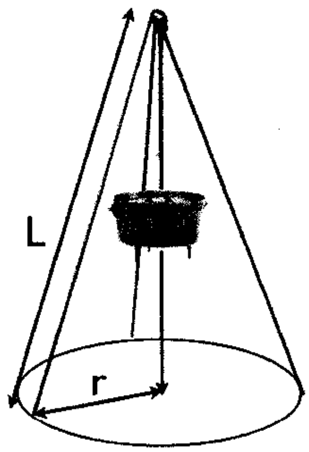
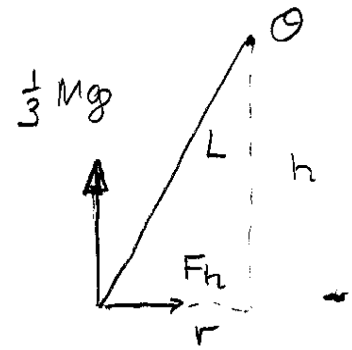
Uppgift 1

Tre identiska lätta stavar av längd L utgör ett stativ som man hänger en tung gryta i. Friktionen mot underlaget hindrar benen att glida isär. Beräkna hur den maximala radien r av cirkeln på vilken man placerar benen beror på μ. Benen är placerade symmetriskt på cirkeln.





$G = 0$

$$Z = -\frac{1}{3}Mgr + F_h h = 0$$

$$= -Nr + F_h h = 0$$

$$F_h \leq \mu N$$

$$\frac{Nr}{h} \leq \mu N$$

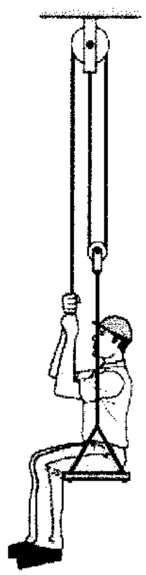
$$r \leq \mu h = \mu\sqrt{L^2 - r^2}$$

$$r^2 \leq \mu^2 L^2 - \mu^2 r^2$$

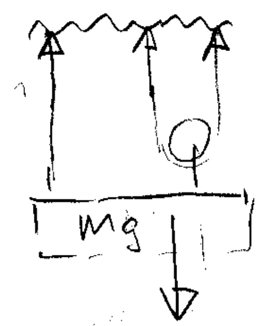
$$r^2(1 + \mu^2) \leq \mu^2 L^2$$

$$r \leq \frac{\mu L}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

Uppgift 2



Mannen som väger M kg drar i repet med en kraft motsvarande m kg. Beräkna hans accelleration.



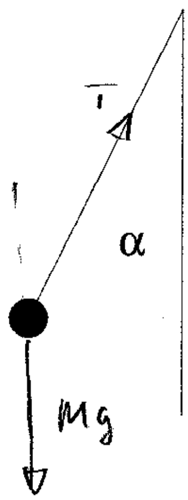
$F_v = 3mg$

$$F_{TOT} = Ma$$

$$3mg - Mg = Ma$$

$$a = \left(\frac{3m}{M} - 1\right)g$$

Uppgift 3



En plan pendel med längd L och vikt m släpps i vila från en vinkel α_0 varefter den rör sig friktionsfritt. Beräkna kraften i staget som en funktion av vinkeln α.

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v^2 = \cancel{m} g \Delta h$$

$$\frac{1}{2} L^2 \dot{\theta}^2 = g L \left(\cos\theta - \cos\theta_0 \right)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{L} \left(\cos\theta - \cos\theta_0 \right)$$

$$\bar{F}_{TOT} = m \bar{a}$$

$$= m \frac{d^2 \vec{r}(\theta)}{dt^2}$$

$$= m \frac{d}{dt} \left(\frac{d\bar{r}}{d\theta} \right) \dot{\theta}$$

$$= m \left(\frac{d^2 \vec{r}}{d\theta^2} \dot{\theta}^2 + \ddot{\theta} \frac{dr}{d\theta} \right)$$

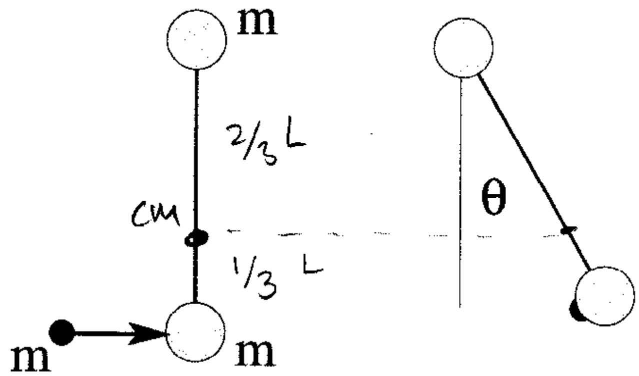
$$= + m \hat{r} L \dot{\theta}^2 + \ddot{\theta} \hat{r}_\theta m$$

$$\hat{F}_{TOT} \cdot \hat{r} = T - mg\cos\theta = + m L \frac{2g}{\cancel{L}} (\Delta \cos\theta)$$

$$T = mg\cos\theta + 2gm(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$$

Uppgift 4



Två kroppar av massa m är sammankopplade med en lätt och styv stav och ligger i vila på ett friktionsfritt bord. Den nedre massan träffas av en mjuk kula som har samma massa m som rör sig med hastighet v vinkelrätt mot staven och som fastnar i den nedre massan. Därefter rör sig den sammansatta kroppen åt höger medan den roterar. Beräkna rotationshastigheten $\dot{\theta}$.

$$L_{cm} = \text{const.}$$

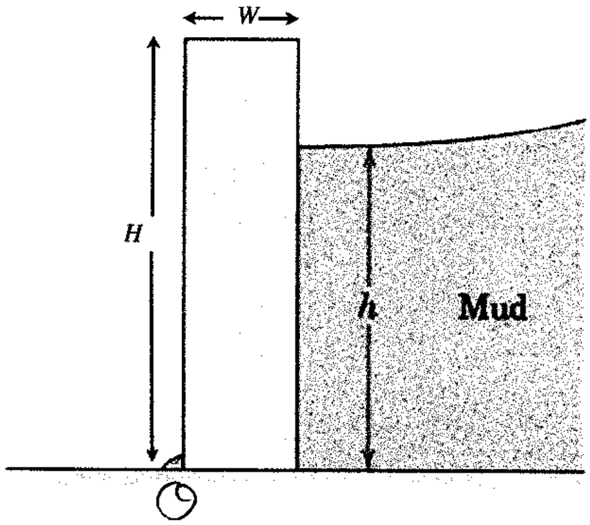
$$\left(\cancel{\tfrac{1}{3}L}\right)(\cancel{m}v) = \left(\cancel{\tfrac{1}{3}L}\right)(2\cancel{m})\left(\tfrac{1}{3}L\dot{\theta}\right) + \left(\tfrac{2}{3}L\right)(\cancel{m})\left(\tfrac{2}{3}L\dot{\theta}\right)$$

$$v = \left(\frac{2}{3}L + \frac{4}{3}L\right)\dot{\theta}$$

$$= 2L\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{v}{2L}$$

Uppgift 5



En betongbarriär placeras på det släta horisontella underlaget för att hålla borta en lermassa. Den tätas nertill, vilket också gör att barriären inte kan glida. För övrigt är det bara betongens egen vikt som håller emot lermassan. Beräkna hur den maximala höjden h innan betongbarriären välter beror på W, H och densiteten av leran ρ_l och betongen ρ_b.

$$L_O = 0 \Rightarrow$$

$$\rho_b W H \left(\frac{W}{2}\right) g = \int_0^h \rho_l\, g\, x(h-x)\, dx$$

$$g \frac{1}{2} \rho_b W^2 H = \rho_l\, g \int_0^h (xh - x^2)\, dx$$

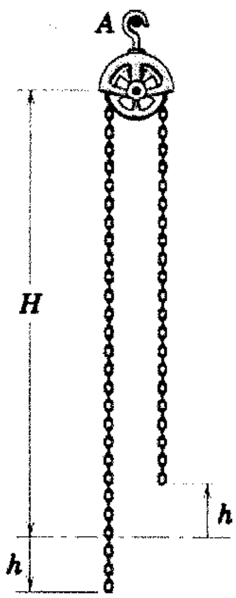
$$= \rho_l\, g \left(\frac{1}{2} h^3 - \frac{1}{3} h^3\right)$$

$$\frac{1}{2} \cancel{g} \rho_b W^2 H = \rho_l \cancel{g} \frac{1}{6} h^3$$

$$h^3 = 3 \frac{\rho_b}{\rho_l} W^2 H$$

$$h = \left(3 \frac{\rho_b}{\rho_l} W^2 H\right)^{1/3}$$

Uppgift 6



Kedjan rör sig friktionsfritt över blocket vid A. Om vi börjar med kedjan i vila vid tid $t = 0$ och $h = h_0$, beräkna $h(t)$ som en funktion av H och g.

Energ: princip.

$$\frac{1}{2}(2\rho H)\dot{h}^2 = +\left[\rho g(H-h)\left(\frac{H-h}{2}\right) + \rho g(H+h)\left(\frac{H+h}{2}\right)\right] - \text{const}$$

$$\rho H \dot{h}^2 = \rho g h^2 + \text{const}$$

$$\cancel{2}\cancel{\rho} H \cancel{\dot{h}} \ddot{h} = \cancel{2}\cancel{\rho} g h \cancel{\dot{h}}$$

$$\ddot{h} = \frac{g}{H} h$$

$$\boxed{h = h_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{H}}\, t\right)}$$