Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: Måndagen den 8 mars 2010 klockan 08.30-12.30.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Examinator: Måns Henningson, ankn 3245.

Poängberäkning: Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

Betygsgränser: För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-4.
För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-6 så att 6-10 poäng ger betyg 3, 11-14 poäng ger betyg 4 och 15-18 poäng ger betyg 5.

Grundläggande uppgifter

1. Stängerna, vars massa försummas, är fritt vridbara kring punkterna A respektive C. Konstruktionen belastas med en vertikal kraft F i punkten B. Bestäm spänningen i linan DE. (*Ledning:* Problemet är statiskt obestämt, så det går inte att bestämma alla krafter, men den sökta spänningen kan bestämmas genom att använda momentjämvikt kring en lämplig axel.)

2. De båda stängerna är homogena och har vardera massan m och längden $2a$. Den statiska friktionskoefficienten vid punkten C är $\mu_s = 0.5$. Bestäm det intervall som den horisontella kraften P måste ligga i för att jämvikt skall råda.

3. En partikel rör sig med konstant fart v längs en hyperbolisk kurva i xy-planet med ekvationen
$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1,$$
där c och d är givna konstanter med dimensionen längd. Bestäm storleken a av partikelns acceleration i det ögonblick då den passerar punkten A.

4. Fjädern har fjäderkonstanten k och ospända längden L_0. Blocket har massan m och släpps i vila i det avbildade läget. Friktionskoefficienten $\mu_k = \mu_s$ mellan blocket och det lutande planet är så liten att blocket börjar glida neråt. Bestäm den sträcka x som blocket glider innan det vänder för första gången.

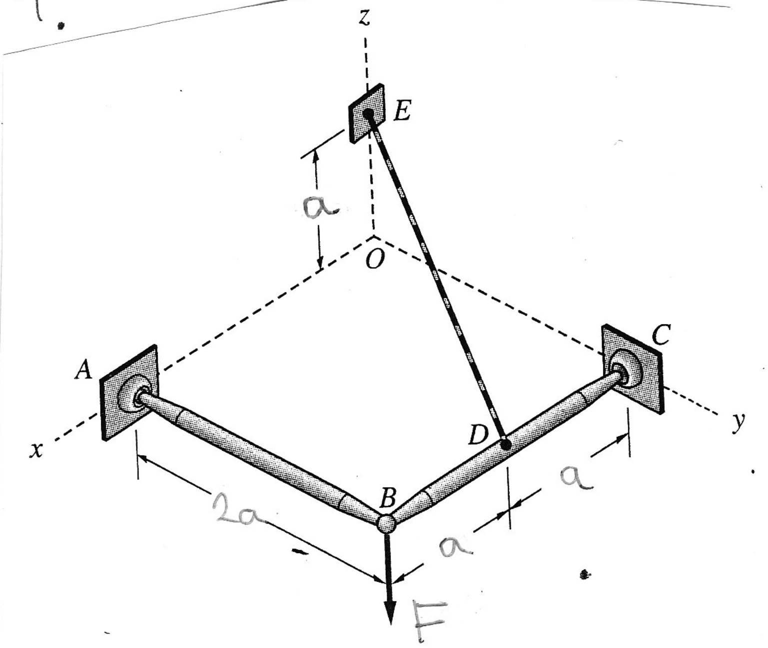
Överkursuppgifter

5. Balken belastas med två motriktade krafter med storleken P enligt figuren. (Balkens tyngd försummas.) Bestäm skjuvspänningen V och böjmomentet M (i den raka delen av balken längs med x-axeln) som funktioner av avståndet x från balkens ändpunkt.

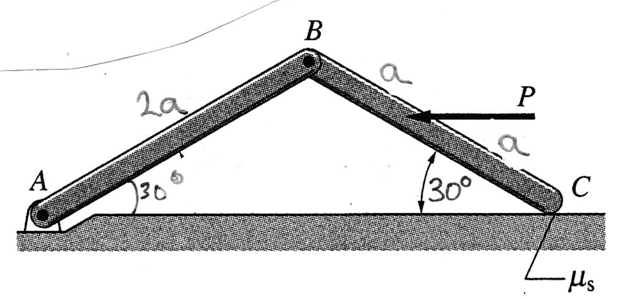
6. Vattnet har densiteten ρ, och flödet (=volym/tidsenhet) är Φ. Trycket vid in och utloppet är p_0 respektive p_1. Bestäm den horisontella komponenten av den kraft varmed vattnet påverkar röret.

Lycka till!

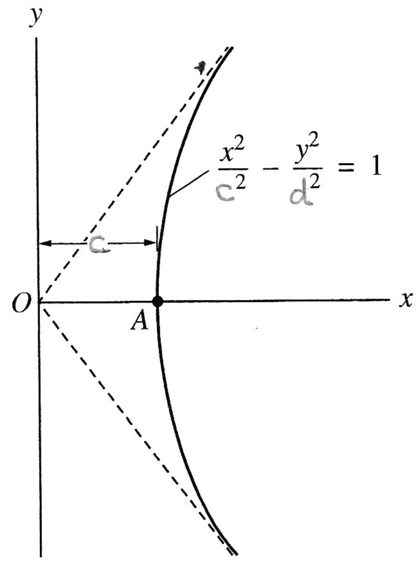
1.


z
E
a
O
C
A
x
y
D
B
2a
a
a
F

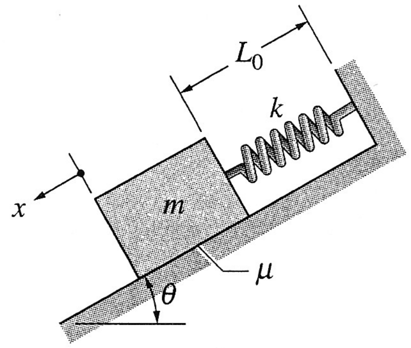
2.


B
2a
a
P
a
A
30°
30°
C
μ_s

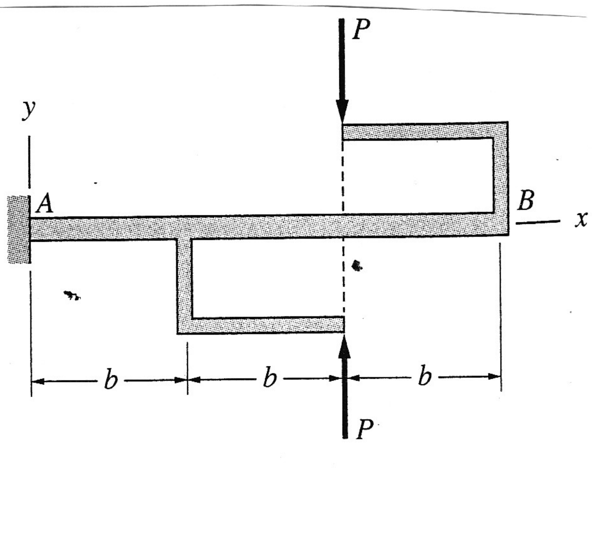
3.


y
$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1$
c
O
A
x

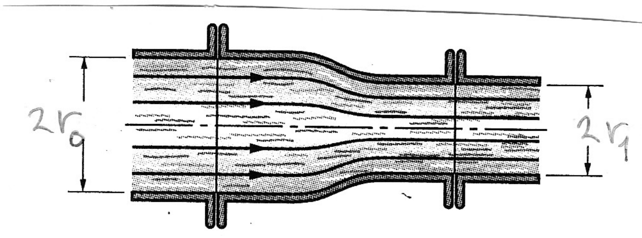
4.


L_0
k
x
m
μ
θ

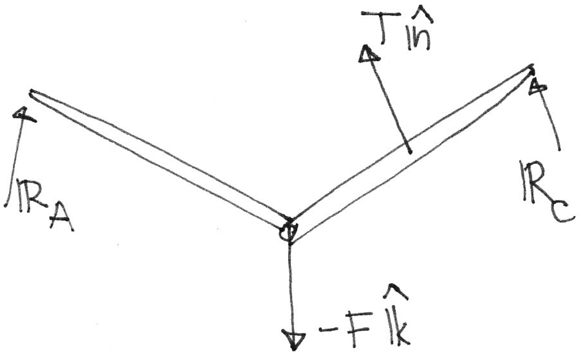
5.


P
y
A
B
x
b
b
b
P

6.


$2r_0$
$2r_1$

1. Frilägg konstruktionen:



Spännkraftens riktning är

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}\right)$$

Momentjämvikt kring A ger

$$0 = \left(-2a\hat{i} + 2a\hat{j}\right) \times \mathbb{R}_C + 2a\hat{j} \times \left(-F\hat{k}\right)$$
$$+ \left(-a\hat{i} + 2a\hat{j}\right) \times T\frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}\right)$$
$$= 2a\left(-\hat{i} + \hat{j}\right) \times \mathbb{R}_C - 2aF\hat{i}$$
$$+ \frac{aT}{\sqrt{6}}\left(2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}\right)$$

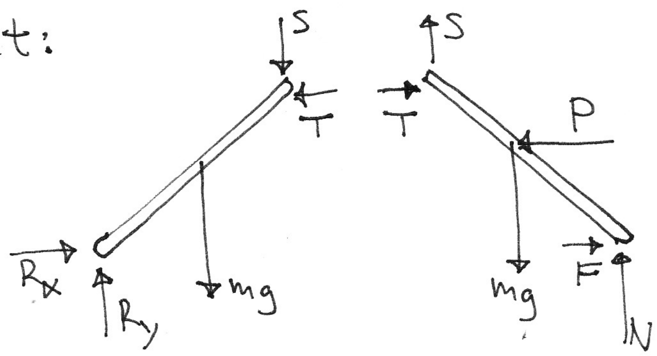
Multiplicera denna ekvation skalärt med enhetsvektorn $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\hat{i} + \hat{j}\right)$ i axeln AC's riktning:

$$0 = \sqrt{2}\, aF - \frac{1}{\sqrt{12}}\, aT$$

Varur fås att

$$T = \sqrt{24}\, F$$

2. Frilägg stängerna separat:



Jämviktsekvationerna ger (bland annat)

$$\curvearrowleft_A \quad -mga\frac{\sqrt{3}}{2} + Ta - Sa\sqrt{3} = 0$$

$$\begin{cases} \rightarrow & T - P + F = 0 \\ \uparrow & S - mg + N = 0 \\ \curvearrowleft_C & -Sa\sqrt{3} - Ta + mga\frac{\sqrt{3}}{2} + P\frac{a}{2} = 0 \end{cases}$$

Då glidning precis sker åt $\begin{matrix}\text{höger}\\\text{vänster}\end{matrix}$ är $F = \mp\mu N$.

Detta ekvationssystem ger (bland annat)

$$P = mg\,\frac{6 \mp 4\sqrt{3}\mu}{3\sqrt{3} \mp \mu}$$

För att jämvikt skall råda skall alltså

$$mg\,\frac{6 - 4\sqrt{3}\mu}{3\sqrt{3} - \mu} < P < mg\,\frac{6 + 4\sqrt{3}\mu}{3\sqrt{3} + \mu}$$

3. Derivering av villkoren

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1 \quad \text{och} \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2$$

med avseende på tiden t ger ekvationerna

$$\begin{cases} \frac{2}{c^2} x\dot{x} - \frac{2}{d^2} y\dot{y} = 0 \\ \frac{2}{c^2}(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) - \frac{2}{d^2}(\dot{y}^2 + y\ddot{y}) = 0 \\ 2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} = 0 \end{cases}$$

Insättning av $x = c$ och $y = 0$ i punkten A ger

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = v \end{cases}$$

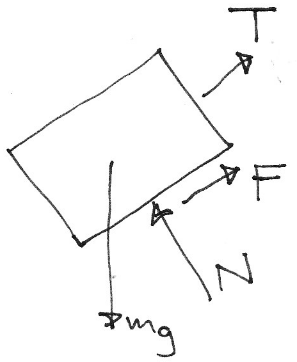
och

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{c}{d^2} v^2 \\ \ddot{y} = 0 \end{cases}$$

Accelerationens storlek är alltså

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \frac{c}{d^2} v^2$$

4. Frilägg blocket



Newton II i riktningen vinkelrät mot planet ger

$$N = mg\cos\theta$$

och friktionsvillkoret ger sedan

$$F = \mu_k N = \mu_k mg\cos\theta$$

När blocket har glidit sträckan x har friktionskraften uträttat arbetet

$$U = -Fx = -\mu_k mg\cos\theta\ x$$

Eftersom den kinetiska energin är noll både i start och slutläget skall U vara lika med ändringen i potentiell energi

$$U = -mg\sin\theta\ x + \frac{k}{2}(x^2 - 0)$$

ospänd fjäder i startläget

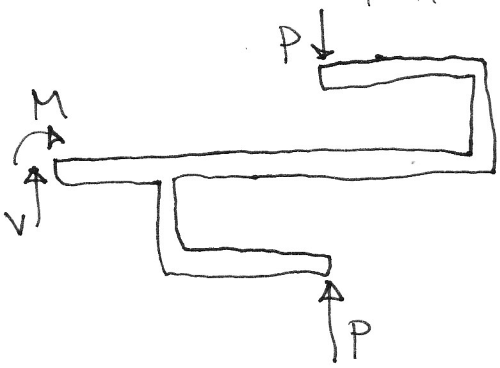
Härur fås att

$$x = \frac{2mg}{k}(\sin\theta - \mu_k\cos\theta) > 0$$ enligt förutsättning.

(eller $x=0$ svarande mot startläget).

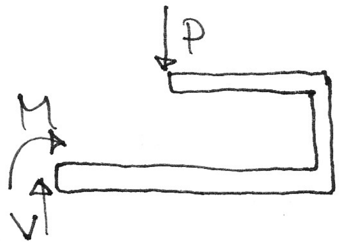
5. Frilägg den del av balken som ligger till höger om x och ställ upp jämviktsvillkoren:

$0 < x < b$

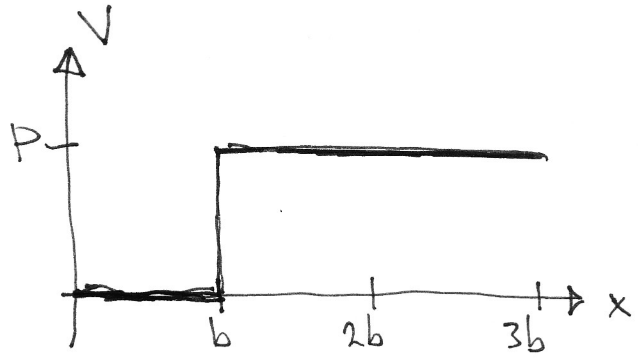


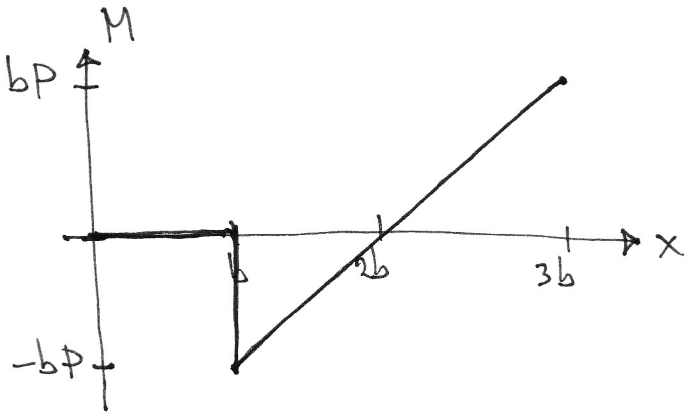
$$\begin{cases} V = 0 \\ M = 0 \end{cases}$$

$b < x < 3b$

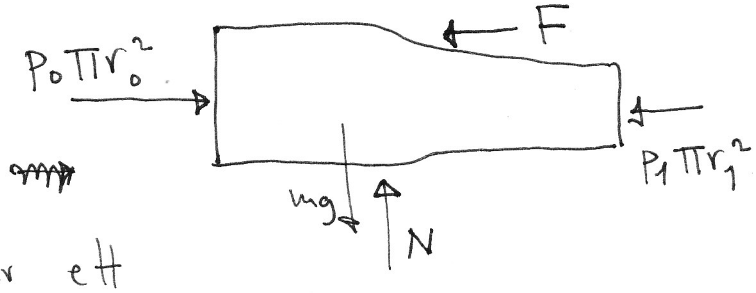


$$\begin{cases} V = P \\ M = -(2b - x)P \end{cases}$$





6. Frilägg vattnet i röret



Tillförd impuls under ett tidsintervall Δt är

$$I = \left(p_0 \pi r_0^2 - p_1 \pi r_1^2 - F \right) \Delta t$$

Detta är lika med ändringen i rörelsemängd

$$\Delta G = \rho \Phi \Delta t \left(V_1 - V_0 \right)$$

$$= \rho \Phi \Delta t \left(\frac{\Phi}{\pi r_1^2} - \frac{\Phi}{\pi r_0^2} \right)$$

Härur fås den sökta kraften

$$F = p_0 \pi r_0^2 - p_1 \pi r_1^2 - \rho \Phi^2 \left(\frac{1}{\pi r_1^2} - \frac{1}{\pi r_0^2} \right)$$