Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: Måndagen den 12 januari 2009 klockan 08.30-12.30 i V.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Examinator: Måns Henningson, 0737-296826.

Poängberäkning: Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

Betygsgränser: För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-5.
För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-7 så att 6-11 poäng ger betyg 3, 12-17 poäng ger betyg 4 och 18-21 poäng ger betyg 5.

Grundläggande uppgifter

1. De två markerade krafterna kan ersättas med en kraftskruv, d v s en resulterande kraft $\mathbf{R}$ med en viss verkningslinje och ett parallellt kraftparsvridmoment $\mathbf{M}$. Bestäm dessa, samt koordinaterna för den punkt P där verkningslinjen skär yz-planet.

2. Givet den minsta vinkeln θ för vilken den homogena stången kan hållas i jämvikt genom att man drar i linan, bestäm den statiska friktionskoefficienten μ_s mellan stången och underlaget.

3. En partikel rör sig i xy-planet med konstant fart $v = |\mathbf{v}|$ längs kurvan $y = \frac{k}{2}x^2$, där k är en konstant med enheten 1/längd. Bestäm storleken $a = |\mathbf{a}|$ av partikelns acceleration då den passerar origo.

4. De n kloten har samma massa och rör nästan vid varandra när linorna är vertikala. Stötkoefficienten mellan två klot är e. Det första klotet släpps från det streckade läget, och träffar det andra klotet med farten v_1. Bestäm farten v_n för det sista klotet, omedelbart efter att det har träffats av det näst sista klotet.

5. Den cylindriska bojen har radien r och massan m och flyter i vatten med densiteten ρ. Dess tyngdpunkt ligger så lågt att jämviktsläget är stabilt. Bestäm vinkelfrekvensen ω för bojens vertikala svängningar kring detta jämviktsläge. (Vattenytans läge antas vara konstant.)

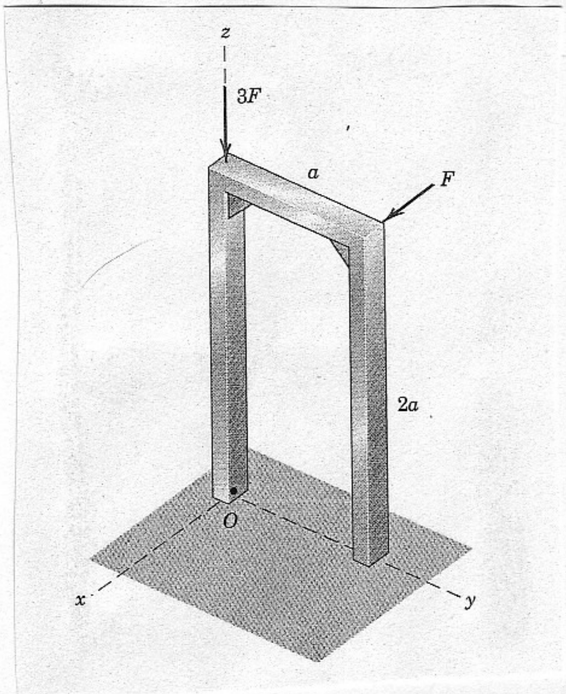
Överkursuppgifter

6. Balken belastas enligt figuren, så att den maximala lasten per längdenhet har storleken w_0 (med olika riktningar i de två ändpunkterna). Bestäm skjuvkraften V och böjmomentet M i balken som funktioner av avståndet x från balkens mittpunkt.

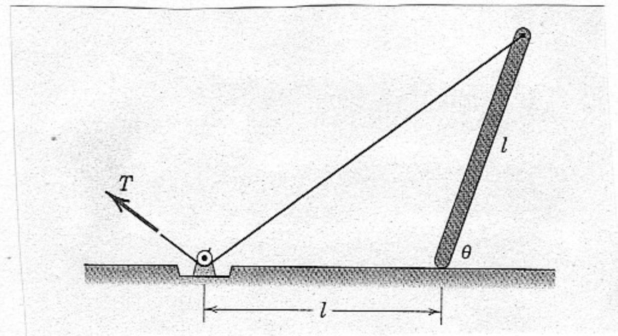
7. Prismat med höjden h och basen b utsätts för en horisontell vind vars tryck p beror av höjden y över basen enligt $p = p_0\sqrt{y/h}$ där p_0 är trycket vid toppen. Bestäm denna kraftfördelnings vridmoment med avseende på en horisontell axel längs basen.

Lycka till!

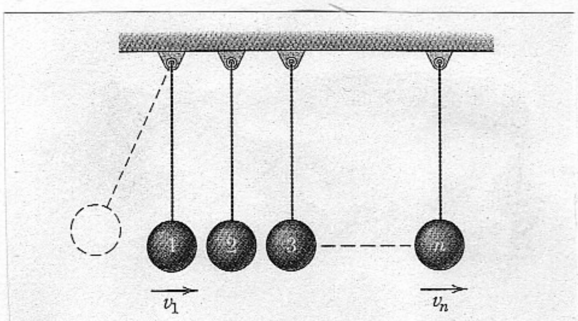
1.



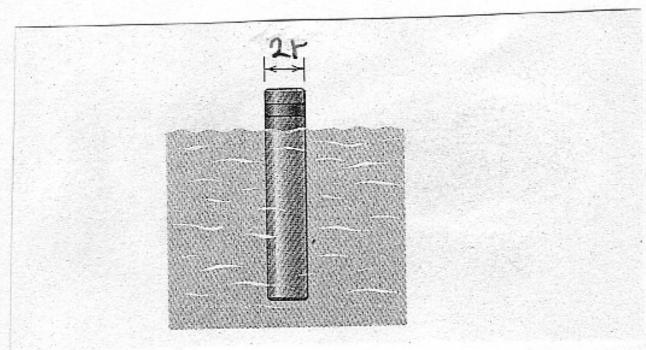
2.



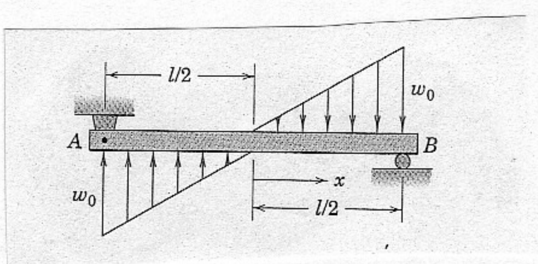
4.



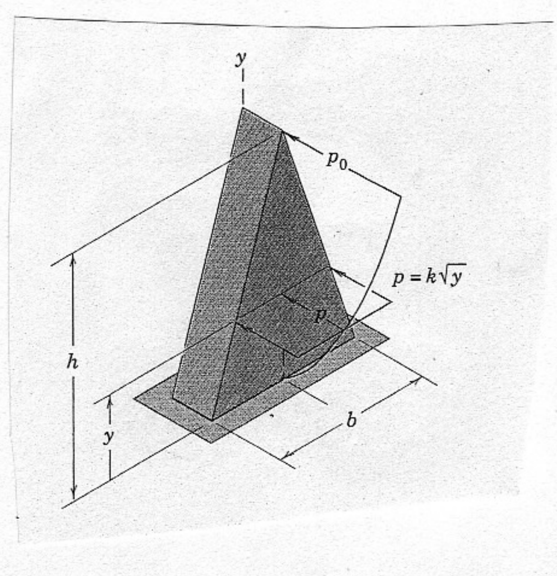
5.



6.



7.



1. Det givna kraftsystemet har kraftsumman

$$\mathbb{R} = F(\hat{\mathbb{i}} - 3\hat{\mathbb{k}})$$

och vridmomentet m a p O

$$\mathbb{M}_o = 2a\hat{\mathbb{k}} \times (-3F\hat{\mathbb{k}}) + a(\hat{\mathbb{j}} + 2\hat{\mathbb{k}}) \times F\hat{\mathbb{i}}$$

$$= aF(-\hat{\mathbb{k}} + 2\hat{\mathbb{j}}).$$

En kraftskruv med kraften $\mathbb{R} = F(\hat{\mathbb{i}} - 3\hat{\mathbb{k}})$

och ett kraftparsvridmoment $\mathbb{M} = M\frac{1}{\sqrt{10}}(\hat{\mathbb{i}} - 3\hat{\mathbb{k}})$

som angriper i punkten med ortsvektorn

$\mathbb{r} = y\hat{\mathbb{j}} + z\hat{\mathbb{k}}$ har vridmomentet m a p O

$$\mathbb{M}_o' = \mathbb{M} + \mathbb{r} \times \mathbb{R}$$

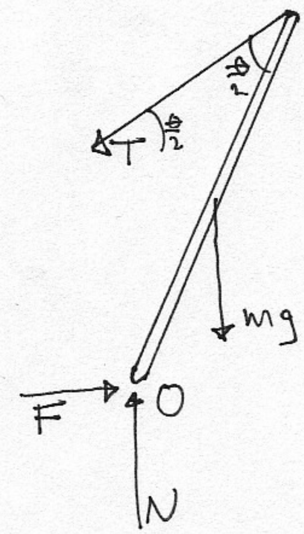
$$= \left(M\frac{1}{\sqrt{10}} - 3yF\right)\hat{\mathbb{i}} + zF\hat{\mathbb{j}} + \left(-M\frac{3}{\sqrt{10}} - yF\right)\hat{\mathbb{k}}.$$

Villkoret att $\mathbb{M}_o = \mathbb{M}_o'$ ger nu

$$\begin{cases} M = \frac{3}{\sqrt{10}} aF \\ y = \frac{1}{10} a \\ z = 2a \end{cases}$$

så att $\mathbb{M} = \frac{3}{10} aF(\hat{\mathbb{i}} - 3\hat{\mathbb{k}})$

2. Frilägg stången:



Jämviktsekvationerna lyder

$\rightarrow$: $F - T\cos\frac{\theta}{2} = 0$

$\uparrow$: $N - T\sin\frac{\theta}{2} - mg = 0$

$\curvearrowleft O$): $Tl\sin\frac{\theta}{2} - mg\frac{l}{2}\cos\theta = 0$ (l = stångens längd)

Varur fås att

$$\begin{cases} T = \dfrac{mg}{2}\dfrac{\cos\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \\[2ex] F = \dfrac{mg}{2}\dfrac{\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \\[2ex] N = mg\left(1 + \frac{1}{2}\cos\theta\right) \end{cases}$$

Då glidning precis sker gäller att

$$\mu_s = \frac{F}{N} = \frac{\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}}{(2+\cos\theta)\sin\frac{\theta}{2}}$$

3. Det gäller att

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

$$a^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 .$$

Från $y = \frac{k}{2} x^2$ följer att

$$\dot{y} = k x \dot{x} \quad \text{och} \quad \ddot{y} = k(\dot{x}^2 + x\ddot{x}).$$

Från $\dot{v} = 0$ följer att

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0.$$

Då $x = 0$ är alltså $\dot{y} = 0$ så att $\dot{x} = v$, $\ddot{x} = 0$.

Då blir $a = \ddot{y} = k v^2$

4. För stöten mellan 1:a och 2:a klotet gäller

före efter

Rörelsemängdens bevarande samt stötvillkoret ger

$$\begin{cases} m v_1 = m v_1' + m v_2 \\ v_2 - v_1' = e v_1 \end{cases}$$

varur fås

$$\begin{cases} v_1' = \frac{1-e}{2} v_1 \\ v_2 = \frac{1+e}{2} v_1 \end{cases}$$

De följande stötarna behandlas på samma sätt, och man finner att det sista klotets hastighet efter stöten är

$$v_n = \left(\frac{1+e}{2}\right)^{n-1} v_1 .$$

5. En vertikal förskjutning x från jämviktsläget ger en ändring $\pi r^2 x \rho g$ av lyftkraften.

Rörelseekvationen lyder alltså

$$m\ddot{x} + \pi r^2 x \rho g = 0$$

Varur fås vinkelfrekvensen

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi r^2 \rho g}{m}}$$

6. Lasten $w(x) = \frac{2x}{l} w_0$

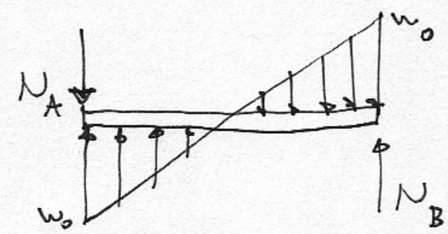
har kraftsumman 0 och vridmomentet

$$M_0 = \int_{-l/2}^{l/2} dx\, x\, w(x) = \frac{l^2 w_0}{6}$$

med avseende på mittpunkten.

Reaktionskrafterna i ändpunkterna blir

$$N_A = N_B = \frac{l w_0}{6}$$



Skjuvkraften och böjmomentet följer ur

$$\frac{dV}{dx} = -w(x) \quad \text{och} \quad \frac{dM}{dx} = V$$

med randvillkoren $V\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{l w_0}{6}$ $\quad M\left(\frac{l}{2}\right) = 0$

Man finner att

$$V(x) = -\frac{w_0}{l} x^2 + \frac{l w_0}{12}$$

$$M(x) = -\frac{w_0}{3l} x^3 + \frac{l w_0}{12} x$$

7. Det sökta vridmomentet är

$$M_0 = \int_0^h dy\, y\, b\left(1-\frac{y}{h}\right) \cdot p_0 \sqrt{y/h}$$

$$= \frac{4}{35}\, b\, p_0\, h^2$$