Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: Tisdagen den 12 mars 2013 klockan 08.30-12.30 i M.
Hjälpmedel: Inga.
Examinator: Måns Henningson.
Jourhavande lärare: Stellan Östlund, 031-7869006.

Poängberäkning: Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

Betygsgränser: För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-4.
För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-6 så att 6-10 poäng ger betyg 3, 11-14 poäng ger betyg 4 och 15-18 poäng ger betyg 5.

Grundläggande uppgifter

1. Den homogena stången har massan m och är fritt vridbar kring punkten C. Cylindern har massan M. Bestäm normalkraften på stången från den släta vertikala väggen i punkten A.

2. Den homogena cylindern har massan m och hålls på plats genom linan som är fäst i punkten B och bildar vinkeln α med horisontalplanet. Den statiska friktionskoefficienten mellan cylindern och underlaget är μ_s. Bestäm det maximala storleken på kraften P för vilken jämvikt kan råda.

3. Ett litet mynt med massa m ligger på avståndet r från centrum av den horisontella roterande skivan. Denna startar i vila och har därefter en konstant vinkelacceleration $\alpha = \ddot{\theta}$. Hur stor vinkel har skivan hunnit vrida sig innan myntet börjar glida om den statiska friktionskoefficienten är μ_s?

4. Ramen med massa M och pendeln med längd l och massa m startar i vila i det avbildade läget. Bestäm ramens hastighet då pendeln är vertikal.

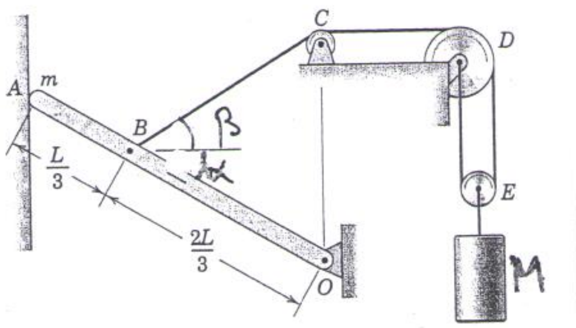
Överkursuppgifter

5. Skissa skjuvspänningen V och böjmomentet M i balken som funktioner av avståndet x från den vänstra ändpunkten.

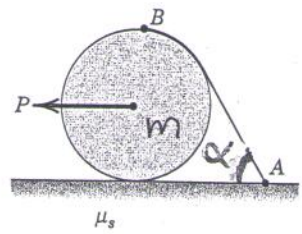
6. Vatten med densitet ρ strömmar ut med hastigheten v_0 från munstycket med radien r. Bollen med massa m ligger stilla på den vertikala vattenstrålen. Bestäm höjden h.

Lycka till!

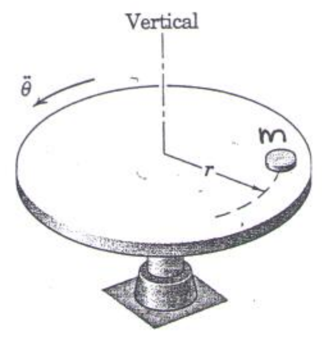
1.


A
m
B
β
α
L/3
2L/3
O
C
D
E
M

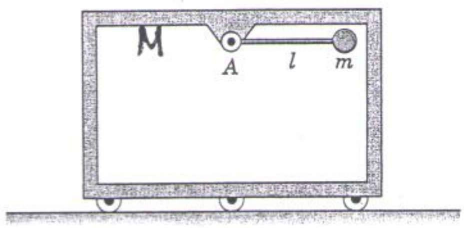
2.


B
P
m
α
A
μ_s

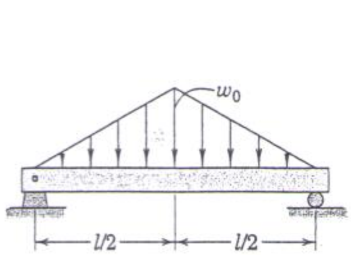
3.


Vertical
$\ddot{\theta}$
m
r

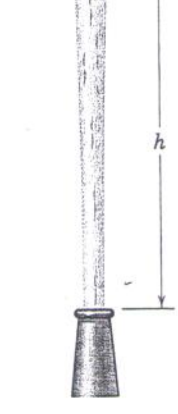
4.


M
A
l
m

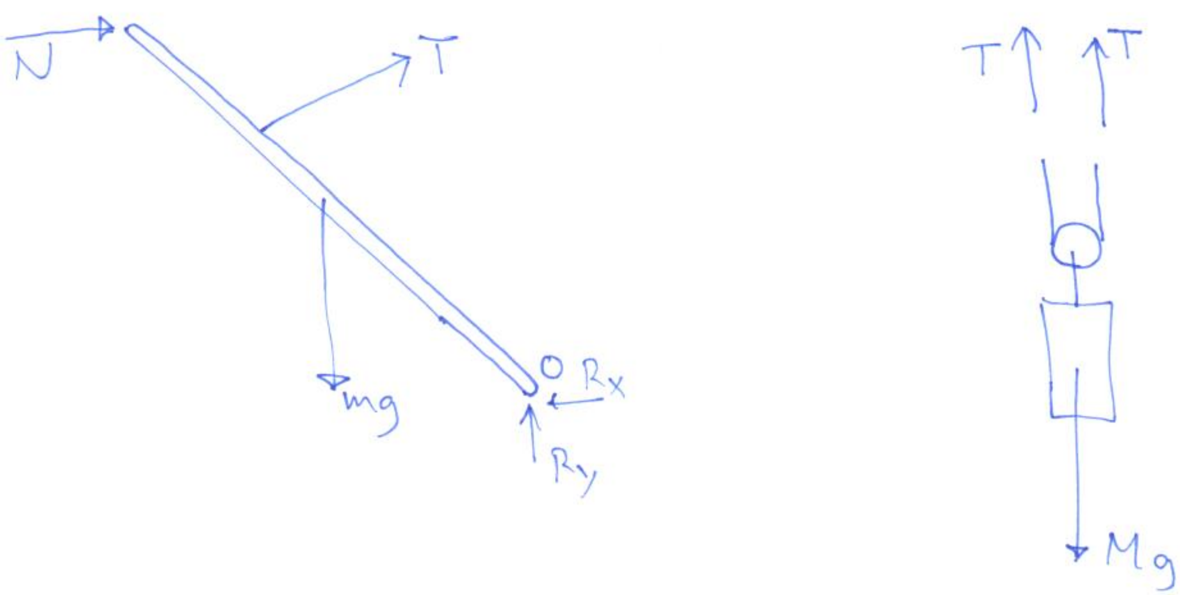
5.


w_0
l/2
l/2

6.


m
h

1. Frilägg stången och cylindern separat:



Kraftjämvikt för cylindern och momentjämvikt för stången ger ekvationerna

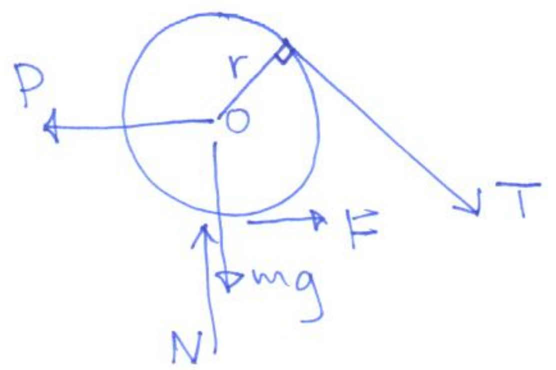
$$\uparrow: \quad 2T - Mg = 0$$

$$\circlearrowleft O: \quad -NL\sin\alpha - T\frac{2L}{3}\sin(\alpha+\beta) + mg\frac{L}{2}\cos\alpha = 0$$

Varur fås den sökta normalkraften

$$N = \frac{1}{\sin\alpha}\left[\frac{mg}{2}\cos\alpha - \frac{Mg}{3}\sin(\alpha+\beta)\right]$$

2. Frilägg cylindern:



Kraft- och momentjämvikt ger ekvationerna

$\uparrow$: $N - mg - T\sin\alpha = 0$

$\rightarrow$: $-P + F + T\cos\alpha = 0$

$\curvearrowleft O$: $rF - rT = 0$

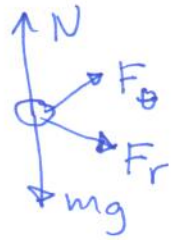
Då glidning precis sker gäller dessutom att

$$F = \mu_s N$$

Ur dessa ekvationer fås att

$$P = \frac{1+\cos\alpha}{1-\mu_s \sin\alpha}\mu_s mg$$

3. Frilägg myntet



och ställ upp Newton II i cylindriska koordinater:

$$e_r: \quad F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$e_\theta: \quad F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

$$\hat{k}: \quad N - mg = m\ddot{z}$$

Med r och z konstanta och $\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$ får vi

$$N = mg$$

$$F_r = -mr\alpha^2 t^2$$

$$F_\theta = mr\alpha$$

Då glidning precis sker är

$$\mu_s = \frac{\sqrt{F_r^2 + F_\theta^2}}{N} = \frac{r}{g}\sqrt{\alpha^2 + \alpha^4 t^4}$$

Detta sker efter tiden

$$t = \frac{1}{\alpha}\left(\left(\frac{\mu_s g}{r}\right)^2 - \alpha^2\right)^{1/4}$$

vilket ger vinkeln

$$\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\mu_s g}{r\alpha}\right)^2 - 1}$$

4. Beteckna ramens och pendelns hastigheter (positiva åt höger) med V respektive v då pendeln är vertikal.

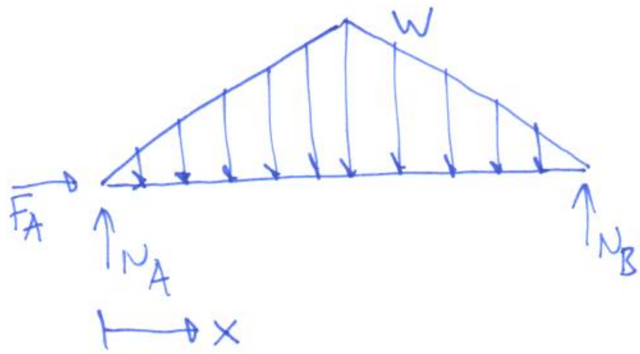
Bevarande av energi och horisontell rörelsemängd ger

$$\begin{cases} \frac{M}{2}V^2 + \frac{m}{2}v^2 = mgL \\ MV + mv = 0 \end{cases}$$

varur fås att

$$\begin{cases} V = \sqrt{\dfrac{2m^2gL}{M(M+m)}} \\ v = -\sqrt{\dfrac{2MgL}{M+m}} \end{cases}$$

5. Frilägg balken



$$w = \begin{cases} \frac{2w_0}{L} x & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ \frac{2w_0}{L}(L-x) & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

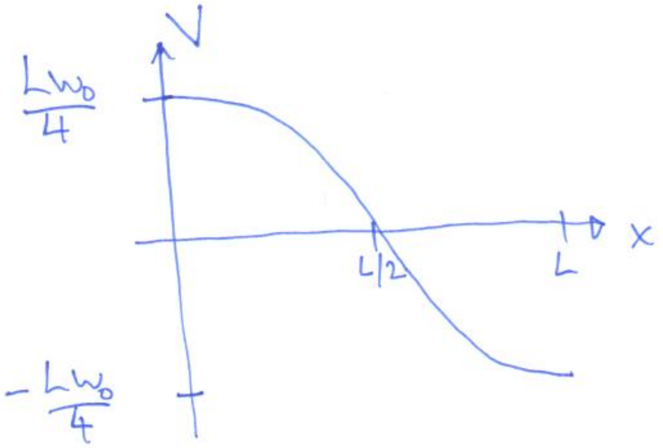
Kraft- och momentjämvikt ger $\begin{cases} F_A = 0 \\ N_A = \frac{Lw_0}{4} \\ N_B = \frac{Lw_0}{4} \end{cases}$

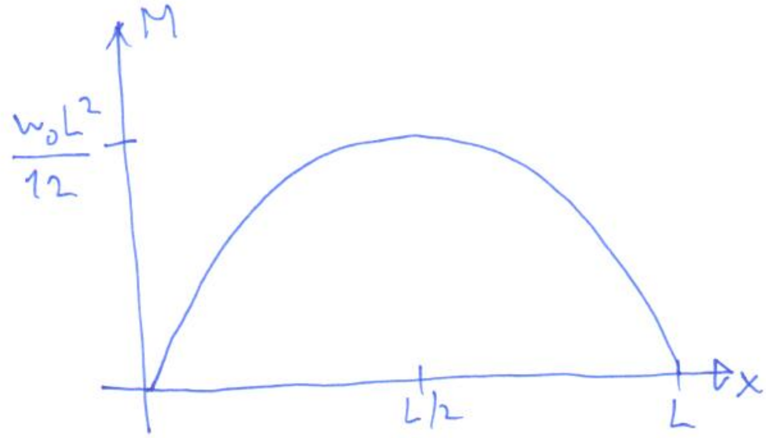
$\frac{dV}{dx} = -w$ med $V(0) = N_A$ ger

$$V(x) = \begin{cases} \frac{w_0 L}{4} - \frac{w_0}{L} x^2 & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ \frac{3w_0 L}{4} - 2w_0 x + \frac{w_0}{L} x^2 & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

$\frac{dM}{dx} = V$ med $M(0) = 0$ ger sedan

$$M(x) = \begin{cases} \frac{w_0 L}{4} x - \frac{w_0}{3L} x^3 & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ -\frac{w_0 L^2}{12} + \frac{3w_0 L}{4} x - w_0 x^2 + \frac{w_0}{3L} x^3 & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$





6. Beteckna vattnets fart omedelbart innan det träffar bollen med v. Energiprincipen ger

$$\frac{v^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} - gh$$

Under ett tidsintervall Δt transporteras massan $\Delta m = \rho \pi r^2 v_0 \Delta t$.

Då den träffar bollen ändras dess hastighet från v till 0.

Impulsöverföringen per tidsenhet skall vara lika med bollens tyngd mg vilket ger

$$\frac{v \Delta m}{\Delta t} = mg$$

Härur fås att

$$h = \frac{1}{2g}\left[v_0^2 - v^2\right] = \frac{1}{2g}\left[v_0^2 - \left(\frac{mg}{\rho \pi r^2 v_0}\right)^2\right]$$