Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats:	Lördagen den 19 januari 2013 klockan 08.30-12.30 i M.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta, Typgodkänd miniräknare samt en egenhändigt skriven A4 med valfritt innehåll.
Examinator:	Christian Forssén.
Jourhavande lärare:	Christian Forssén, 031–772 3261.

Betygsgränser: Tentamen består av sex uppgifter. För att bli godkänd krävs minst 10 poäng på uppgifterna 1-4 (inklusive eventuella bonuspoäng). För de som har klarat föregående krav bestäms slutbetyget av poängsumman från uppgifterna 1-6 plus eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgifterna enligt följande gränser:
10-18 poäng ger betyg 3, 19-26 poäng ger betyg 4, 27+ poäng ger betyg 5.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt!

Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (4 eller 6) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) ger 3-4 poängs avdrag om orimligheten pekas ut; annars fullt poängavdrag.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Lösningsförslag som är ofullständiga eller innehåller felaktigheter, men där en tydlig lösningsstrategi har presenterats, genererar i allmänhet det lägre av poängavdragen ovan.

Lycka till!

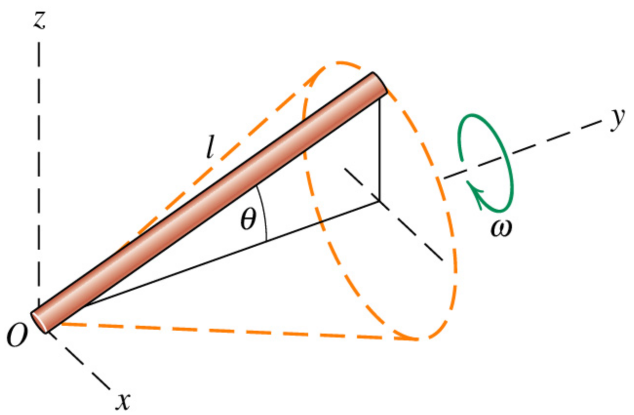
Obligatorisk del

1. Härled följande:

   (a) Betrakta en tvådimensionell stel kropp som rör sig i ett plan. Härled ett samband mellan dess rotationshastighet och rörelsemängdsmoment med avseende på en axel genom masscentrum. Identifiera den kroppsspecifika egenskapen *tröghetsmoment*. (2p)

   (b) En boll rör sig i planet och dess hastighet mäts av två olika observatörer. Observatör A befinner sig stillastående i punkten O och mäter bollens hastighet relativt ett fixt koordinatsystem $X - Y$. Observatör B sitter i mitten på en karusell, avståndet r_B från O. B:s referenssystem roterar alltså med vinkelhastigheten ω relativt $X - Y$. De jämför senare sina mätningar. Rita en tydlig figur och härled ett samband mellan de två uppmätta hastigheterna. (2p)

2. En tunn stav med massa m och längd l roterar runt y-axeln med den konstanta rotationshastigheten ω. Som synes i figuren ritar den därmed upp en kon med halva toppvinkeln θ. Vad är stavens rörelsemängdsmoment med avseende på de givna $x-y-z$ axlarna och hur stor är dess kinetiska energi i det givna läget? (4p)



3. Ett experiment utförs genom att släppa en massa fäst i en fjäder (naturlig vinkelfrekevens ω_n) från en position x_0 från jämviktsläget. Den maximala hastigheten i den efterföljande odämpade svängningsrörelsen uppmäts. Experimentet upprepas sedan med systemet nedsänkt

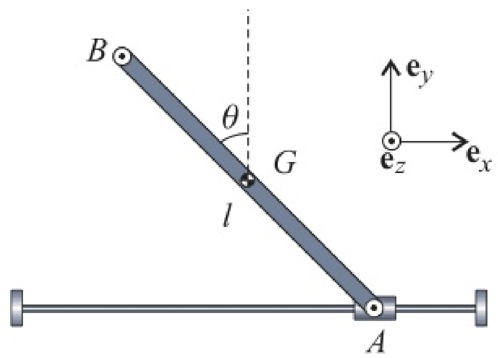
i en vätska som gör rörelsen dämpad (med dämpningsfaktorn ζ). Vad är kvoten mellan dessa två maximala hastigheter för

(a) Stark dämpning?

(b) Kritisk dämpning?

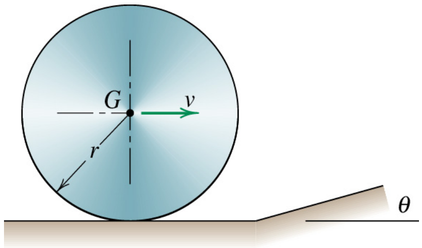
Totalt (6p)

4. Betrakta den homogena stången AB med längden l som är fäst genom en glatt led i en liten kolv i A. Kolven kan glida längs en glatt horisontell skena och stången rör sig enbart i vertikalplanet. Stången släpps ur vila från det vertikala läget ($\theta = 0$). Bestäm kolvens acceleration $\vec{a}_A$ då stången passerar det horisontella läget ($\theta = \pi/2$). Antag att konstruktionen är sådan att stången kan passera skenan i det horisontella läget utan att kollidera. Bortse från kolvens massa i jämförelse med stångens. (6p)



Överbetygsuppgifter

5. En homogen, cirkulär skiva rullar (utan glidning) med farten v. Skivan ändrar abrupt sin hastighetsriktning genom att den stöter på en lutning (vinkel θ, se figur). Bestäm skivans nya fart när den precis har kommit upp på lutningen, samt hur stor andel av den ursprungliga mekaniska energin som försvunnit. (6p)

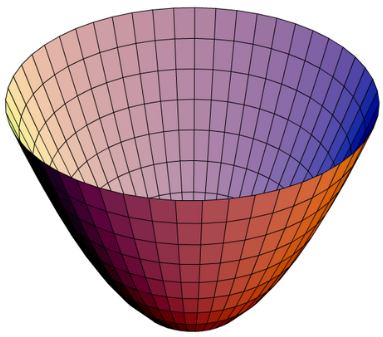


6. En liten kula med massa m rör sig friktionsfritt under inverkan av gravitation på den inre ytan av en paraboloid. Paraboloidens yta ges av villkoret $x^2 + y^2 = az$ (där z är den vertikala koordinaten och $x - y$ spänner upp det horisontella planet).

   (a) Härled Lagrangianen och kulans rörelseekvationer. (2p)

   (b) Visa att kulan rör sig i en horisontell cirkel på höjden $z = h$ givet att den ges en specifik, initial rotationshastighet. Finn denna rotationshastighet. (2p)

   (c) Visa att kulan kommer att oscillera kring denna horisontella bana givet att den ges en liten störning. Beräkna oscillationsfrekvensen. (2p)



Tentamen – Mekanik F del 2 (FFM520)

Tid och plats: Lördagen den 19 januari 2013 klockan 08.30-12.30 i M.
Lösningsskiss: Christian Forssén

Denna lösningsskiss innehåller inga kompletta lösningar utan enbart svar, ledtrådar, och möjliga lösningsstrategier.

Obligatorisk del

---

1. Härled följande:

   (a) Se kursboken. $\vec{L}_G = \left(\sum_i \rho_i^2 m_i\right) \omega \hat{k}$, där $\hat{k}$ är riktningen på rotationsvektorn ut ur planet, och $\bar{I} = \sum_i \rho_i^2 m_i$ är kroppens tröghetsmoment m.a.p. en axel genom masscentrum.

   (b) Se kursboken. $\vec{v}_{\text{boll},A} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_{\text{boll},B}$. Där $\vec{r}$ är lägesvektorn från observatör B till bollen.

2. Rotationsvektorn är riktad i y-led: $\vec{\omega} = \omega\hat{j}$. Tröghetsmatrisens relevanta element är $I_{xy} = 0$, $I_{yy} = \frac{1}{3}m(l\sin\theta)^2$, $I_{yz} = \frac{1}{3}ml^2\sin\theta\cos\theta$. Det eftersökta rörelsemängdsmomentet blir

$$\vec{L}_O = \frac{1}{3}ml^2\omega\sin\theta\left(\sin\theta\hat{j} - \cos\theta\hat{k}\right).$$

   Den eftersökta kinetiska energin blir

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}_O = \frac{1}{3}m(l\omega\sin\theta)^2.$$

3. Maximal hastighet för det odämpade fallet är $v_{\max,0} = x_0\omega_n$. För de dämpade fallen får man ta derivatan dv/dt för att hitta maxhastigheten. Som en funktion av dämpningsfaktorn ζ blir denna

$$v_{\max} = x_0\omega\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{1/2\varepsilon},$$

   där $\varepsilon \equiv \sqrt{1-1/\zeta^2}$.

   Vi söker kvoten $R \equiv v_{\max,0}/v_{\max}$. För väldigt stark dämpning $\zeta \gg 1$ förenklas den eftersökta kvoten till $R \approx 2\zeta$. För kritisk dämpning $\zeta = 1$ får vi $R \approx (1+2\varepsilon)^{1/2\varepsilon}$.

4. Använd kraftekvationen (notera att inga krafter verkar i x-led och att masscentrum följaktligen rör sig rakt neråt i vertikal led). Detta ger ett samband mellan masscentrums hastighet och stångens vinkelhastighet. Ett uttryck för den sistnämnda fås enklast från arbete-energi-principen. Slutligen ges kolvens acceleration från systemets kinematiska villkor
$$\vec{a}_A = -\frac{3}{2} g \hat{e}_x.$$

Överbetygsuppgifter

---

5. Fundera speciellt på vilken dynamisk storhet som är konserverad. I stötögonblicket påverkas skivan av krafter som angriper i kontaktpunkten med det lutande planet. Vi antar att $\theta < \pi/2$ och finner att den eftersökta farten blir
$$v' = \frac{v}{3}(1 + 2\cos\theta),$$
för vilket vi enkelt kontrollerar specialfallet då $\theta = 0$.

   Andelen kinetisk energi som försvinner i stötögonblicket är
$$n = \frac{I\omega^2/2 - I\omega'^2/2}{I\omega^2/2} = 1 - \left(\frac{v'}{v}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1 + 2\cos\theta}{3}\right)^2,$$
där I är kroppens tröghetsmoment m.a.p. en axel genom kontaktpunkten.

6. (a) Använd cylindriska koordinater. Vi finner att $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = 2\lambda_1 r$, $m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0$ och $m\ddot{z} = -mg - \lambda_1 a$; samt tvångsvillkoret $2r\dot{r} - a\dot{z} = 0$.

   (b) För detta specialfall finner vi $\lambda_1 = -mg/a$. Ur den första rörelseekvationen, med $\dot{\varphi} = \omega$ och $r = r_0$, finner vi den sökta vinkelhastigheten $\omega = \sqrt{2g/a}$.

   (c) Den andra rörelseekvationen ger den konserverade storheten $r^2\dot{\varphi} \equiv A$. Eftersom rörelsebanans radie nu kommer att variera något ($r = r_0 + \varepsilon$) får vi $\dot{\varphi} = ah\omega/r^2$. Under antagandet att $\lambda_1 \approx -mg/a$ (konstant) ger den första rörelseekvationen slutligen
$$\ddot{\varepsilon} + \frac{8g}{a}\varepsilon = 0,$$
och den sökta vinkelhastigheten är alltså $\sqrt{8g/a}$.