$$I_{A-A} = mr^2/2 + mr^2 = 3mr^2/2,$$
$$I_{B-B} = mr^2 + mr^2 = 2mr^2.$$

- Slutligen får vi alltså att

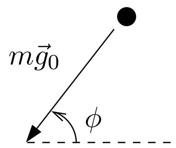
$$\frac{\omega_{A-A}}{\omega_{B-B}} = \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

  Vi noterar också att en dimensionsanalys enkelt ger att vårt sluttryck ej kan bero på några av systemparametrarna: m, r, g, och att en numeriska kvot alltså var förväntad.

4. Kroppen A befinner sig på jordytan (vid latitud ϕ, se figur).



Den upplever en gravitationskraft som verkar rakt mot jordens masscentrum. Vi kan frilägga kroppen A, och har alltså bara en verklig kraft



Vi tecknar Newton II: $m\vec{g}_0 = m\vec{a}_A$, där $\vec{a}_A$ alltså är A:s absoluta acceleration. Notera att $\vec{a}_A = \vec{g}_0$ alltså är den acceleration som vi skulle uppmäta i ett icke-roterande koordinatsystem.

Låt oss istället betrakta kroppen A på ett roterande jordklot (vinkelhastigheten $\vec{\Omega}$ pekar norrut). Vi har fortfarande samma rörelseekvation: $m\vec{g}_0 = m\vec{a}_A$. Men vi kommer att observera en rörelse relativt jordytan, dvs en acceleration $\vec{a}_{\text{rel}}$ relativt ett roterande koordinatsystem. Den absoluta accelerationen kan relateras till denna via följande samband

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \times \vec{R} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) + \vec{a}_{\text{rel}}.$$

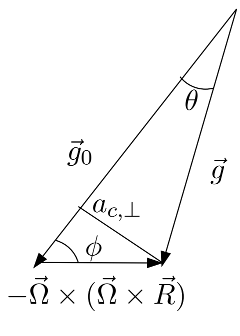
Med jordens mittpunkt B som origo i ett inertialsystem, och $\vec{v}_{\text{rel}} = 0$, $\alpha = 0$ får vi alltså från rörelseekvationen att

$$m\vec{g}_0 = m\left[\vec{a}_{\text{rel}} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R})\right],$$

vilket ger den observerade accelerationen

$$\vec{g} \equiv \vec{a}_{\text{rel}} = \vec{g}_0 - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}).$$

Vi noterar att $\left|\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R})\right| = \Omega^2 R \sin(\pi/2 - \phi) = \Omega^2 R \cos\phi$, och illustrerar de relevanta vektorerna och vinklarna med en figur



Vi kan använda cosinussatsen för att relatera längden på vektorerna

$$g^2 = g_0^2 + (\Omega^2 R \cos\phi)^2 - 2g_0(\Omega^2 R \cos\phi)\cos\phi.$$

Vi introducerar nu $x \equiv \Omega^2 R/g_0$, och noterar att $x \ll 1$ (med numeriska värden: $x \approx 0.0005$). Vi finner därför att

$$\frac{g^2}{g_0^2} = 1 - 2x\cos^2\phi + O(x^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{g}{g_0} = 1 - x\cos^2\phi + O(x^2).$$

I uppgiften eftersöktes $g - g_0 \approx -g_0 x \cos^2\phi$.

(b)-uppgiften gick ut på att finna den maximala vinkeln mellan vektorerna $\vec{g}$ och $\vec{g}_0$. Vi noterar från figuren ovan att vinkeln θ blir som störst när $a_{c,\perp} = (\Omega^2 R\cos\phi)\sin\phi = \Omega^2 R\sin(2\phi)/2$ är maximal. Detta inträffar uppenbarligen när $\phi = 45°$ (vilket känns logiskt).

Med $g \approx g_0(1 - x\cos^2\phi)$ får vi

$$\theta \approx \sin\theta \approx \frac{\Omega^2 R\sin(2\phi)/2}{g_0(1 - x\cos^2\phi)} = \frac{x\sin(2\phi)}{2(1 - x\cos^2\phi)}.$$

Vid latituden 45° blir detta $\theta_{\max} \approx x/2 + O(x^2)$ ($\approx 0.015°$).

Extrauppgift

---

5. (Enbart ledningar och svar)

Vi kan antingen teckna två rörelseekvationer (N-II för translationsrörelse samt vridmomentsekvation), eliminera den okända friktionskraften från dessa, och integrera från start till tiden då bollen har slutat att glida. Notera att friktionskraften inte är given ($F_f \leq \mu N$).

Alternativt kan man använda sig av konservering av rörelsemängdsmoment m.a.p. en punkt på marken.

I bägge fall får vi svaret

$$v_f = \frac{v_0}{1+\beta},$$

där $\beta = 2/5$ för ett homogent klot. Notera att friktionskraften uträttar ett negativt arbete och att den totala energin kommer at minska. Eftersom bollen rullar utan att glida gäller att $\omega_f = v_f/R$ och vi förändringen i kinetisk energi fås enkelt som

$$\begin{aligned}\Delta T &= \frac{1}{2}mv_0^2 - \left(\frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega_f^2\right) = \frac{1}{2}mv_0^2\left[1 - \frac{1}{(1+\beta)^2} - \frac{\beta}{(1+\beta)^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2\frac{\beta}{(1+\beta)}.\end{aligned}$$

Vi kan notera att mängden kinetisk energi som förloras beror på storleken på tröghetsmomentet $\bar{I} = \beta m R^2$. Desto större β är, ju mer energi förloras.

Överbetygsuppgifter

---

6. **Lösningsstrategi**

   - Teckna skivans rotationsvektor samt tröghetsmatris i ett kroppsfixt koordinatsystem
   - Teckna ett samband mellan dessa kroppsfixa axlar och det rumsfixa koordinatsystemet xyz.
   - Den sökta vinkeln fås genom skalärprodukten $\cos\beta = \frac{\vec{L}_O}{L_O}\cdot\hat{z}$.

   (a) Rörelsemängdsmomenten uttryckt i det rumsfixa koordinatsystemet

   $$\vec{L}_O = \frac{1}{4}mr^2\omega\left[(-\sin\alpha\cos\alpha)\hat{x} + (\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha)\hat{z}\right]$$

   (b) Vinkeln $\beta = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 18^o$.

7. (Enbart svar)

   $$\mathcal{F}_x = F_x, \quad \mathcal{F}_y = F_y, \quad \mathcal{F}_z = F_z,$$

   dvs dessa tre motsvarar de kartesiska kraftkomponenterna. Vidare har vi

   $$\mathcal{F}_\theta = l\left(F_x\cos\theta\cos\phi + F_y\cos\theta\sin\phi - F_z\sin\theta\right),$$

   dvs $\hat{\phi}$-komponenten av vridmomentet m.a.p. masscentrum, där $\hat{\phi}$-riktningen är vinkelrät mot vertikalen (z) samt mot stavens riktning. Slutligen har vi

   $$\mathcal{F}_\phi = l\sin\theta\left(-F_x\sin\phi + F_y\cos\phi\right),$$

där detta motsvarar den vertikala (z) komponenten av vridmomentet m.a.p. masscentrum.