Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: Måndagen den 11 januari 2010 klockan 08.30-12.30.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Examinator: Måns Henningson.
Jourhavande lärare: Sten Salomonson, 0768-179321.

Poängberäkning: Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

Betygsgränser: För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-4.
För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-6 så att 6-10 poäng ger betyg 3, 11-14 poäng ger betyg 4 och 15-18 poäng ger betyg 5.

Grundläggande uppgifter

1. Bestäm spännkraften T i linan, uttryckt i den pålagda kraften P (som är riktad från punkten D), avstånden a, b, c och vinkeln θ. (Tyngdkraften försummas.)

2. Hjulet har massan m, och den statiska friktionskoefficienten mellan hjulet och underlaget är μ_s. Om vinkeln α mellan linan och vertikalriktningen är liten eller stor kommer hjulet att rulla åt vänster respektive höger. Bestäm det kritiska värdet på α för vilket ingen rullning sker. Bestäm sedan, för detta värde på α, storleken av kraften P då hjulet börjar glida.

3. Fluidpartikeln P rör sig i pumpen så att avståndet r till centrum varierar med tiden t enligt $r = r_0 \cosh Kt$, där r_0 och $K = \dot{\theta}$ är givna konstanter. Bestäm storleken a av partikelns accelerationsvektor $\mathbf{a}$ uttryckt i r, r_0 och K (men inte t).

4. Bilen med massan m startar från vila, och accelererar sedan likformigt uppför backen, som har lutningsvinkeln α, så att den efter att ha tillryggalagt sträckan s har hastigheten v. Bestäm den effekt P som överförs från motorn till drivhjulen i detta ögonblick.

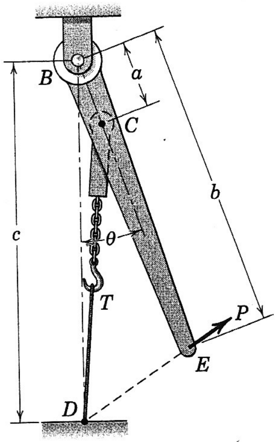
Överkursuppgifter

5. Balken belastas med en vertikal kraftfördelning w, som varierar med avståndet x från punkten A enligt $w = k_1 x - k_2 x^2$, där k_1 och k_2 är givna konstanter. (Balkens tyngd försummas.) Bestäm reaktionskrafterna på balken från stöden i A och B.

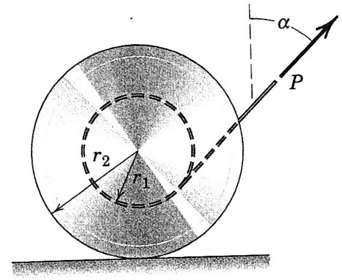
6. Då avståndet $x = 0$ har vagnen och kedjan som ligger på den tillsammans massan m. Vagnen påverkas sedan av en konstant dragkraft P. Kedjan har massan ρ per längdenhet och glider fritt genom hålet i vagnen. Varje länk bromsas in av spänningen T i den del av kedjan som redan ligger på marken. (Kraften mellan denna länk och de som är kvar på vagnen försummas.) Bestäm vagnens acceleration a, uttryckt i P, m, ρ och x. Bestäm även spänningen T, uttryckt i ρ och vagnens hastighet v.

Lycka till!

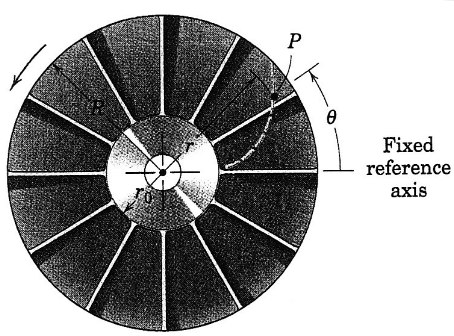
1.


B
a
C
b
c
θ
T
P
E
D

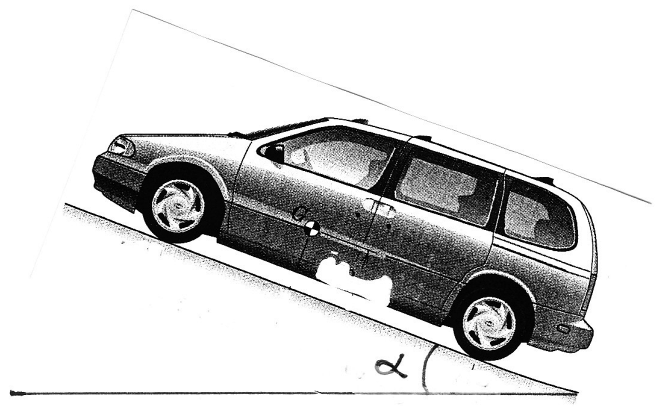
2.


α
P
r_2
r_1

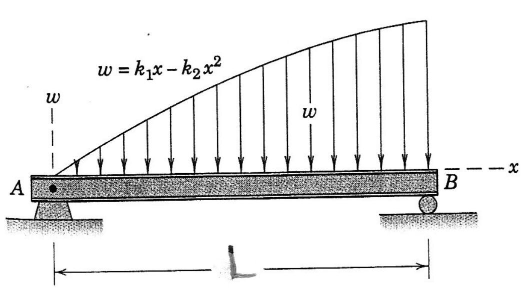
3.


P
R
r
θ
r_0
Fixed reference axis

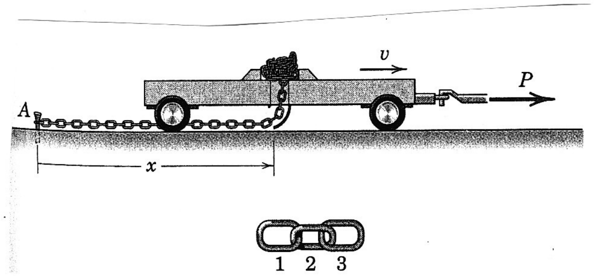
4.


G
α

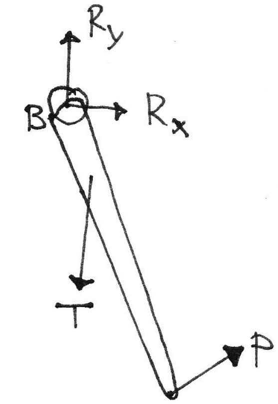
5.


$w = k_1x - k_2x^2$
w
w
A
B
x
L

6.

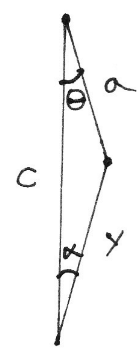

v
P
A
x
1 2 3

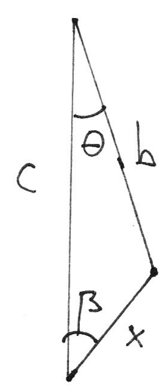
1. Frilägg konstruktionen:



Krafterna T och P bildar vinklarna α respektive β med vertikalriktningen, där

$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{a}{y}\sin\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos\theta}}\sin\theta \\ \sin\beta = \dfrac{b}{x}\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\theta}}\sin\theta \end{cases}$$





Momentjämvikt kring B ger

$$\curvearrowleft B) \quad 0 = Pc\sin\beta - Tc\sin\alpha$$

varur fås att

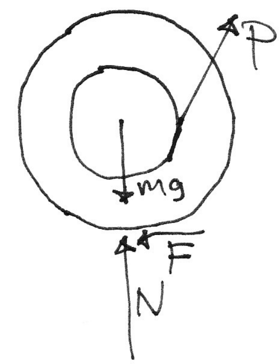
$$T = P\,\frac{b}{a}\,\frac{\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos\theta}}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\theta}}$$

2. Det kritiska värdet är

$$\alpha = \arcsin \frac{r_1}{r_2}$$

så att verkningslinjen för P går genom kontaktpunkten mellan hjulet och planet.

Friläggningen blir då



Kraftjämvikt ger ekvationerna

$$\begin{cases} \uparrow: & N + P\cos\alpha - mg = 0 \\ \rightarrow: & P\sin\alpha - F = 0 \end{cases}$$

Då glidning precis sker är $F = \mu_s N$ så att

$$P = \frac{mg}{\frac{1}{\mu_s}\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{mg\,\mu_s\, r_2}{r_1 + \mu_s\sqrt{r_2^2 - r_1^2}}$$

3. I polära koordinater är

$$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\, e_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\, e_\theta$$

$$= 2 r_0 K^2 \sinh Kt \quad e_\theta$$

$$= 2K^2 r_0 \sqrt{\cosh^2 Kt - 1} \quad e_\theta$$

$$= 2K^2 \sqrt{r^2 - r_0^2} \quad e_\theta$$

så att $\quad a = 2K^2 \sqrt{r^2 - r_0^2}$

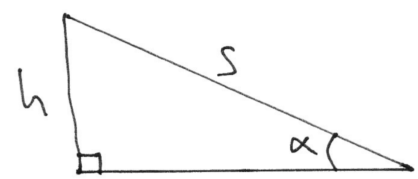
4. Accelerationen är $a = \frac{v^2}{2s}$.

Energiprincipen ger nu

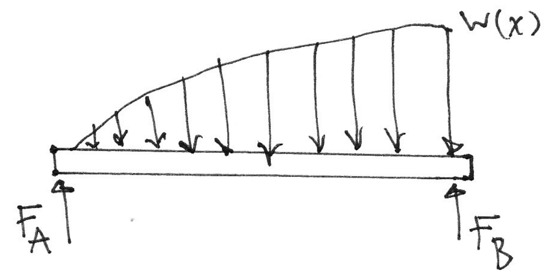
$$P = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + mgh\right)$$

$$= mva + mgv\sin\alpha$$

$$= \frac{mv^3}{2s} + mgv\sin\alpha$$



5. Frilägg balken



Jämviktsekvationerna lyder

$$
\begin{cases}
\uparrow: & F_A + F_B - \int_0^L dx\, w(x) = 0 \\
\overset{\curvearrowleft}{A}: & L F_B - \int_0^L dx\, x\, w(x) = 0
\end{cases}
$$

varur fås att

$$
\begin{cases}
F_A = \int_0^L dx\, w(x) - \frac{1}{L}\int_0^L dx\, x\, w(x) = \frac{1}{6}k_1 L^2 - \frac{1}{12}k_2 L^3 \\
F_B = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, x\, w(x) = \frac{1}{3}k_1 L^2 - \frac{1}{4}k_2 L^3
\end{cases}
$$

6. Då vagnen har rört sig sträckan s har den massan $m - \rho x$.

Newton II för vagnen med den del av kedjan som ligger kvar på den ger då

$$a = \frac{P}{m - \rho x}.$$

Impulslagen för vagnen och hela kedjan ger nu

$$P - T = \frac{d}{dt}\left((m - \rho x)\, v\right)$$

$$= (m - \rho x)\, a - \rho v^2$$

$$= P - \rho v^2$$

d v s

$$T = \rho v^2$$