# Tentamen i FFM515 Mekanik 1

*Tid och plats:* Måndagen den 9 mars 2009 klockan 08.30-12.30 i V.
*Hjälpmedel*: Typgodkänd räknedosa.
*Examinator*: Måns Henningson.
*Jourhavande lärare*: Sten Salomonson, 076-8179321.

*Poängberäkning*: Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

*Betygsgränser*: För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-4.
För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-6 så att 6-10 poäng ger betyg 3, 11-14 poäng ger betyg 4 och 15-18 poäng ger betyg 5.

*Grundläggande uppgifter*

1. Bommen, med massan $m$ och tyngdpunkten i $G$, är fritt vridbar kring $O$. Avstånden från $O$ till $A$, $B$, $C$ och $G$ är $5a$, $4a$, $4a$ respektive $3a$. Bestäm spännkrafterna i de två linorna.

2. Byrålådan (som är avbildad ovanifrån) har bredden $b$ och djupet $a$. Den statiska friktionskoefficienten mellan lådan och byråväggarna är $\mu_s$. (Avståndet mellan byråväggarna är lite större än $b$. Friktionskraften på lådans botten försummas.) Bestäm det största tillåtna värdet på avståndet $x$, så att lådan inte fastnar när man drar i endast ett av handtagen enligt figuren.

3. Bestäm vinkelhastigheten $\omega$ för den vertikala ringen så att kulan kan ligga stilla i förhållande till ringen med ett givet värde på vinkeln $\alpha$. Friktionen mellan ringen och kulan försummas.

4. Systemet släpps i vila i det avbildade läget. Bestäm hastigheten för $A$ i det ögonblick när $OA$ är vertikal. (Friktionen samt stängernas massor försummas.)

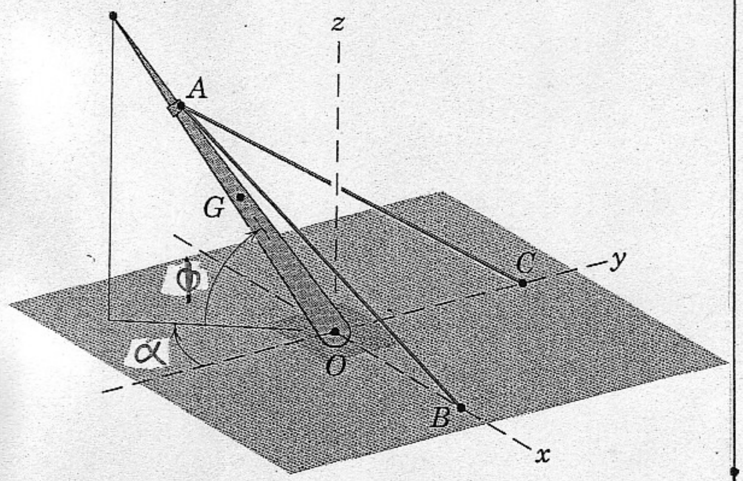
*Överkursuppgifter*

5. Vätskan har densiteten $\rho$. Den triangulära luckan är fritt vridbar kring en horisontell axel genom $O$ vinkelrät mot pappret plan. Bestäm den minsta kraften $P$ som behövs för att hålla luckan stängd.

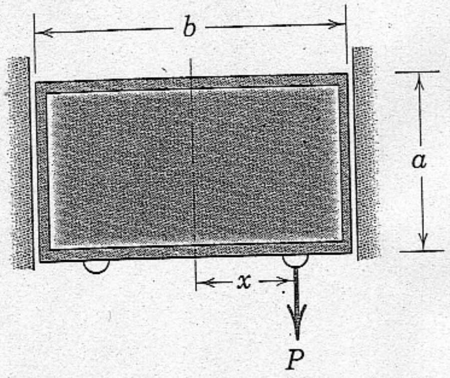
6. Vattenspridaren är fritt vridbar kring den vertikala axeln. Vart och ett av de fyra munstyckena har tvärsnittsarean $A$, och det totala vattenflödet är $\nu$ (volymsenheter per tidsenhet). Bestäm rotationshastigheten $\omega$.
*(Vatten)ledning:* Använd rörelsemängdsmomentet.

*Lycka till!*

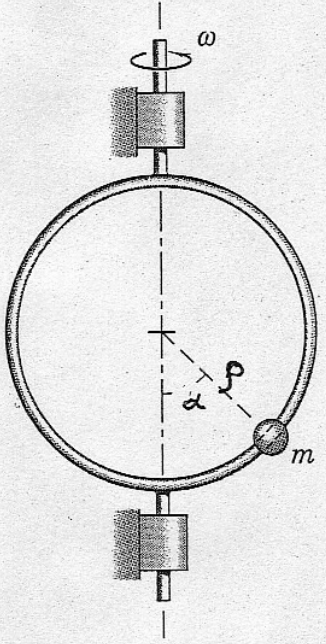
1.



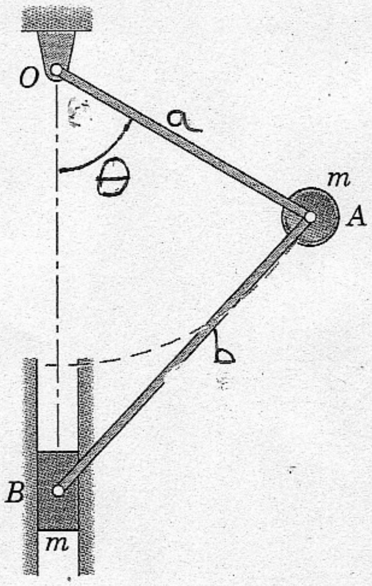
2.



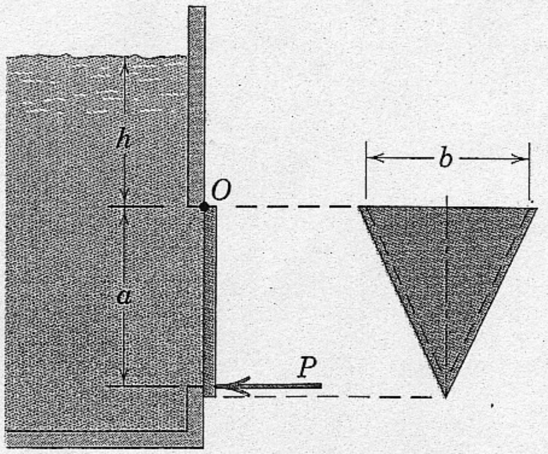
3.



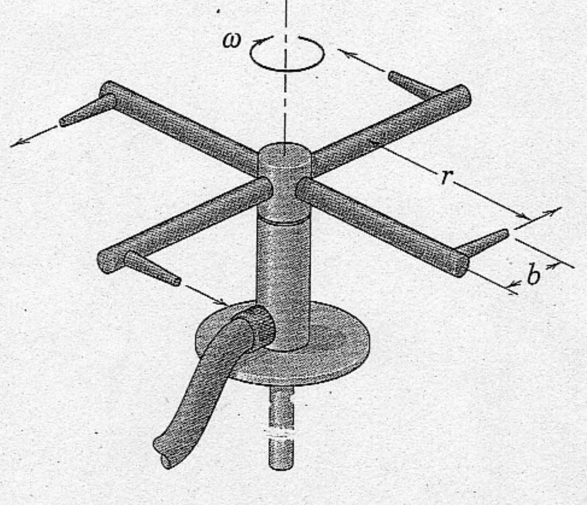
4.



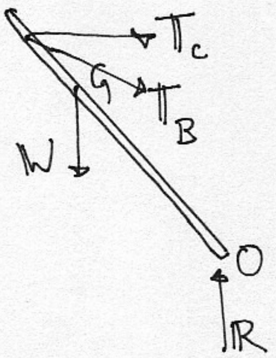
5.



6.



1. Frilägg bommen:



$$\begin{cases} \mathbf{W} = -mg\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{T}_B = T_B |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|^{-1} (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \\ \mathbf{T}_c = T_c |\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_A|^{-1} (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_A) \end{cases}$$

Ortsvektorerna för A, B, C och G m a p O är

$$\begin{cases} \mathbf{r}_A = 5a(-\cos\phi \sin\alpha\, \hat{\mathbf{i}} - \cos\phi\cos\alpha\, \hat{\mathbf{j}} + \sin\phi\, \hat{\mathbf{k}}) \\ \mathbf{r}_B = 4a\, \hat{\mathbf{i}} \\ \mathbf{r}_c = 4a\, \hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{r}_G = 3a(-\cos\phi \sin\alpha\, \hat{\mathbf{i}} - \cos\phi\cos\alpha\, \hat{\mathbf{j}} + \sin\phi\, \hat{\mathbf{k}}) \end{cases}$$

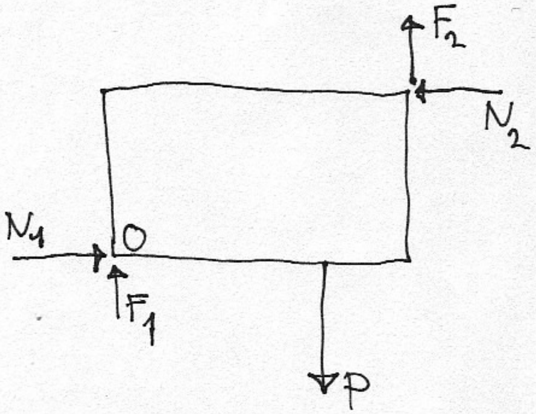
Momentjämvikt kring O ger

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{r}_G \times \mathbf{W} + \mathbf{r}_A \times \mathbf{T}_B + \mathbf{r}_A \times \mathbf{T}_c \\ &= -mg\, 3a\, (\cos\phi \sin\alpha\, \hat{\mathbf{j}} - \cos\phi\cos\alpha\, \hat{\mathbf{i}}) \\ &\quad + T_B |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|^{-1}\, 20a^2 (\cos\phi\cos\alpha\, \hat{\mathbf{k}} + \sin\phi\, \hat{\mathbf{j}}) \\ &\quad + T_c |\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_A|^{-1}\, 20a^2 (-\cos\phi\sin\alpha\, \hat{\mathbf{k}} - \sin\phi\, \hat{\mathbf{i}}) \end{aligned}$$

varur fås att

$$\begin{cases} T_B = \frac{3mg}{20a} |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A| \cot\phi \sin\alpha = \frac{3mg}{20} \sqrt{41 + 40\cos\phi\sin\alpha}\, \cot\phi \sin\alpha \\ T_c = \frac{3mg}{20a} |\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_A| \cot\phi \cos\alpha = \frac{3mg}{20} \sqrt{41 + 40\cos\phi\cos\alpha}\, \cot\phi \cos\alpha \end{cases}$$

2. Frilägg byrålådan:



Jämviktsekvationerna lyder

$$\begin{cases} \rightarrow: & N_1 - N_2 = 0 \\ \uparrow: & F_1 + F_2 - P = 0 \\ \curvearrowleft O: & bF_2 + aN_2 - (\frac{b}{2} + x)P = 0 \end{cases}$$

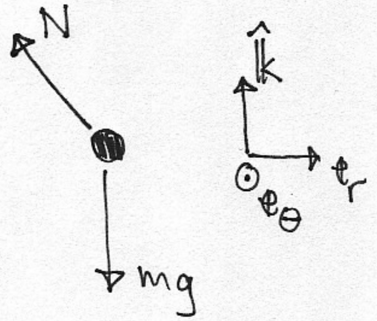
I gränsfallet då lådan precis fastnar är

$$\begin{cases} F_1 = \mu_s N_1 \\ F_2 = \mu_s N_2 \end{cases}$$

Ur detta fås att

$$x = \frac{a}{2\mu_s}$$

3. Frilägg kulan:



Den resulterande kraften är

$$\mathbb{F} = N\left(\cos\alpha\,\hat{\mathbb{k}} - \sin\alpha\,\mathbb{e}_r\right) - mg\,\hat{\mathbb{k}}$$

Kulans acceleration är

$$\mathbb{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbb{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbb{e}_\theta + \ddot{z}\,\hat{\mathbb{k}}$$

$$= -\rho\sin\alpha\,\omega^2\,\mathbb{e}_r$$

ty $\begin{cases} r = \rho\sin\alpha = \text{konstant} \\ \dot{\theta} = \omega = \text{konstant} \\ z = \text{konstant} \end{cases}$ polära koordinater

Newtons andra lag $\mathbb{F} = m\mathbb{a}$ ger nu

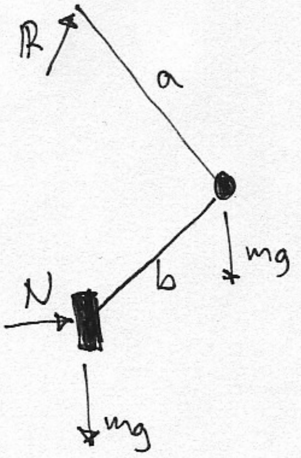
$$\begin{cases} -N\sin\alpha = -m\rho\sin\alpha\,\omega^2 \\ N\cos\alpha - mg = 0 \end{cases}$$

Varur fås att

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\rho\cos\alpha}}$$

4. Frilägg systemet:

Endast de konservativa tyngdkrafterna uträttar arbete på systemet.



Ursprunglig kinetisk energi $= 0$

〃 potentiell 〃 $= -mga\cos\theta - mg\left(a\cos\theta + \sqrt{b^2-(a\sin\theta)^2}\right)$

Slutlig kinetisk energi $= \frac{1}{2}mv_A^2$ (B i vila)

〃 potentiell 〃 $= -mga - mg(a+b)$

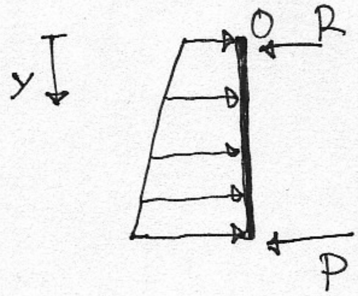
Energiprincipen lyder nu

$$-mga\cos\theta - mg\left(a\cos\theta + \sqrt{b^2-(a\sin\theta)^2}\right) = \frac{1}{2}mv_A^2 - mg(2a+b)$$

varur fås att

$$V_A = \sqrt{2g\left(2a+b-2a\cos\theta-\sqrt{b^2-(a\sin\theta)^2}\right)}$$

5. Frilägg luckan:



Momentjämvikt ger

$$\circlearrowleft O: \; 0 = aP - \int_0^a dy\, y\, \rho g (h+y)\, b\left(1-\frac{y}{a}\right)$$

$$= aP - \rho g b \int_0^a dy \left(hy - \frac{h}{a} y^2 + y^2 - \frac{1}{a} y^3\right)$$

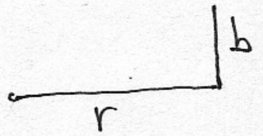
$$= aP - \rho g b \left(\frac{ha^2}{2} - \frac{ha^2}{3} + \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{4}a^3\right)$$

$$= aP - \rho g b \left(\frac{ha^2}{6} + \frac{a^3}{12}\right)$$

så att

$$P = \rho g b \left(\frac{ha}{6} + \frac{a^2}{12}\right)$$

6. Eftersom den inkommande vätskan inte har något rörelsemängdsmoment m a p rotationsaxeln och systemet inte påverkas av något vridmoment så måste även den utgående vätskan ha rörelsemängdsmomentet noll, d v s dess hastighet skall vara radiell.



Vätskans fart relativt munstycket är $\frac{v}{4A}$.

Den relativa hastighetens komponent vinkelrät mot den radiella riktningen är $\frac{v}{4A}\frac{r}{\sqrt{r^2+b^2}}$

Detta skall vara lika med munstyckets fart $w\sqrt{r^2+b^2}$ (som är vinkelrät mot radiella riktningen)

varur fås att

$$w = \frac{v}{4A}\frac{r}{r^2+b^2}$$