Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: Tisdagen den 11 januari 2011 klockan 08.30-12.30 i M.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Examinator: Måns Henningson, ankn 3245.

Poängberäkning: Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

Betygsgränser: För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-4.
För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-6 så att 6-10 poäng ger betyg 3, 11-14 poäng ger betyg 4 och 15-18 poäng ger betyg 5.

Grundläggande uppgifter

1. Bestäm storlekarna av den kraft och det vridmoment som verkar i punkten O då jämvikt råder.

2. Tre identiska homogena cylindrar är lagda på varandra på ett horisontellt underlag enligt figuren. Bestäm det minsta värdet på den statiska friktionskoefficienten μ_s (antages vara samma i alla kontaktpunkter) för att jämvikt skall kunna råda.

3. Klossen P startar i vila från punkten A vid tiden $t = 0$ och rör sig sedan med likformig acceleration a uppför det lutande planet. Bestäm tidsderivatan $\dot{r}$ av avståndet r som funktion av tiden t.

4. Systemet släpps från vila i det avbildade läget med avståndet d givet. Cylindern med massan $3m$ kan fritt passera genom öppningen, men ringen med massan $2m$ som ligger ovanpå cylindern är så stor att den blir liggande ovanpå öppningen. Bestäm höjden h som cylindern med massan $4m$ stiger innan den vänder.

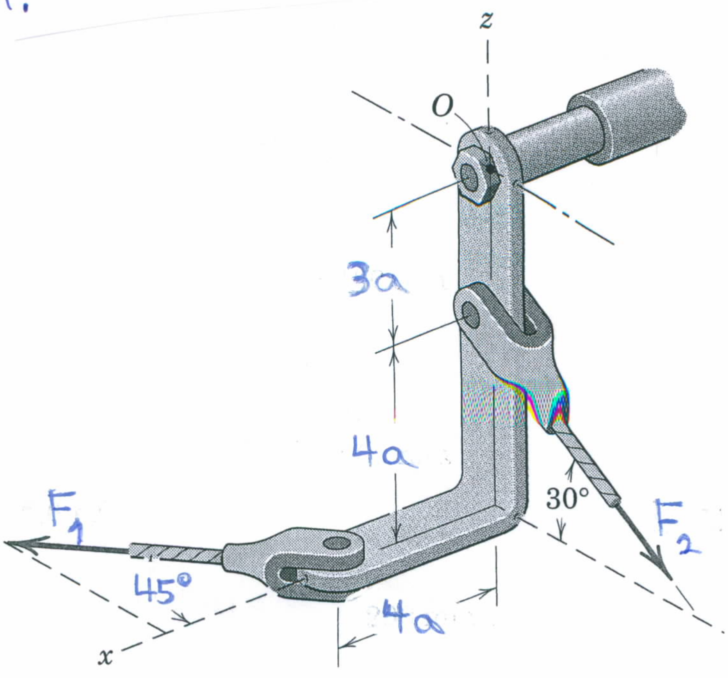
Överkursuppgifter

5. Den homogena stången har radien r och massan m. Vattnet har densiteten ρ. Bestäm spänningen T i linan då jämvikt råder i det avbildade läget.

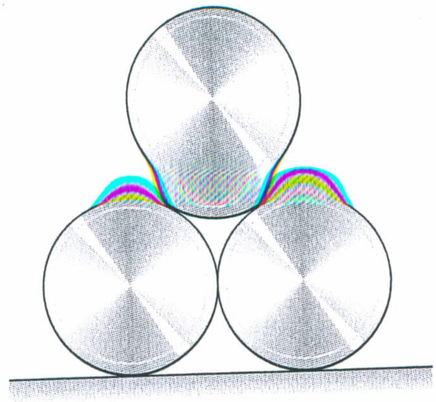
6. De två kloten, med massorna m respektive $2m$, är förenade med en lätt stång som är upphängd i en lina. Systemet startar i vila enligt figuren. Bestäm tyngdpunktens acceleration a samt stångens vinkelacceleration $\ddot{\theta}$ omedelbart efter att en horisontell kraft F har börjat verka.

Lycka till!

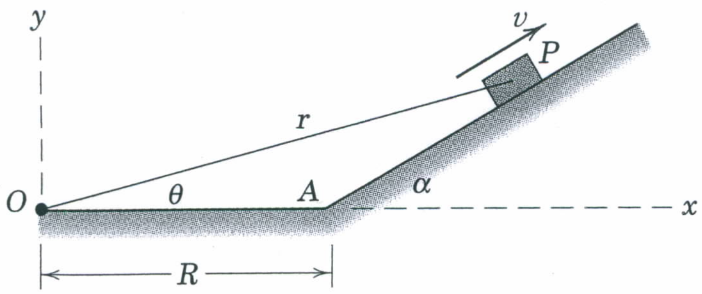
1.


z
O
3a
4a
F1
45°
30°
F2
4a
x

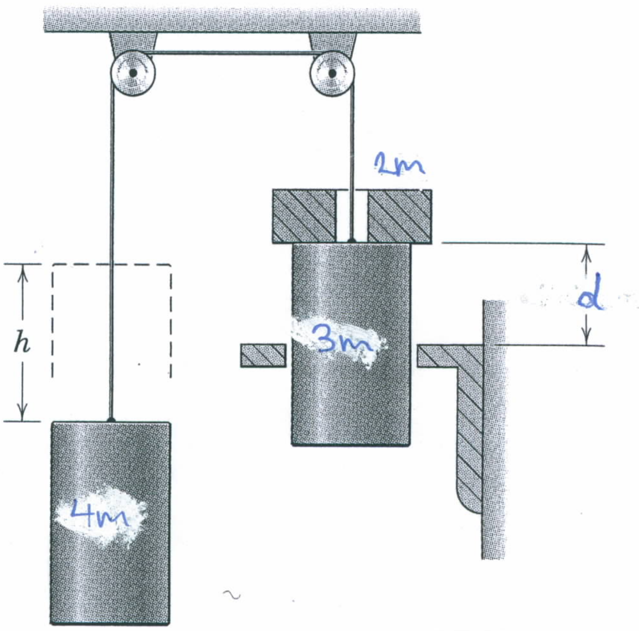
2.



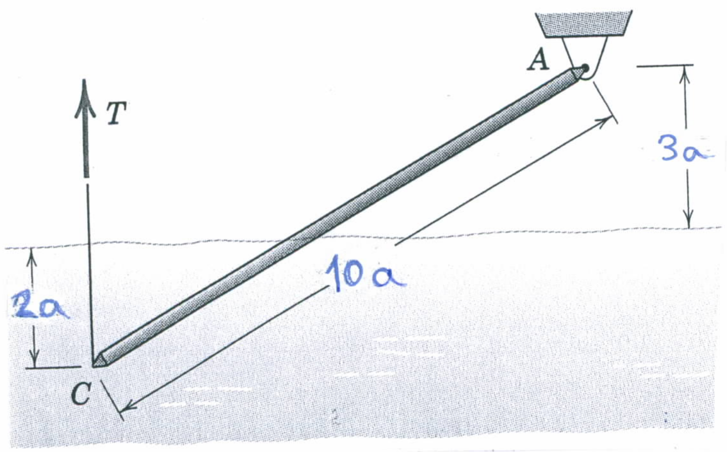
3.


y
v
P
r
O
θ
A
α
x
R

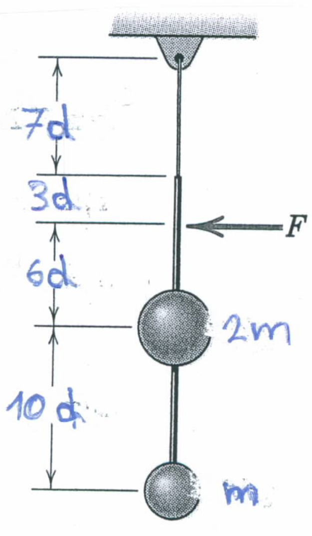
4.


2m
d
h
3m
4m

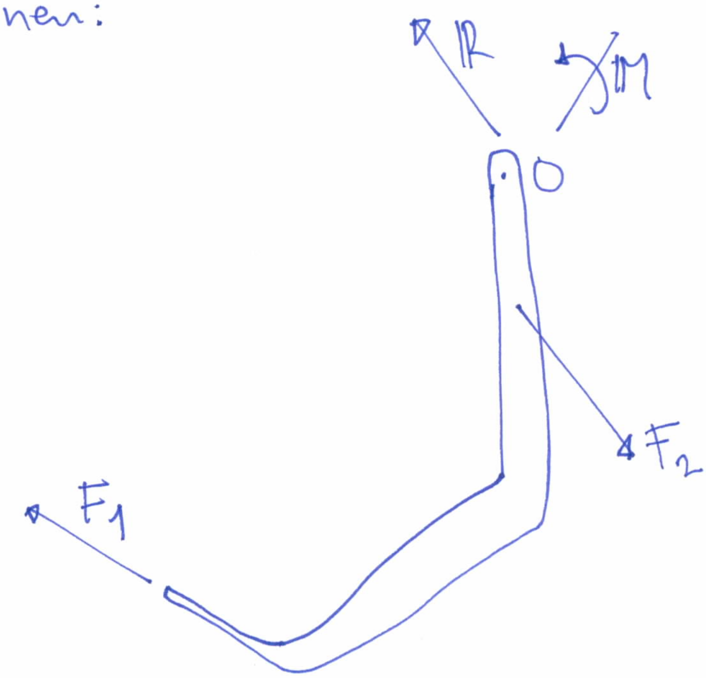
5.


A
T
3a
2a
10a
C

6.


7d
3d
F
6d
2m
10d
m

1. Frilägg konstruktionen:



Kraft- och momentjämvikt ger

$$\mathbb{R} = -F_1\left(\hat{\imath}\frac{1}{\sqrt{2}} - \hat{\jmath}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F_2\left(\hat{\jmath}\frac{\sqrt{3}}{2} - \hat{k}\frac{1}{2}\right)$$

$$= \hat{\imath}\left(-F_1\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \hat{\jmath}\left(F_1\frac{1}{\sqrt{2}} - F_2\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \hat{k}\,F_2\frac{1}{2}$$

$$\mathbb{M} = -\left(4a\,\hat{\imath} - 7a\,\hat{k}\right) \times F_1\left(\hat{\imath}\frac{1}{\sqrt{2}} - \hat{\jmath}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$-\left(-3a\,\hat{k}\right) \times F_2\left(\hat{\jmath}\frac{\sqrt{3}}{2} - \hat{k}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

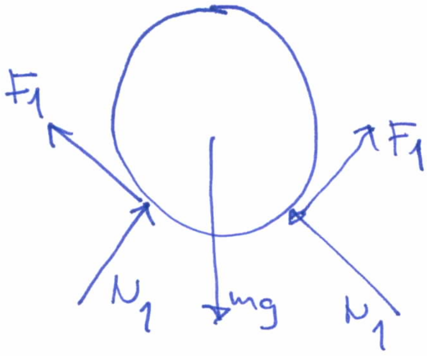
$$= \hat{\imath}\left(\frac{7}{\sqrt{2}}aF_1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}aF_2\right) + \hat{\jmath}\frac{7}{\sqrt{2}}aF_1 + \hat{k}\,2\sqrt{2}\,aF_1$$

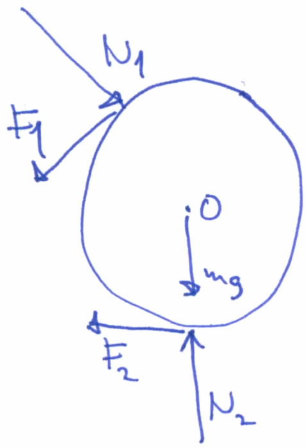
med storlekarna

$$R = \sqrt{\left(-F_1\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(F_1\frac{1}{\sqrt{2}} - F_2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(F_2\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$M = a\sqrt{\left(\frac{7}{\sqrt{2}}F_1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}F_2\right)^2 + \left(\frac{7}{\sqrt{2}}F_1\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\,F_1\right)^2}$$

2. Frilägg den övre och den högra cylindern:





Jämviktsekvationerna lyder

$$\begin{cases} \uparrow & 2N_1 \cos 30^\circ + 2F_1 \sin 30^\circ - mg = 0 \\ \uparrow & -N_1 \cos 30^\circ - F_1 \sin 30^\circ + N_2 - mg = 0 \\ \rightarrow & N_1 \sin 30^\circ - F_1 \cos 30^\circ - F_2 = 0 \\ \circlearrowleft O) & rF_1 - rF_2 = 0 \end{cases}$$

varur fås att

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = \dfrac{mg}{4+2\sqrt{3}} \\ N_1 = \dfrac{1}{2} mg \\ N_2 = \dfrac{3}{2} mg \end{cases}$$

För jämvikt krävs att $\mu_s \geq \dfrac{F_1}{N_1} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

3. Enligt cosinussatsen är

$$r = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2}at^2\right)^2 - 2R\,\frac{1}{2}at^2\cos(\pi - \alpha)}$$

$$= \sqrt{R^2 + \frac{1}{4}a^2t^4 + Rat^2\cos\alpha}$$

Derivering ger

$$\dot{r} = \frac{a^2t^3 + 2Rat\cos\alpha}{2\sqrt{R^2 + \frac{1}{4}a^2t^4 + Rat^2\cos\alpha}}$$

4. Beteckna systemets fart då ringen når öppningen med v.

Energiprincipen tillämpad på den första delen av förloppet:

$$\frac{1}{2}(4m+3m+2m)v^2 = (3m+2m-4m)gd$$

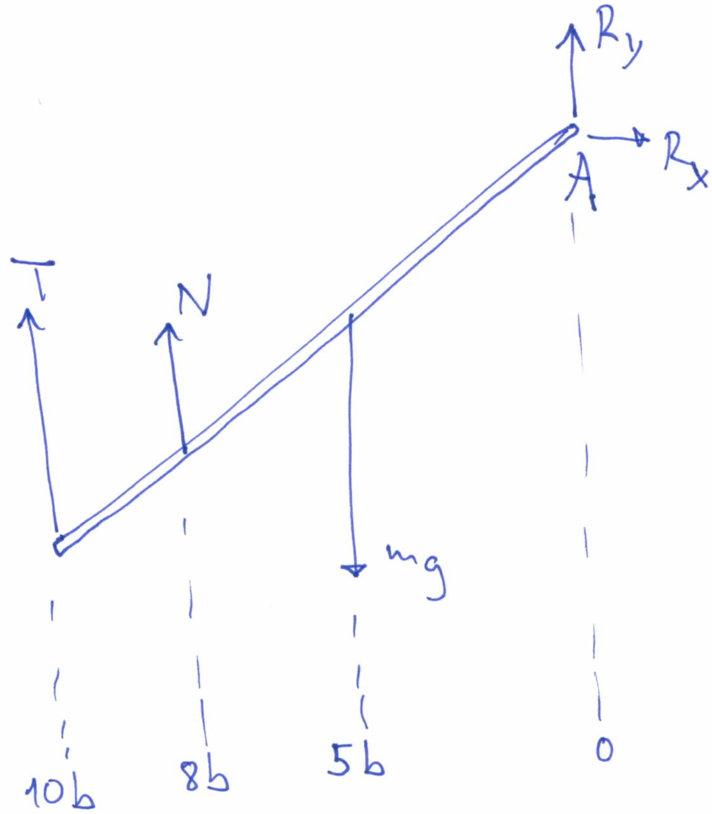
Och på den senare delen av förloppet:

$$\frac{1}{2}(4m+3m)v^2 = (4m-3m)g(h-d)$$

Ur detta fås att

$$h = \frac{16}{9}d$$

5. Frilägg stången:



10 b = stångens horisontella längd.

Lyftkraften $N = 4a\,\pi r^2 \rho g$

Momentjämvikt kring A ger

$\curvearrowleft A$: $10bT + 8bN - 5b\,mg = 0$

så att

$$T = \frac{5mg - 8N}{10} = \frac{5mg - 32a\,\pi r^2 \rho g}{10}$$

6. Tyngdpunktens acceleration

$$\bar{a} = \frac{F}{2m+m} = \frac{F}{3m}$$

Tyngdpunkten G är belägen mellan kloten på avståndet $\frac{10d}{3}$ från det tyngre klotet.

Systemets tröghetsmoment m a p G är

$$I_G = 2m\left(\frac{10d}{3}\right)^2 + m\left(\frac{20d}{3}\right)^2$$

$$= \frac{200}{3} m d^2$$

Kraften F utövar ett vridmoment

$$M_G = \left(6d + \frac{10d}{3}\right) \cdot F = \frac{28d}{3} F$$

m a p tyngdpunkten.

Vinkelaccelerationen är

$$\ddot{\theta} = \frac{M_G}{I_G} = \frac{7F}{50md}$$