Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: 5 Mars 2012 08:30-12:30 i Maskin

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Examinator: Stellan Östlund, 076-7619006

Poängberäkning:

Varje uppgift bedöms med 0,1,2 eller 3 poäng enligt följande principer:

3P - (C) helt korrekt lösning med tillräckligt underlag att kunna följa resonemanget.
2P - (B) helt korrekt matematisk uppställning av problemet men därefter en ofullständig lösning.
1P - (A) helt korrekt analys av problemet, visat genom en kortfattad beskrivning och lämplig skiss.

Betygsgränser

För att bli godkänd krävs minst 6P på uppgifterna 1-4. För de som blir godkända rättas uppgifterna 5 och 6, och betyg 6-10 ger betyg 3, betyg 11-14 ger betyg 4 och 15-18 ger betyg 5.

Allmänna instruktioner

Ekvationer med inkonsekventa enheter eller svar med fel enheter utgör allvarliga fel. Kolla gärna gränser i svaren för att kontrollera om svaret är rimligt. Redovisa kortfattat era beräkningar och svar direkt på tentabladet. Om mer papper behövs kan ni hänvisa till mer omfattande räkningar i bifogat separat häfte. Markera alla blad.

Formelblad

Cylindriska koordinat

$$x = R\cos\theta \qquad v_r = \dot{r} \qquad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$y = R\sin\theta \qquad v_\theta = r\dot{\theta} \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$
$$z = z \qquad v_z = \dot{z} \qquad a_z = \ddot{z}$$

Sfäriska koordinat

$$x = R\cos\phi\cos\theta \qquad v_R = \dot{R} \qquad a_R = \ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - R\dot{\theta}^2\cos^2\phi$$
$$y = R\cos\phi\sin\theta \qquad v_\theta = R\dot{\theta}\cos\phi \qquad a_\theta = \frac{\cos\phi}{R}\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\theta}\right) - 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi$$
$$z = R\sin\phi \qquad v_\phi = R\dot{\phi} \qquad a_\phi = \frac{1}{R}\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\phi}\right) + R\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi$$

Endimensionella kollisioner

$e = (v_2' - v_1')/(v_1 - v_2)$

$v_1' = ((m_1 - em_2)v_1 + m_2v_2(1+e))/(m_1 + m_2)$

$v_2' = (m_1v_1(1+e) + (m_2 - em_1)v_2)/(m_1 + m_2)$

Kepler problemet

$a =$ storaxeln och $r_{max} = a(1+e)$ och $r_{min} = a(1-e)$

$v_P = R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{r_{max}}{r_{min}}}$

$v_A = R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{r_{min}}{r_{max}}}$

Balkar

belastningen uppifrån i rikning neråt: $w = -\frac{dV}{dx}$, skuvspänningen $V = \frac{dM}{dx}$ där M är böjmomentet.

Ekv. 2/3 i Dynamikboken $v\,dv = a\,ds$ eller ekvivalent $\dot{s}\,d\dot{s} = \ddot{s}\,ds$.

Trigonometri

3. Miscellaneous relations

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\theta)}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\theta)}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

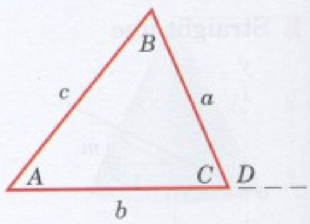
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b$

$\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b$

4. Law of sines

$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$

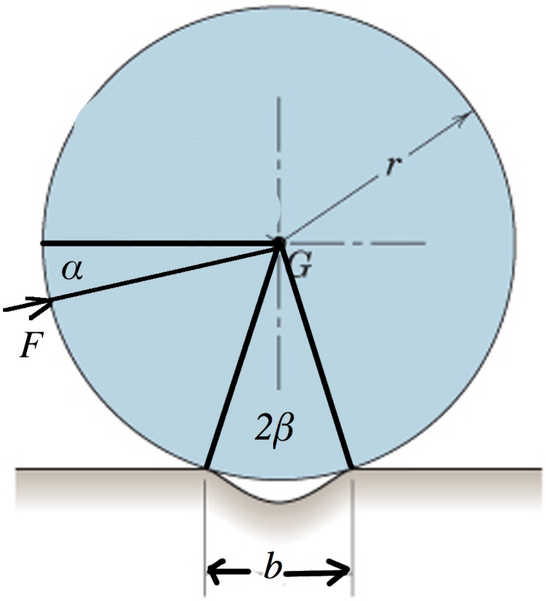


5. Law of cosines

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

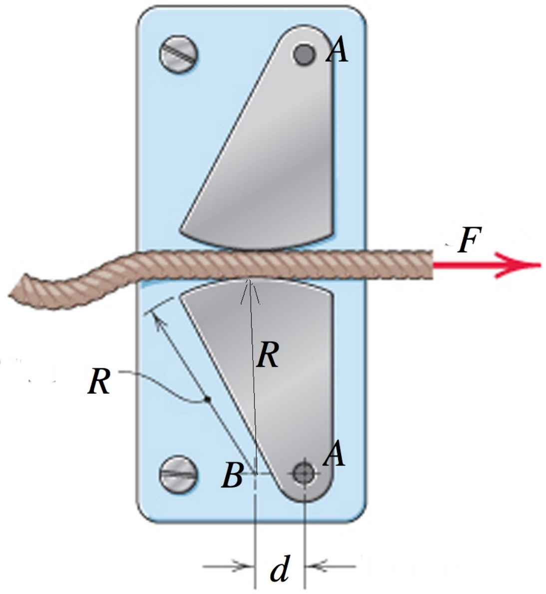
$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos D$

Problem1



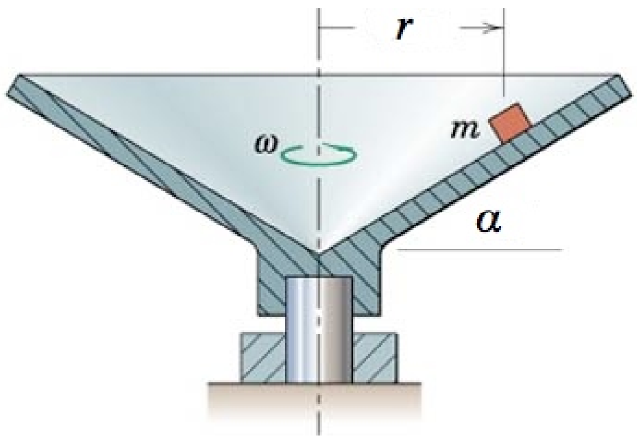
Ett tungt hjul med massa M har rullat ner i ett hål av bredd $b = 2r\sin\beta$. Beräkna hur stor kraft måste tillföras vinkelrätt mot ytan för att rulla ur den ur hålet.

Problem2



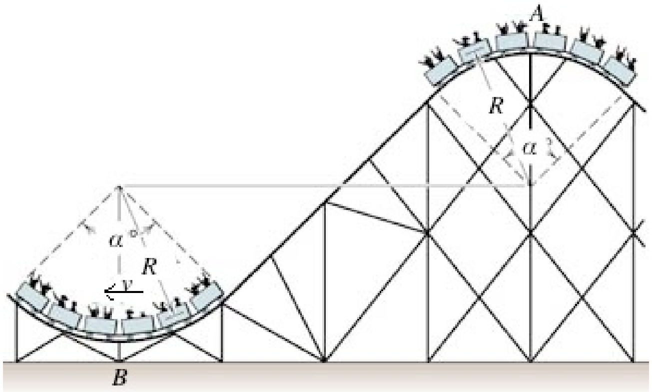
En avlastare *"camcleat"* visas i vilken man kan spärra ett rep. Den består av ett par klämmor delvis formad som en båge med konstant radius R. Bågens centrum ligger vid B som, enligt ritningen kan ligga utanför plattan. Den nedre klämman roterar fritt runt en annan punkt A. Beräkna den minimala friktionskoefficienten μ mellan repet och bågen så att repet alltid spärras i den angivna geometrin oavsett F. Givna parametrar är R, d och μ. Problemet är starkt idealiserat och ska lösas utan mer komplicerade formuleringar. Vi antar att friktionskraften verkar precis vid punkten ovanför **B** och tar ett geometrisk specialfall då vectorn F såväl som vektorn **AB** mellan bågens centrum **B** och rotationens axel **A** ligger parallellt med kortsidan av plattan.

Problem3



Den lilla klossen placeras i den roterande tratten enligt figuren vid en radie r från trattens symmetriaxel. Klossen har en friktionskoefficient μ mot ytan. Klossen ligger kvar när när vinkelhastigeten uppfyller $\omega_{min} < \omega < \omega_{max}$. Beräkna ω_{min} och ω_{max} i termer de givna parametrarna. Notera särskilt huruvida m förekommer i svaret.

Problem4

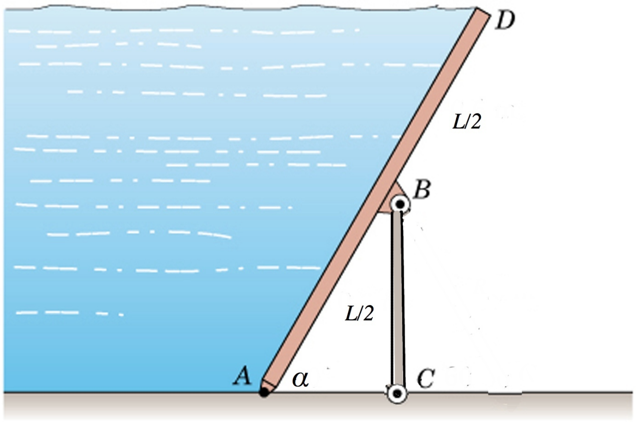


De ihopkopplade vagnarna på berg och dalbanan släpps i jämnvikt vid **A** enligt ritningen. Vad blir vertikalkraften på en person med massa m i mittvangnen när denne når bottenläget **B** . Berg och dalbanans spår utgör en båge med radius R i botten och toppen med en total höjdskillnad $2R$ däremellan. Vagnarna har en längd αR. Friktion försummas; likaså är vagnarnas höjd försumbar jämfört med R. Människornas vikt försummas jämfört med vagnarna. Ni får använda er av att masscentrum av en cirkelbåge med vinkel θ ligger $\frac{2r}{\alpha}\sin(\alpha/2)$ från centrum till mitten av bågen, något ni borde kunna men inte behöver härleda.

Problem5

En fontän bildas genom vatten som sprutar vertikalt med en hastighet v ur ett munstycke med area a. Ett klot med massa m balanserar på vattenstrålen enligt ritningen. Uttryck höjden av klotet ovanför munstycket som en funktion av v, a, vattnets densitet ρ och g. I praktiken erhålls en övre gräns på höjden då luftmotstånd, viskositet, samt vattenstrålens verkan på klotet idealiserats. Ersätt sedan v i det slutgiltiga uttrycket med en lämplig funktion av vattentrycket p i munstycket och kontrollera att klotet täpper till munstycket när $h = 0$.

Problem6



En översvämningsbarriär visas. Vertikala stolpar såsom **BC** är placerade med avstånd W från varandra längs med barriären. Låt ρ vara vattnets densitet, längden av barriären L. Ytan på barriären utgör en vinkel α från horisontellt; g är tyngdaccelerationen. Beräkna kompressionskraften för den vertikala stolpen som en funktion av de angivna parametrarna.

Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: 5 Mars 2012 08:30-12:30 i Maskin

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Examinator: Stellan Östlund, 076-7619006

Poängberäkning:

Varje uppgift bedöms med 0,1,2 eller 3 poäng enligt följande principer:

3P - (C) helt korrekt lösning med tillräckligt underlag att kunna följa resonemanget.
2P - (B) helt korrekt matematisk uppställning av problemet men därefter en ofullständig lösning.
1P - (A) helt korrekt analys av problemet, visat genom en kortfattad beskrivning och lämplig skiss.

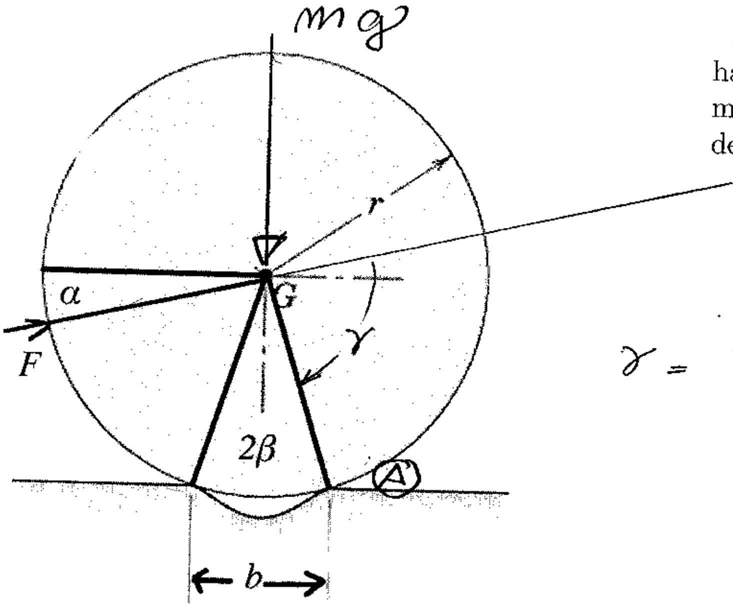
Betygsgränser

För att bli godkänd krävs minst 6P på uppgifterna 1-4. För de som blir godkända rättas uppgifterna 5 och 6, och betyg 6-10 ger betyg 3, betyg 11-14 ger betyg 4 och 15-18 ger betyg 5.

Allmänna instruktioner

Ekvationer med inkonsekventa enheter eller svar med fel enheter utgör allvarliga fel. Kolla gärna gränser i svaren för att kontrollera om svaret är rimligt. Redovisa kortfattat era beräkningar och svar direkt på tentabladet. Om mer papper behövs kan ni hänvisa till mer omfattande räkningar i bifogat separat häfte. Markera alla blad.

Problem1



Ett tungt hjul med massa M har rullat ner i ett hål av bredd $b = 2r \sin\beta$. Beräkna hur stor kraft måste tillföras vinkelrätt mot ytan för att rulla ur den ur hålet.

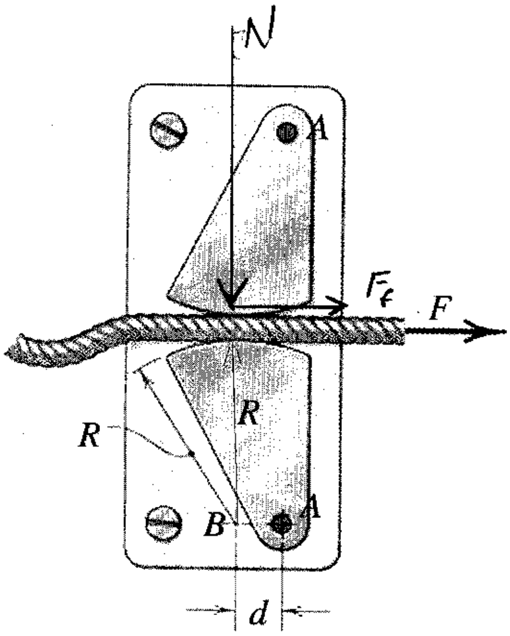
$$\gamma = \pi/2 + \alpha - \beta$$

För at rulla ur =>

$$0 < \tau_{A} = F r \cos\gamma - mg \frac{b}{2}$$

$$F > \frac{mg \cancel{r} \sin\beta}{\cancel{r} \sin(\pi/2 + \alpha - \beta)} = \frac{mg \sin\beta}{\cos(\alpha - \beta)}$$

Problem2



En avlastare *"camcleat"* visas i vilken man kan spärra ett rep. Den består av ett par klämmor delvis formad som en båge med konstant radius R. Bågens centrum ligger vid B som, enligt ritningen kan ligga utanför plattan. Den nedre klämman roterar fritt runt en annan punkt A. Beräkna den minimala friktionskoefficienten μ mellan repet och bågen så att repet alltid spärras i den angivna geometrin oavsett F. Givna parametrar är R, d och μ. Problemet är starkt idealiserat och ska lösas utan mer komplicerade formuleringar. Vi antar att friktionskraften verkar precis vid punkten ovanför **B** och tar ett geometrisk specialfall då vectorn F såväl som vektorn **AB** mellan bågens centrum **B** och rotationens axel **A** ligger parallellt med kortsidan av plattan.

$$\tau = 0 \Rightarrow dN = R F_f$$

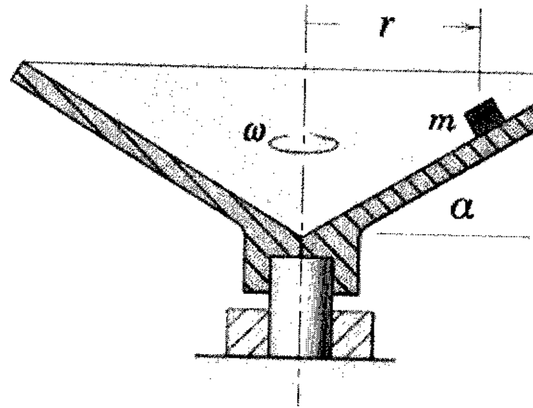
$$F_f = \frac{1}{2} F$$

icke glid $\Rightarrow$ $F_f < \mu N$

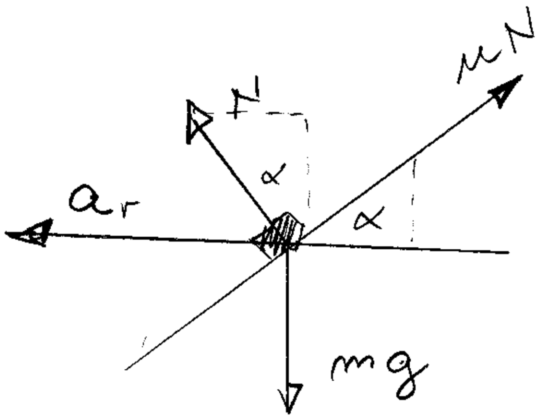
$$\frac{d\cancel{N}}{R} < \mu \cancel{N}$$

$$\frac{d}{R} < \mu$$

Problem3



Den lilla klossen placeras i den roterande tratten enligt figuren vid en radie r från trattens symmetriaxel. Klossen har en friktionskoefficient μ mot ytan. Klossen ligger kvar när när vinkelhastigeten uppfyller $\omega_{min} < \omega < \omega_{max}$. Beräkna ω_{min} och ω_{max} i termer de givna parametrarna. Notera särskilt huruvida m förekommer i svaret.



$\rightarrow \quad F = ma$

1) $-N \sin\alpha + \mu N \cos\alpha = -m R \omega^2$

2) $\uparrow \quad N \cos\alpha + \mu N \sin\alpha = mg$

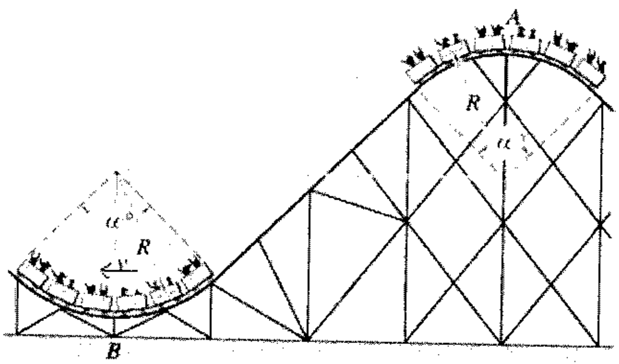
$$-\frac{①}{②} \Rightarrow \frac{R\omega^2}{g} = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$

de två fallen är $\mu \to \pm\mu$

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{g}{R}\,\frac{\sin\alpha \mp \mu\cos\alpha}{\cos\alpha \pm \mu\sin\alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{g}{R}\,\frac{\tan\alpha \mp \mu}{1 \pm \mu\tan\alpha}}$$

Problem4



De ihopkopplade vagnarna på berg och dalbanan släpps i jämnvikt vid **A** enligt ritningen. Vad blir vertikalkraften på en person med massa m i mittvangnen när denne når bottenläget **B** . Berg och dalbanans spår utgör en båge med radius R i botten och toppen med en total höjdskillnad $2R$ däremellan. Vagnarna har en längd αR. Friktion försummas; likaså är vagnarnas höjd försumbar jämfört med R. Människornas vikt försummas jämfört med vagnarna. Ni får använda er av att masscentrum av en cirkelbåge med vinkel θ ligger $\frac{2r}{\alpha}\sin(\alpha/2)$ från centrum till mitten av bågen, något ni borde kunna men inte behöver härleda.

höjd mellan mass centrum $= 2\bar{R}$

$$\frac{1}{2}\cancel{M}v^2 = \frac{4R\cancel{M}}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}$$

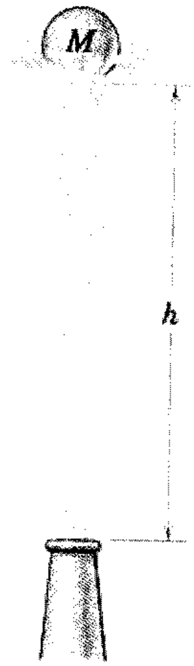
$$m a_{botten} = mg + \frac{v^2}{R}m$$

$$= mg\left(1 + \frac{8}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= F_N$$

Notera att $2\bar{R}_{cm}$ bestämmer farten på personen i bottenläge medan $\frac{v^2}{R}$ bestämmer centripetal-accellerationen.

Problem5



V_f

V

En fontän bildas genom vatten som sprutar vertikalt med en hastighet v ur ett munstycke med area a. Ett klot med massa m balanserar på vattenstrålen enligt ritningen. Uttryck höjden av klotet ovanför munstycket som en funktion av v, a, vattnets densitet ρ och g. I praktiken erhålls en övre gräns på höjden då luftmotstånd, viskositet, samt vattenstrålens verkan på klotet idealiserats. Ersätt sedan v i det slutgiltiga uttrycket med en lämplig funktion av vattentrycket p i munstycket och kontrollera att klotet täpper till munstycket när $h = 0$.

$$\rho v a = \rho_f v_f a_f$$

$$Mg = \rho_f v_f^2 a_f$$

$$= v_f (\rho v a)$$ mass konserv.

$$v^2 - v_f^2 = 2gh$$ lägesenergi

mass kons ⇒ $$v_f^2 = \left(\frac{Mg}{\rho v a}\right)^2$$

$$v^2 - 2gh = \text{''}$$

$$2gh = v^2 - \left(\frac{Mg}{\rho v a}\right)^2$$

$$\boxed{h = \frac{1}{2g}\left(v^2 - \left(\frac{Mg}{\rho v a}\right)^2\right)}$$

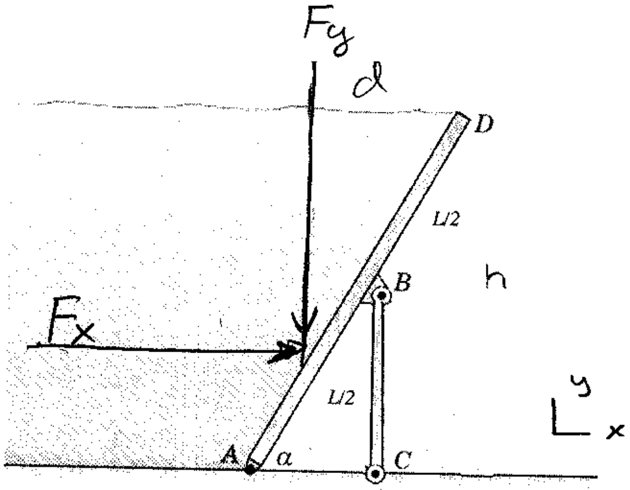
Kontrollera $h = 0$

$$F_{nere} = \rho \frac{dG}{dt} = \rho v^2 a \Rightarrow P = \rho v^2$$

när $h = 0 \Rightarrow v = \frac{Mg}{\rho v a}$

$$\rho v^2 a = Mg \Rightarrow aP = Mg \checkmark$$

Problem6



En översvämningsbarriär visas. Vertikala stolpar såsom **BC** är placerade med avstånd W från varandra längs med barriären. Låt ρ vara vattnets densitet, längden av barriären L. Ytan på barriären utgör en vinkel α från horisontellt; g är tyngdaccellerationen. Beräkna kompressionskraften för den vertikala stolpen som en funktion av de angivna parametrarna.

$$\frac{F_x}{W} = \rho \frac{h^2}{2} \cdot g \qquad \frac{F_y}{W} = -\rho \frac{h}{2} d g$$

$$A: \quad F_x \bar{y} + F_y \bar{x} = F \cdot \frac{L}{2}$$

$$W\left(\frac{\rho h^2}{2} \frac{h}{3} g + \frac{\rho h d}{2} \frac{d g}{3}\right) = \frac{1}{2} F d$$

$$g \frac{\rho W}{6} \left(h^3 + h d^2 \right) = \frac{1}{2} F d$$

$$g \frac{\rho W}{6} L^2 h = \frac{1}{2} F d$$

$$F = \frac{1}{3} \rho W L^2 \frac{h}{d} g \qquad \frac{h}{d} = \tan(\alpha)$$

$$\boxed{F = \frac{1}{3} \rho W L^2 \tan(\alpha) g}$$

check units

$$\frac{kg\, m}{s^2} \overset{?}{=} \frac{1}{3} \frac{kg}{\cancel{m^3}} \cancel{m}\, \cancel{m^2} \frac{m}{s^2} \quad \checkmark$$