Omtenta i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: 28 Augusti 2012 08:30-12:30 i Maskin

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Examinator: Stellan Östlund, 076-7619006

Poängberäkning:

Varje uppgift bedöms med 0,1,2 eller 3 poäng enligt följande principer:

3P - helt korrekt lösning med tillräckligt underlag att kunna följa resonemanget.
2P - helt korrekt fysikalisk och matematisk uppställning av problemet men därefter en ofullständig lösning.
1P - helt korrekt analys av problemet, visat genom en kortfattad beskrivning och lämplig skiss.

Betygsgränser

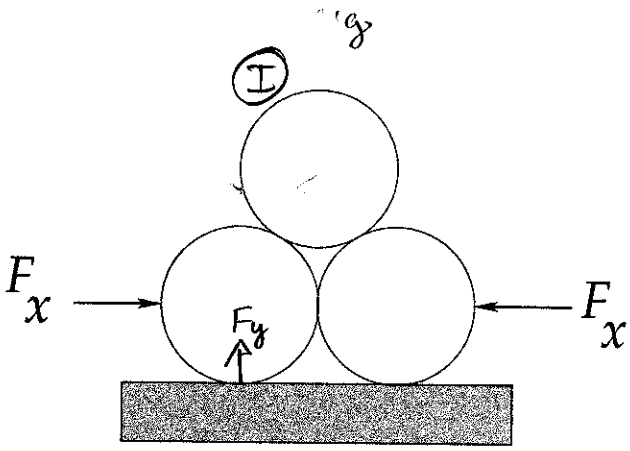
För att bli godkänd krävs minst 6P på uppgifterna 1-4. För de som blir godkända rättas uppgifterna 5 och 6, och betyg 6-10 ger betyg 3, betyg 11-14 ger betyg 4 och 15-18 ger betyg 5.

Allmänna instruktioner

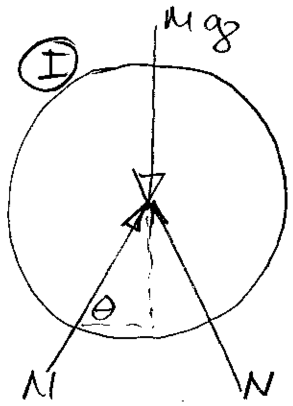
Ekvationer med inkonsekventa enheter eller svar med fel enheter utgör allvarliga fel. Kolla gärna gränser i svaren för att kontrollera om svaret är rimligt. Redovisa kortfattat era beräkningar och svar direkt på tentabladet. Om mer papper behövs kan ni hänvisa till mer omfattande räkningar i bifogat separat häfte. Markera alla blad.

Om du tycker problemet är otydligt, ange de antaganden du själv gör när du löser problemet. Notera att inte alla givna parametrar nödvändigtvis behövs för att svara på varje problem.

Uppgift 1

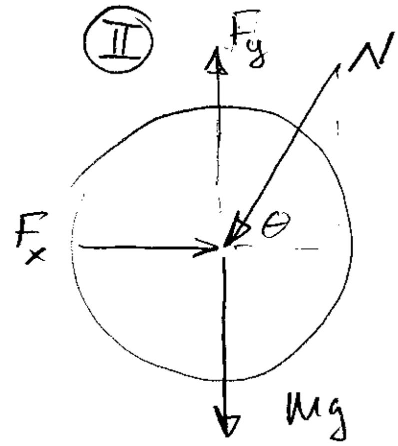


Tre identiska tunga och glatta (friktionsfria) cylindrar med massa m och radius R är staplade på varandra på ett friktionsfritt bord. Beräkna kraften F_x som måste tillföras så att cylindrarna inte glider isär.



$$F_y : 2N\sin\theta - Mg = 0$$

$$N = \frac{Mg}{2\sin\theta}$$



$$+F_x - N\cos\theta = 0 \qquad \Sigma F_x$$

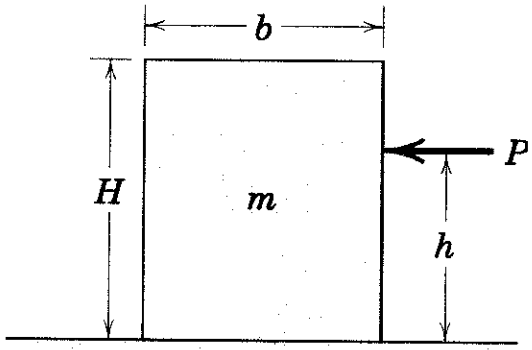
$$F_y - Mg - Mg\sin\theta = 0 \qquad \Sigma F_y$$

$$F_x = N\cos\theta$$

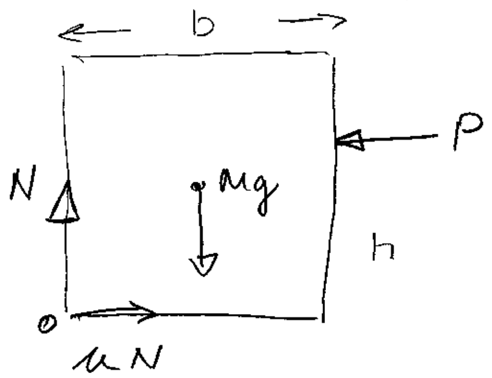
$$= \frac{Mg}{2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$F_x = \frac{Mg}{2\sqrt{3}} \qquad <= \frac{Mg\,\frac{1}{2}}{2\,\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Uppgift 2



En homogen låda med vikt m visas i genomskärning i figuren. Den har höjd H och bredd b och står på ett bord där den statiska friktionskoefficienten är μ. Man önskar skjuta lådan sidledes genom tillföra en horisontell kraft P. Vad är den maximala höjden h där man måste applicera kraften utan att lådan börjar välta.



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \mu N - P = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - Mg = 0$$

$$\circlearrowright O = 0 \Rightarrow -Mg\frac{b}{2} + Ph = 0$$

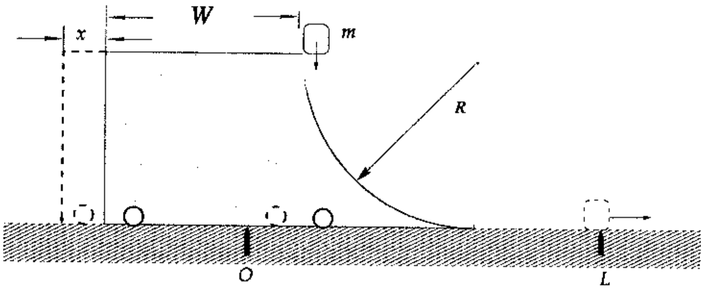
$$\circlearrowright O \Rightarrow h = \frac{Mgb}{2P}$$

$$= \frac{Mgb}{2\mu N}$$

$$= \frac{\cancel{Mg}\, b}{2\mu \cancel{Mg}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{b}{2\mu} > h}$$

Uppgift 3



En "skateboard ramp" med massa M rullar friktionsfritt på ett jämnt underlag och en "skateboarder" markerad som en liten kub med massa m befinner sig på den övre kanten enligt figuren. Rampens yta består av en kvartcirkelbåge med radius R. Ett streck i underlaget vid "O" markerar det gemensamma masscentrummet och ett annat streck L är markerat på ett avstånd L från 0. Skateboardern som vi antar rullar friktionsfritt, ger sig nu ner och iväg till höger nerför rampen som då i sin tur rullar sakta åt vänster. Beräkna det totala avståndet x rampen har förflyttat sig och hur snabbt den rör sig sig när skateboardern passerar strecket L. Storleken men inte vikten på skateboardern kan försummas.

$F_x^{TOT} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_{cm} = 0 \quad V_{cm} = 0$ alltid

$$0 = Lm - Mx \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{m}{M} L}$$

Friktionsfritt => total energi bevarad

och total rörelsemängd = 0

$$\frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v^2 = mgR$$

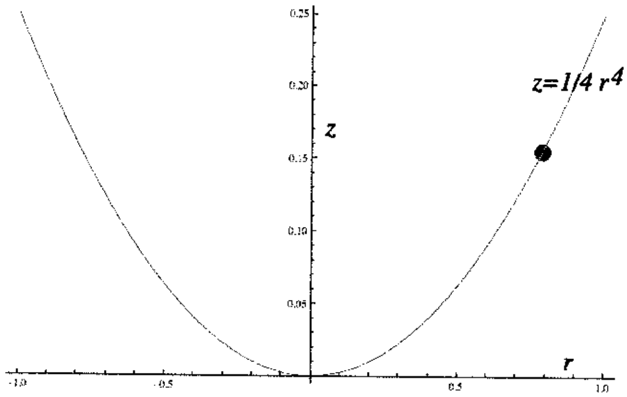
$$\frac{1}{2} \frac{(MV)^2}{M} + \frac{1}{2} \frac{(mv)^2}{m} = mgR$$

$$MV = mv$$

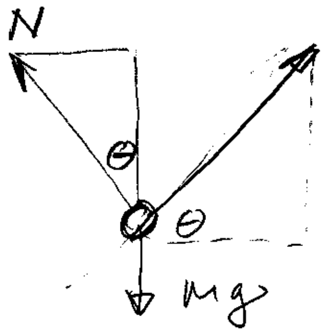
$$\frac{1}{2} (MV)^2 \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right) = mgR$$

$$\boxed{V = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{2mgR}{\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)}}}$$

Uppgift 4



En pärla med massa m rör sig på den friktionsfria ståltråden som följer bågen $z = \frac{1}{4}a^2r^4$. Ståltråden roterar runt z axeln med vinkelhastighet ω med gravitationen riktat ner längs $-z$. Som en funktion av a och ω bestäm avståndet r där pärlan kan vara i jämnvikt med konstant radius. Bilden visar kurvan med $a = 1$.



$$m\omega^2 r = N \sin\theta$$

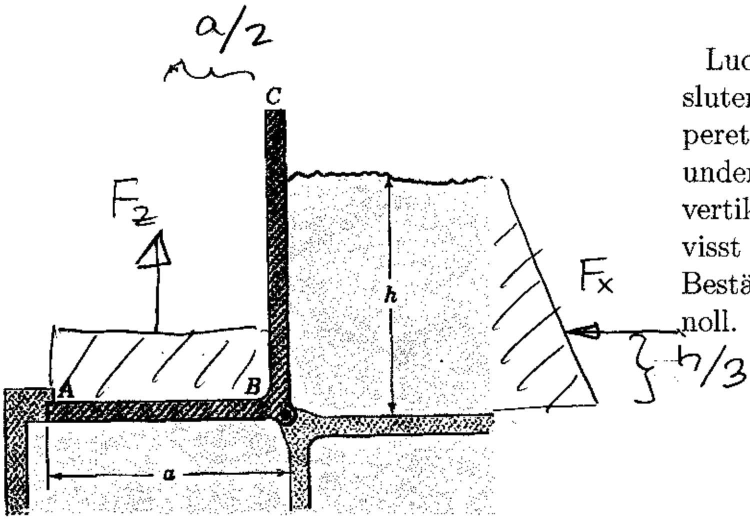
$$mg = N \cos\theta$$

$$\frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \frac{dz}{dr}$$

$$\frac{\omega^2 r}{g} = a^2 r^3 \Rightarrow \omega^2 = g a^2 r^2$$

$$\boxed{r = \frac{\omega}{a\sqrt{g}}}$$

Uppgift 5



Luckan ABC är fritt vridbar kring B och tillsluter en kanal med bredden b vinkelrät mot papperets plan. Den påverkas av vattentrycket dels på undersidan AB med längden a , och dels på den vertikala sidan BC. När vattenytan stiger till ett visst avstånd h över B kommer luckan att öppnas. Bestäm detta värde på h. Vikten av luckan själv är noll.

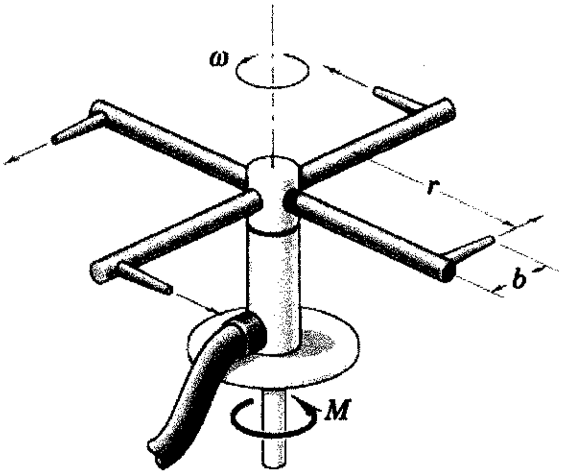
$$F_z \frac{a}{2} = F_x \frac{h}{3} \qquad B = 0$$

$$(\cancel{\rho g h}\, a)\frac{a}{2} = \frac{1}{2}(\cancel{\rho g h})\, h \, \frac{h}{3}$$

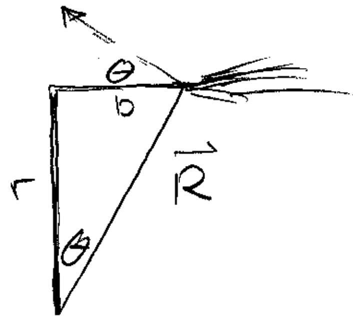
$$\cancel{\tfrac{1}{2}} a^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}} h^2 \frac{1}{3}$$

$$\boxed{h = \sqrt{3}\, a}$$

Uppgift 6



Sprinklern med den angivna geometrin roterar utan friktion. Avstånden r och b är horisontella och vinkelräta mot varandra och vattnet tillförs med en total mänghastighet Q m^3/s; varje munstycke har area A. Beräkna den konstanta vinkelhastigheten som sprinklern får när den roterar.



$\vec{V}_R$ = vatten hastighet relativ munstycke

$\bar{V}$ = munstucke hastighet

$$\vec{V}_R = \frac{Q}{4A}\hat{x}$$

$$\bar{V} = \omega R(-\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y})$$

$$= -\omega r\,\hat{x} + \omega b\,\hat{y}$$

$$\vec{V}_{TOT} = \vec{V}_R + \bar{V} = \left(\frac{Q}{4A} - \omega r\right)\hat{x} + \omega b\,\hat{y}$$

Friktionsfritt =>

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{V}_{TOT} \times \vec{R} = 0$$

ersätt:

$$\left(\left(\frac{Q}{4A} - \omega r\right)\hat{x} + \omega b\,\hat{y}\right) \times (b\,\hat{x} + r\,\hat{y}) = 0$$

$$\left(\frac{Qr}{4A} - \omega r^2\right) - \omega b^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = \frac{Qr}{4A(r^2+b^2)}}$$