

# Tentamen i FFM515 Mekanik 1

*Tid och plats:* Fredagen den 23 augusti 2013 klockan 08.30-12.30 i M.

*Hjälpmedel:* Inga.

*Examinator:* Måns Henningson, ankn 3245.

*Poängberäkning:* Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:  
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.

Mindre fel ger 1 poängs avdrag.

Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.

Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

*Betygsgränser:* För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-4.

För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-6 så att 6-10 poäng ger betyg 3, 11-14 poäng ger betyg 4 och 15-18 poäng ger betyg 5.

## *Grundläggande uppgifter*

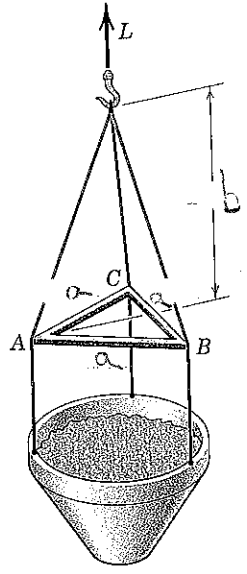
1. Den fyllda behållaren har massan  $m$ . (Övriga massor försummas.) Bestäm storleken  $P$  av kompressionskraften i vart och ett av de tre stagen som bildar den liksidiga triangeln  $ABC$  med sidlängden  $a$ .
2. Den homogena halvcylindern hålls på plats i det avbildade läget genom kraften  $P$ . Den statiska friktionskoefficienten mellan halvcylindern och underlaget är  $\mu_s$ . Hur stor kan vinkeln  $\theta$  vara utan att glidning sker? (Avståndet från mittpunkten  $O$  till halvcylinderns tyngdpunkt  $G$  är  $4r/3\pi$ .)
3. I det avbildade ögonblicket har kolven hastigheten  $v$  och accelerationen  $a$  (räknas positiva åt vänster). Uttryck  $\dot{r}$ ,  $\ddot{r}$ ,  $\dot{\theta}$  och  $\ddot{\theta}$  i  $r$ ,  $\theta$ ,  $v$  och  $a$ .
4. Den koniska pendeln har längden  $L$  och massan  $m$  och rör sig med vinkelhastigheten  $\omega$ . Bestäm höjden  $h$  och spännkraften  $T$  i linan.

## *Överkursuppgifter*

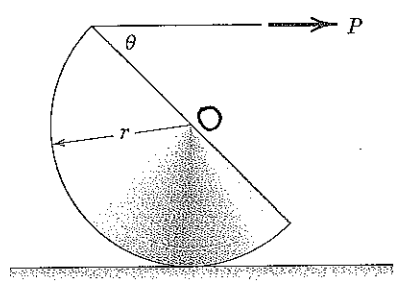
5. En kub med sidlängden  $l$  och densiteten  $\rho_{\text{kub}}$  flyter i saltvatten med densiteten  $\rho_{\text{vatten}}$  med ett oljeskikt med tjockleken  $d$  och densiteten  $\rho_{\text{olja}}$ . Det gäller att  $\rho_{\text{kub}} < \rho_{\text{olja}} < \rho_{\text{vatten}}$ . Bestäm höjden  $h$ .
6. Slangen är utlagd så att den ändrar riktning  $180^\circ$  från brandposten till utloppet. Övertrycket i brandposten är  $p$ , slangens innerradie är  $r$  och massflödet per tidsenhet är  $\sigma$ . Strömningshastigheten är  $v_0$  respektive  $v_1$  vid brandposten respektive utloppet. Bestäm spänningen  $T$  i slangen där den sitter fast i brandposten samt kraften  $F$  som behövs för att hålla fast den vid utloppet. (Slangen är helt flexibel och friktionen mot underlaget försummas.)

*Lycka till!*

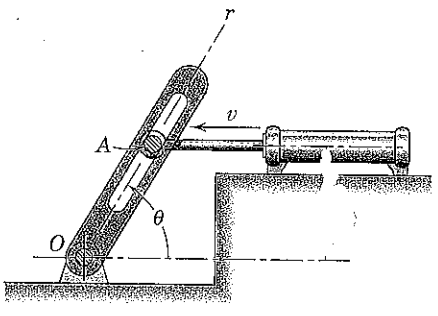
1.



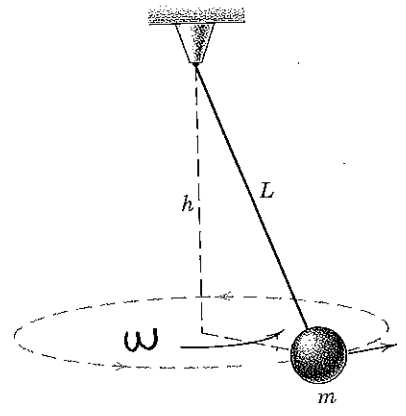
2.



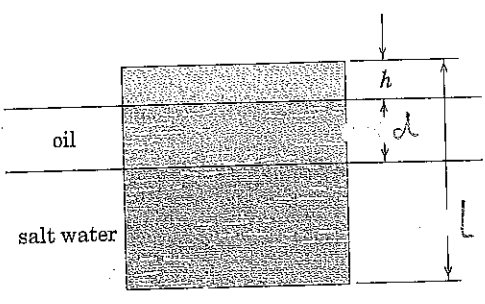
3.



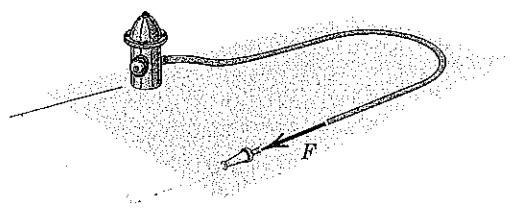
4.



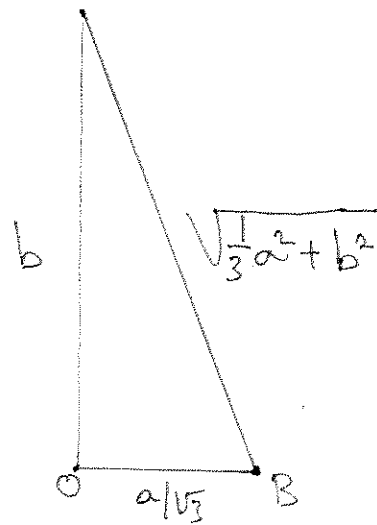
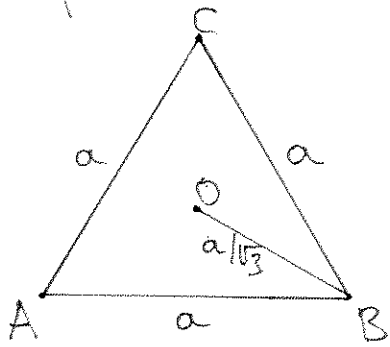
5.



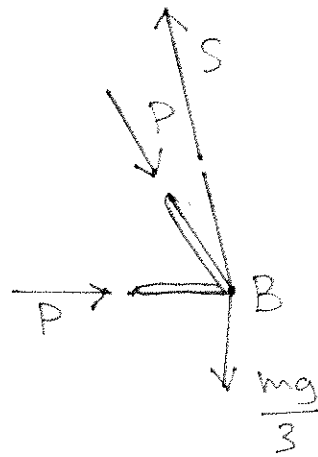
6.



1. Avbilda konstruktionen ovanifrån och från sidan:



Förlägg höret B



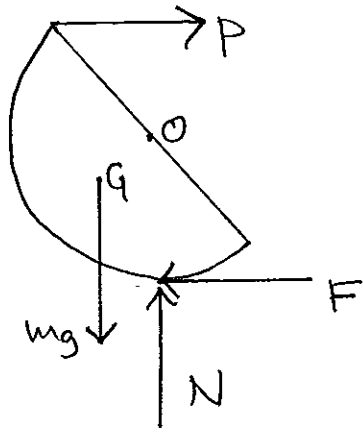
Kraftjämvikt i vertikalled och horisonttalled i riktning mot O ger ekvationerna

$$\begin{cases} \frac{b}{\sqrt{\frac{1}{3}a^2 + b^2}} S - \frac{mg}{3} = 0 \\ \frac{P}{\sqrt{3}/2} + \frac{P}{\sqrt{3}/2} - \frac{a/\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}a^2 + b^2}} S = 0 \end{cases}$$

Varur fås att

$$P = \frac{1}{12} mg \frac{a}{b}$$

2. Frilägg halvcylindern



och ställ upp jämviktsekvationerna

$$\rightarrow \begin{cases} P - F = 0 \\ \uparrow \begin{cases} N - mg = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\curvearrowleft \begin{cases} -r \sin \theta P - r F + \frac{4r}{3\pi} \sin \theta mg = 0 \end{cases}$$

Då glidning precis sker har vi dessutom

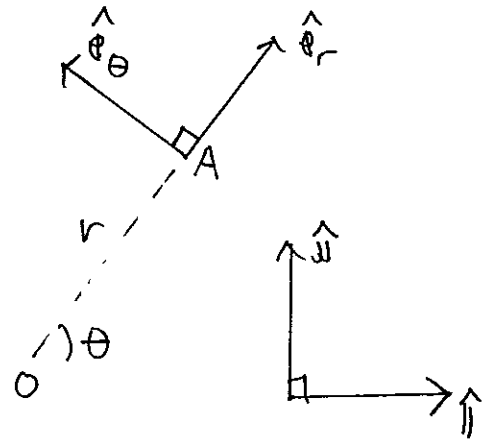
$$F = \mu_s N$$

varur fås att

$$\theta = \arcsin \frac{\mu}{\frac{4}{3\pi} - \mu}$$

3. Basbytet mellan Cartesiska och polära koordinater är

$$\begin{cases} \hat{i} = \cos \theta e_r - \sin \theta e_\theta \\ \hat{j} = \sin \theta e_r + \cos \theta e_\theta \end{cases}$$



Hastigheten och accelerationen är

$$\begin{cases} \mathbf{v} = -v \hat{i} = -v (\cos \theta e_r - \sin \theta e_\theta) \\ \mathbf{a} = -a \hat{i} = -a (\cos \theta e_r - \sin \theta e_\theta) \end{cases}$$

Jämför med standarduttrycken

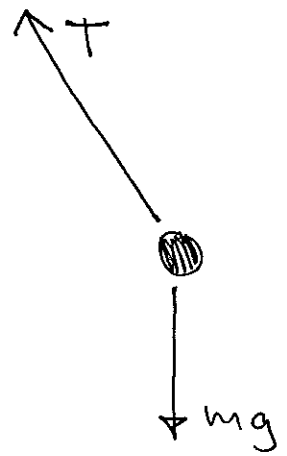
$$\begin{cases} \mathbf{v} = \dot{r} e_r + r \dot{\theta} e_\theta \\ \mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) e_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) e_\theta \end{cases}$$

vilket ger

$$\begin{cases} \dot{r} = -v \cos \theta \\ \dot{\theta} = \frac{v}{r} \sin \theta \\ \ddot{r} = \frac{v^2}{r} \sin^2 \theta - a \cos \theta \\ \ddot{\theta} = \frac{a}{r} \sin \theta + \frac{2v^2}{r^2} \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

4. Frlägg kulen

och ställ upp Newton II  
i cylindriska koordinater med  
z-axeln uppåt:



$$\hat{k}: \left\{ \begin{array}{l} \frac{h}{L} T - mg = 0 \end{array} \right.$$

$$\hat{e}_r: \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\sqrt{L^2 - h^2}}{L} T = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \end{array} \right.$$

Med  $r = \sqrt{L^2 - h^2}$  konstant och  $\dot{\theta} = \omega$

får vi

$$\begin{cases} T = mL\omega^2 \\ h = g/\omega^2 \end{cases}$$

5. Enligt Arkimedes princip påverkas kubens av en lyftkraft

$$F = d l^2 g + (L - d - h) l^2 \rho_{\text{vatten}} g.$$

I jämvikt är denna lika stor som tyngdkraften  $L^3 \rho_{\text{kub}} g$  på kuben, vilket ger

$$h = L - d - \frac{L \rho_{\text{kub}} - d \rho_{\text{olja}}}{\rho_{\text{vatten}}}$$

6. Vid brandposten påverkas det stömmande vattret av en kraft som är lika stor som den tillförda rörelsemängden per tidsenhet, d vs

$$F_0 = \sigma V_0.$$

Detta ger upphov till en lika stor men motriktad motkraft, vartill måste läggas tryckkraften  $F_{\text{tryck}} = p \pi r^2$ .

Spänningen i slangen blir alltså

$$T = \sigma V_0 + p \pi r^2.$$

Vid utloppet är trycket noll, och motsvarande räkning ger kraften

$$F = \sigma V_1.$$