Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM521 och 520)

Tid och plats:	Måndagen den 27 maj 2013 klockan 14.00-18.00 i M.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta samt en egenhändigt handskriven A4 med valfritt innehåll (bägge sidor).
Examinator:	Christian Forssén.
Jourhavande lärare:	Christian Forssén (031–772 3261) samt Emil Ryberg.

Betygsgränser: Tentamen består av sex uppgifter. För att bli godkänd krävs minst 8 poäng på uppgifterna 1-4 (inklusive eventuell bonuspoäng). För de som har klarat föregående krav bestäms slutbetyget av poängsumman från uppgifterna 1-6 plus eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgifterna enligt följande gränser:
8-17 poäng ger betyg 3, 18-25 poäng ger betyg 4, 26+ poäng ger betyg 5.

FFM520: För studenter som skriver FFM520 gäller att de skriver samma tentamen som FFM521 med följande tillägg: Har man inte gjort inlämningsuppgiften 2012 eller 2013 gäller dessutom att man skall göra en extra uppgift (4p). Isf krävs totalt 10p på uppgifterna 1-4 + extrauppgift (inklusive eventuell bonuspoäng) för godkänt, annars samma betygsgränser som ovan.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

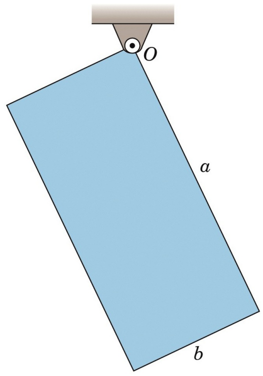
- För full (4 eller 6) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) ger 3-4 poängs avdrag om orimligheten pekas ut; annars fullt poängavdrag.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Lösningsförslag som är ofullständiga eller innehåller felaktigheter, men där en tydlig lösningsstrategi har presenterats, genererar i allmänhet det lägre av poängavdragen ovan.

Lycka till!

Obligatorisk del

1. En homogen rektangel med sidlängderna a och b samt massa M svänger runt en horisontell axel genom ett av dess hörn (se figur). Beräkna den naturliga vinkelfrekvensen för små svängningar. *(4 poäng.)*



2. Betrakta en stel kropp med total massa M som har tröghetsmatrisen $\bar{\mathbb{I}}$ med avseende på ett kartesiskt koordinatsystem xyz med origo i masscentrum. Använd beteckningen $\mathbb{I}^P$ för tröghetsmatrisen i samma koordinatsystem, men med avseende på en punkt P. Punkten P är förskjuten med $\vec{r}_P = x_p\hat{\mathbf{i}} + y_p\hat{\mathbf{j}} + z_p\hat{\mathbf{k}}$ relativt masscentrum. Utgå från definitionen på tröghetsmatrisen och härled samband mellan:

   (i) huvudtröghetsmomentet I^P_{xx} och matriselement i $\bar{\mathbb{I}}$,

   (ii) deviationsmomentet I^P_{xz} och matriselement i $\bar{\mathbb{I}}$.

   Sådana uttryck utgör en generalisering av parallellaxelteoremet för tredimensionella objekt. *(4 poäng)*

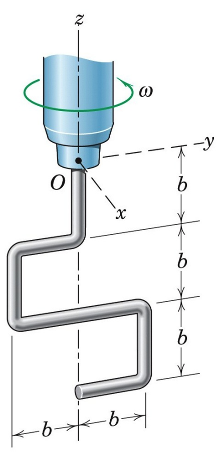
3. En boll med massa m, radie r och tröghetsmoment βmr^2 (med avseende på en horisontell axel genom masscentrum) rullar nerför en fixerad sfär med radien R. Bollen startar från vila på toppen av sfären. Friktionen är tillräckligt stor för att förhindra glidning. Antag att $r \ll R$ och räkna ut för vilken vinkel θ som bollen släpper kontakten med sfärens yta. *(6 poäng.)*

4. En projektil ges en utgångshastighet v_0 riktad uppåt från jordytan med vinkeln $\theta = 30°$ mot vertikalen, och rör sig därefter i en parabelbana. Dess högsta höjd är mycket mindre än jordradien. Rörelsen betraktas (som vanligt) i ett koordinatsystem som följer med jordens rotation. Antag att rörelsen sker vid ekvatorn och att projektilen rör sig i riktning NV. Ange Corioliskraften, till både storlek och riktning, i de tre lägena: (i) precis efter uppskjutningen, (ii) vid den högsta höjden och (iii) strax före nedslaget. *(6 poäng.)*

Extrauppgift

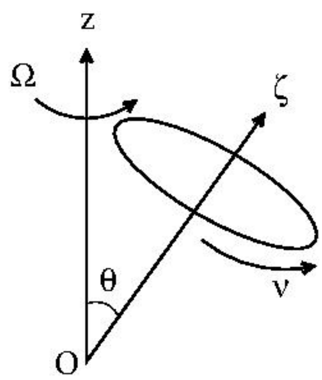
- Studenter på FFM521 (dvs inskrivna ht 2012) skall **inte** göra denna uppgift.
- Studenter på FFM520 som har gjort inlämningsuppgiften på stelkroppsrörelse i rummet år 2012 eller 2013 skall **inte** lösa denna uppgift. Men ange på ett tentamensblad, med uppgiftens nummer, vilket år du har gjort inlämningsuppgiften.
- Studenter på FFM520 som inte har gjort inlämningsuppgiften 2013, eller inte har blivit godkända på uppgiften 2012, kan göra denna uppgift som en del av den grundläggande delen på tentamen.

520. En schweizisk chokladblandare är konstruerad av en böjd stav med total längd $7b$ och linjedensitet ρ (se figur). Innan Rodolphe Lindt doppar den i sin chokladblandning roteras blandaren luften (bortse från luftmotstånd) med en konstant vinkelhastighet $\vec{\omega} = \omega\hat{\mathbf{k}}$, dvs runt z-axeln. Beräkna vridmomentet $\vec{M}_O$ som verkar på staven från basen vid punkten O. *(4 poäng.)*

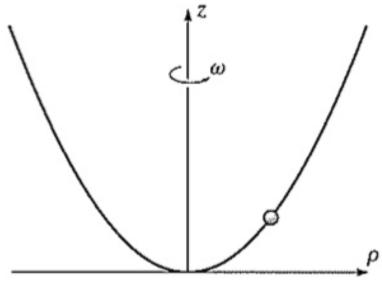


Överbetygsuppgifter

5. En tung snurra roterar runt en fix punkt O ett avstånd L från dess tyngdpunkt. Snurran spinner med spinnhastigheten ν runt sin symmetriaxel, som pekar en fix vinkel θ relativt vertikalaxeln, samtidigt som den precesserar runt vertikalaxeln med rotationshastigheten Ω. Tröghetsmomentet runt symmetriaxeln är mindre än det runt de vinkelräta huvudtröghetsaxlarna $I_{\zeta\zeta} \equiv I_\zeta < I_\perp$. Finn den minimala spinnhastighet ν för vilken denna reguljära precessionsrörelse överhuvudtaget är möjlig. *(6 poäng.)*



6. En kula med massa m kan röra sig friktionslöst längs en vajer som är böjd till formen av en parabel ($z = k\rho^2$) och som roterar med konstant vinkelhastighet ω runt vertikalaxeln. Använd cylindriska koordinater och teckna Lagrangianen med ρ som generaliserad koordinat. Finn rörelseekvationen och identifiera eventuella jämviktslägen, dvs positioner där kulan varken glider upp eller ner längs vajern. Diskutera huruvida de jämviktslägen du finner är stabila eller inte.*(6 poäng.)*



Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

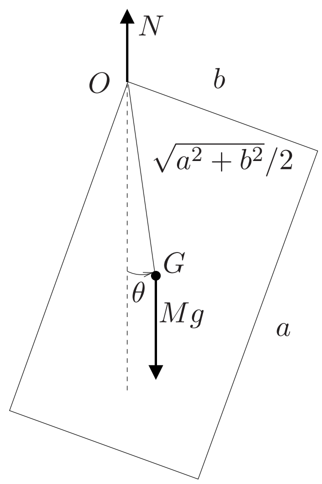
Tid och plats: Måndagen den 27 maj 2013 klockan 14.00-18.00 i M.
Lösningsskiss: Christian Forssén

Obligatorisk del

---

1. **Lösningsstrategi:**

   - Använd vridmomentsekvationen. Var noga med positiv rotationsriktning.
   - Vi behöver kroppens tröghetsmoment map axel genom O.



Vi använder Steiners sats för att teckna tröghetsmomentet (vid plan rörelse) map en axel genom hörnet O

$$I_O = \bar{I} + M\frac{a^2+b^2}{4} = M\frac{a^2+b^2}{3},$$

där vi har använt tabellerat värde $M(a^2+b^2)/12$ på tröghetsmomentet för en rektangel map en axel genom masscentrum.

Vi definierar positiv rotationsriktning moturs. Vridmomentsekvationen map O blir då

$$-Mg\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\sin\theta = M\frac{a^2+b^2}{3}\ddot{\theta}.$$

Vi betraktar små vinklar och lineariserar ovanstående rörelseekvation $\sin\theta \approx \theta$. Vi finner att

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2\sqrt{a^2+b^2}}\theta = 0.$$

Den sökta vinkelfrekvensen är alltså $\omega_n = \sqrt{\frac{3g}{2\sqrt{a^2+b^2}}}$, vilket har rätt dimension $[\omega_n] = \mathrm{tid}^{-1}$ samt även reducerar till det kända resultatet $\sqrt{3g/2l}$ för en svängande stav då a eller b går mot noll.

2. Följande vektorer och samband visas enkelt med en tydlig figur:

$\vec{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$	Lägesvektor från P till ett allmänt infinitesimalt masselement.
$\vec{\rho} = \bar{x}\hat{\mathbf{i}} + \bar{y}\hat{\mathbf{j}} + \bar{z}\hat{\mathbf{k}}$	Lägesvektor från masscentrum till samma masselement.
$\vec{r}_P = x_p\hat{\mathbf{i}} + y_p\hat{\mathbf{j}} + z_p\hat{\mathbf{k}}$	Lägesvektor från masscentrum till P.

Detta betyder att $x = \bar{x} - x_P$, osv.

Matriselementen för tröghetsmatrisen med avseende på $\hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{k}}$ och origo i P blir exempelvis

$$\begin{aligned} I_{xx}^P &= \int (y^2+z^2)dm = \int (\bar{y}-y_P)^2 + (\bar{z}-z_P)^2 dm \\ &= \int (\bar{y}^2+\bar{z}^2)dm + \int (y_P^2 + z_P^2)dm = \bar{I}_{xx} + M(y_P^2+z_P^2), \end{aligned}$$

där vi har utnyttjat att (x_P, y_P, z_P) är konstanter, samt definitionen av masscentrum som säger att $\int \bar{y}dm = \int \bar{z}dm = 0$.

Deviationsmomenten fås på liknande sätt

$$\begin{aligned} I_{xz}^P &= \int xzdm = \int (\bar{x}-x_P)(\bar{z}-z_P)dm = \int \bar{x}\bar{z}dm + \int x_P z_P dm \\ &= \bar{I}_{xz} + M x_P z_P. \end{aligned}$$

3. **Lösningsstrategi:**

- Kraftekvationen i normalriktningen kommer att ge oss ett uttryck för normalkraften från sfären på bollen. Detta kommer att innehålla kinematiska uttryck för bollens acceleration.
- Rullningsvillkoret ger oss ett samband mellan bollens tangentiella hastighet och dess rotation.

- Energiprincipen ger oss ett annat uttryck för bollens hastighet. Notera att bollen utför både translations- och rotationsrörelse.

Vi definierar vinkeln θ för bollens läge relativt vertikalaxeln mätt från sfärens mittpunkt. Bollens masscentrum utför en cirkelrörelse med radie $R + r \approx R$. Ett friläggningsdiagram ritas och gör, tillsammans med uttrycket för normalkomponenten av bollens acceleration, att vi kan teckna NII i normalriktningen

$$mg\cos\theta - N = m\frac{v^2(\theta)}{R},$$

där N är normalkraften från sfären. Villkoret att $N = 0$ ger alltså

$$\frac{v^2(\theta)}{R} = g\cos\theta$$

Nu utnyttjar vi arbete-energi-principen för att finna ytterligare ett uttryck för hastigheten. Notera att normalkraften inte utför något arbete då den verkar på den momentant stillastående kontaktpunkten.

$$mgR(1-\cos\theta) = \frac{mv^2}{2} + \frac{\beta m r^2\omega^2}{2}.$$

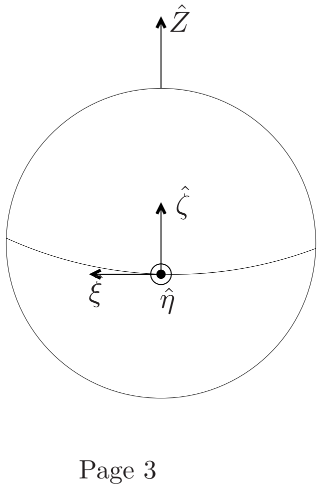
Rullningsvillkoret ger dessutom att $v = r\omega$ så att

$$\frac{1}{2}(1+\beta)mv^2 = mgR(1-\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad v^2(\theta) = \frac{2gR(1-\cos\theta)}{1+\beta}.$$

Insättning i kraftekvationen ger att bollen lämnar sfären då

$$\cos\theta = \frac{2}{3+\beta}.$$

4. Vi inför ett koordinatsystem $\xi\eta\zeta$, med riktningar enligt figur, som är fixerat på jordytan och alltså roterar med vinkelhastigheten $\vec{\Omega} = \Omega\hat{Z} = \Omega\hat{\zeta}$.



Projektilens hastighet relativt detta roterande koordinatsystem för de tre specificerade lägena:

(i) En hastighetskomponent i jordplanet, NV riktning, samt en vertikal komponent: $\vec{v}_{\text{rel}} = v_0 \left[\sin\theta(\hat{\xi}/\sqrt{2} + \hat{\zeta}/\sqrt{2}) + \cos\theta\hat{\eta} \right]$.

(ii) Den vertikala hastighetskomponenten är noll, medan den i jordplanet är konserverad då vi inte har några krafter i detta plan: $\vec{v}_{\text{rel}} = v_0 \left[\sin\theta(\hat{\xi}/\sqrt{2} + \hat{\zeta}/\sqrt{2}) \right]$.

(iii) Samma som (i), men med negativ vertikal komponent: $\vec{v}_{\text{rel}} = v_0 \left[\sin\theta(\hat{\xi}/\sqrt{2} + \hat{\zeta}/\sqrt{2}) - \cos\theta\hat{\eta} \right]$.

Vi betraktar fallet då $\theta = 30^\circ$, vilket betyder att $\sin\theta = 1/2$ och $\cos\theta = \sqrt{3}/2$. I ovanstående uttryck har vi försummat den lilla förändring som kommer av den nollskilda Coriolisaccelerationen. Denna accelerationsterm ges av $2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{\text{rel}}$. Den sökta, fiktiva *Corioliskraften* är $-2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{\text{rel}}$. Vi noterar att $\vec{\Omega}$ är riktad i ζ-led och får följande uttryck efter att ha utfört kryssprodukterna

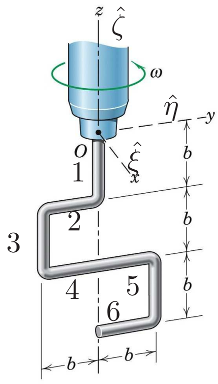
(i) $\vec{F}_{\text{cor}} = m\Omega v_0 \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\eta} + \sqrt{3}\hat{\xi} \right]$,

(ii) $\vec{F}_{\text{cor}} = -m\Omega v_0 \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\eta}$

(iii) $\vec{F}_{\text{cor}} = m\Omega v_0 \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\eta} - \sqrt{3}\hat{\xi} \right]$.

Extrauppgift

520. Chokladblandaren utför en rörelse i parallella plan med konstant vinkelhastighet $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$. Vi använder ett kroppsfixt koordinatsystem $\xi\eta\zeta$ som i det aktuella ögonblicket sammanfaller med xyz.



Rörelsemängdsmomentet är konstant i det kroppsfixa koordinatsystemet: $\vec{L}_O = -I_{\xi\zeta}\omega_\zeta\hat{\xi} - I_{\eta\zeta}\omega_\zeta\hat{\eta} + I_{\zeta\zeta}\omega_\zeta\hat{\zeta}$. Vridmomentsekvationerna map O ($\vec{M}_O = \dot{\vec{L}}_O = \left(\dot{\vec{L}}_O\right)_{\xi\eta\zeta} + \vec{\omega} \times \vec{L}_O$) blir

$$\sum M_\xi = I_{\eta\zeta}\omega_\zeta^2,$$
$$\sum M_\eta = -I_{\xi\zeta}\omega_\zeta^2,$$
$$\sum M_\zeta = 0,$$

där vi har utnyttjat att $\dot{\vec{\omega}} = 0$, $\omega_\xi = \omega_\eta = 0$. Vi noterar att $I_{\xi\zeta} = 0$ eftersom kroppen ligger i $\eta\zeta$-planet. Därmed har vi att $M_\eta = 0$. Vi delar upp kroppen i sex delar och räknar ut deras bidrag till $I_{\eta\zeta}$

1 $I_{\eta\zeta} = 0$, ty $\eta = 0$.
2 $I_{\eta\zeta} = \int_2 \eta\zeta dm = \int_{-b}^{0} \eta(-b)\rho d\eta = \rho b^3/2$,
3 $I_{\eta\zeta} = \int_3 \eta\zeta dm = \int_{-2b}^{-b} \zeta(-b)\rho d\eta = 3\rho b^3/2$,
4 $I_{\eta\zeta} = 0$, pga symmetri
5 $I_{\eta\zeta} = \int_5 \eta\zeta dm = \int_{-3b}^{-2b} \zeta(b)\rho d\eta = -5\rho b^3/2$,
6 $I_{\eta\zeta} = \int_6 \eta\zeta dm = \int_0^{b} \eta(-3b)\rho d\zeta = -3\rho b^3/2$.

Det totala deviationsmomentet blir $I_{\eta\zeta} = -2\rho b^3$. Vi finner alltså att det totala vridmomentet map O blir

$$\vec{M}_O = -2\rho b^3 \omega^2 \hat{\xi},$$

där $\hat{\xi} = \hat{\mathbf{i}}$ i det aktuella läget.

Överbetygsuppgifter

---

5. Symmetriaxeln pekar snett uppåt (vinkeln θ mot vertikalen). Introducera axlarna $\xi\eta\zeta$ med ζ pekandes längs spinnaxeln (snett uppåt) och ξ-axeln pekandes snett neråt höger. Tröghetsmatrisen i $\xi\eta\zeta$-systemet

$$\begin{aligned} I_{\zeta\zeta} &= I_\zeta \\ I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta} &= I_\perp > I_\zeta. \end{aligned}$$

Rotationer och rörelsemängdsmoment:

$$\vec{\nu} = \nu\hat{\zeta}, \tag{1}$$

$$\vec{\Omega} = \Omega\hat{\mathbf{k}} = \Omega\left(\cos\theta\hat{\zeta} - \sin\theta\hat{\xi}\right), \tag{2}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\nu} = -\Omega\sin\theta\hat{\xi} + (\nu + \Omega\cos\theta)\hat{\zeta}, \tag{3}$$

$$\vec{L}_O = -I_\perp\Omega\sin\theta\hat{\xi} + I_\zeta(\nu + \Omega\cos\theta)\hat{\zeta}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}}_O &= \vec{\Omega} \times \vec{L}_O = \hat{\eta}\left[-I_\perp\Omega^2\cos\theta\sin\theta + I_\zeta\Omega\sin\theta(\nu + \Omega\cos\theta)\right] \\ &= \hat{\eta}\Omega\sin\theta\left(I_\zeta\nu + (I_\zeta - I_\perp)\Omega\cos\theta\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Jämför detta med

$$\vec{M}_O = mgL\sin\theta\hat{\eta}$$

Rörelseekvationen ger villkoret

$$mgL = \Omega\left[I_\zeta\nu + (I_\zeta - I_\perp)\Omega\cos\theta\right].$$

Här kan vi lösa ut $\nu(\Omega)$ och finna dess minimum. Alternativt kan vi studera lösningarna för precessionshastigheten. Det sistnämnda ger

$$\Omega_\pm = \frac{I_\zeta\nu}{2(I_\perp - I_\zeta)\cos\theta}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mgL(I_\perp - I_\zeta)\cos\theta}{I_\zeta^2\nu^2}}\right].$$

Vi ser att vi har reella lösningar enbart då

$$\frac{4mgL(I_\perp - I_\zeta)\cos\theta}{I_\zeta^2\nu^2} \leq 1.$$

I vårt fall gäller att $I_\perp > I_\zeta$ och $0 < \cos\theta < 1$. Villkoret blir då

$$\nu \geq \frac{\sqrt{4mgL(I_\perp - I_\zeta)\cos\theta}}{I_\zeta}.$$

6. Vi använder Lagrangeformalismen och väljer ρ som vår generaliserade koordinat. Uttrycken för potentiell och kinetisk energi blir

$$\begin{aligned} V &= mgz = mgk\rho^2 \\ T &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \omega^2\rho^2 + 4k^2\rho^2\dot{\rho}^2), \end{aligned}$$

där vi har utnyttjat att $\dot{x} = \dot{\rho}$, $\dot{y} = \omega\rho$, $\dot{z} = (\partial z/\partial\rho)\dot{\rho}$.

Lagrangianen är $L = T - V$ och vi kan teckna Lagranges ekvation i ρ-led

$$(1 + 4k^2\rho^2)\ddot{\rho} + 4k^2\rho\dot{\rho}^2 + (2gk - \omega^2)\rho = 0.$$

Vad gäller jämviktslägen visar vi två möjliga resonemang:

Alternativ 1: Vi vill finna situationer då $\dot{\rho} = 0, \ddot{\rho} = 0$. Vi ser direkt att detta kan gälla för alla ρ då $\omega^2 = 2gk$. Just därför är detta jämviktsläge instabilt (förutom vid $\rho = 0$ där den kinetiska energin har sitt minimum).

Det andra jämviktsläget har vi då $\rho = 0$. Vi ansätter lösningar $\rho(t) = 0 + \varepsilon(t)$ och studerar rörelseekvationen för små ε (Taylorutveckling). Detta ger den välkända differentialekvationen

$$\ddot{\varepsilon} + (2gk - \omega^2)\varepsilon = 0,$$

vilket ger en (stabil) harmonisk svängningsrörelse om $\omega^2 < 2gk$ och en (instabil) växande exponentialfunktion om $\omega^2 > 2gk$.

Alternativ 2: Skriv Lagrangianen på formen $L(\rho, \dot{\rho}) = a(\rho)\dot{\rho}^2 - V(\rho)$, där $V(\rho) = \frac{m}{2}(2gk - \omega^2)\rho^2$ är en effektiv potential. Jämviktslägena finner vi då $\partial V/\partial\rho = 0$, och stabiliteten kan utrönas ur tecknet på $\partial^2 V/\partial\rho^2$. Jämviktsläget $\omega^2 = 2gk$ motsvarar en sadelpunkt. Där gäller att $V(\rho) = 0\,\forall\rho$. Ett minimum i total energi fås då kinetiska energin är minimal, dvs i punkten $\rho = 0$.