Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: Lördagen den 23 augusti 2008 klockan 14.00-18.00 i V.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Examinator: Måns Henningson, 0737-296826.

Poängberäkning: Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

Betygsgränser: För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-5.
För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-7 så att 6-11 poäng ger betyg 3, 12-17 poäng ger betyg 4 och 18-21 poäng ger betyg 5.

Grundläggande uppgifter

1. Bestäm vridmomentet $\mathbf{M}_A$ för kraften P med avseende på punkten A.

2. Massorna m_1 och m_2 för personen respektive plywoodplattan samt friktionskoefficienten μ_1 mellan dem är givna. Bestäm villkoret på friktionskoefficenten μ_2 mellan plattan och golvet, för att plattan skall kunna glida mot golvet utan att personen glider mot plattan, när han skjuter ifrån med händerna mot väggen.

3. Ett cykelhjul med radie R rullar längs en rät linje med farten v på en horisontell väg. Ventilen sitter på avståndet $r < R$ från hjulets centrum. Bestäm ventilens fart $u = |\mathbf{u}|$ relativt marken som funktion av vinkeln θ mellan lodlinjen och linjen från centrum till ventilen.

4. Vagnen med massan m har utgångshastigheten v_A relativt planet när den befinner sig i punkten A. Bestäm dess hastighet v_B i punkten B. (Det förutsätts att kraften P är tillräckligt stor för att vagnen skall nå punkten B.)

5. Givet massan m och fjäderkonstanten k, bestäm dämpningskoefficienten c så att systemet blir kritiskt dämpat.

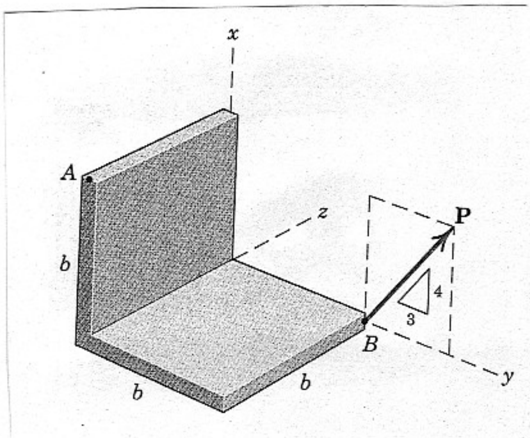
Överkursuppgifter

6. Bestäm reaktionskrafterna i punkterna A och B. (Den vertikala kraftfördelningen w betecknar kraften per horisontell längdenhet.)

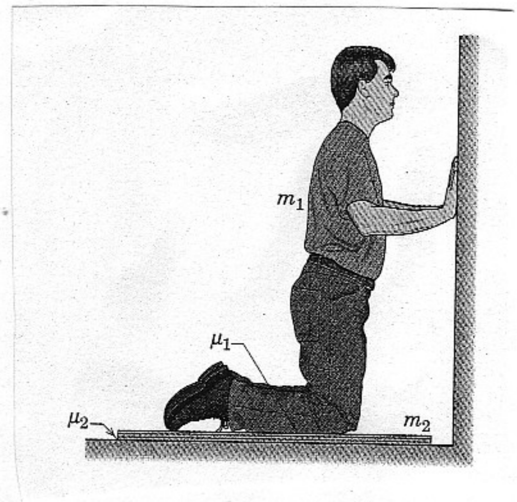
7. Bestäm resultanten (kraft med angreppspunkt) för vattentryckkraftsfördelningen på det triangulära fönstret (vars överkant ligger i vattenytan).

Lycka till!

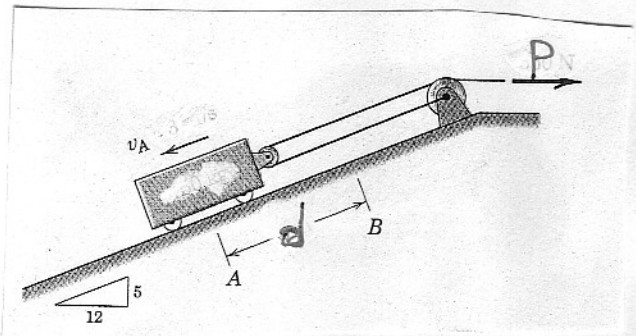
1.



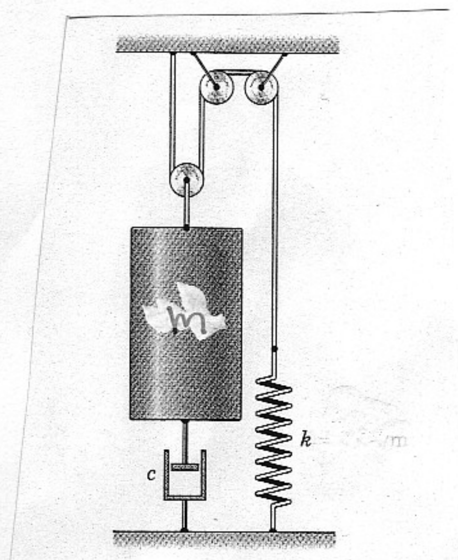
2.



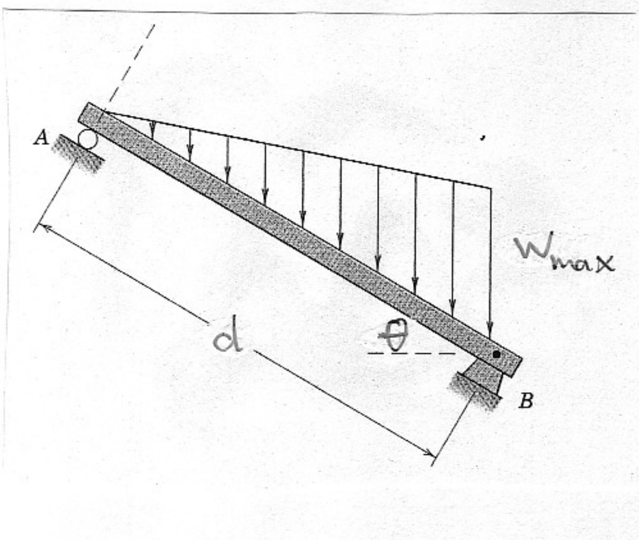
4.



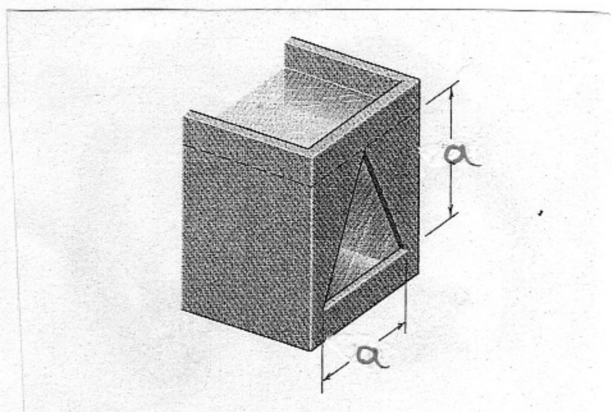
5.



6.



7.



1. Vektorn från A till B är

$$\mathbf{r}_{AB} = -b\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}} + b\hat{\mathbf{k}}.$$

Kraftvektorn är

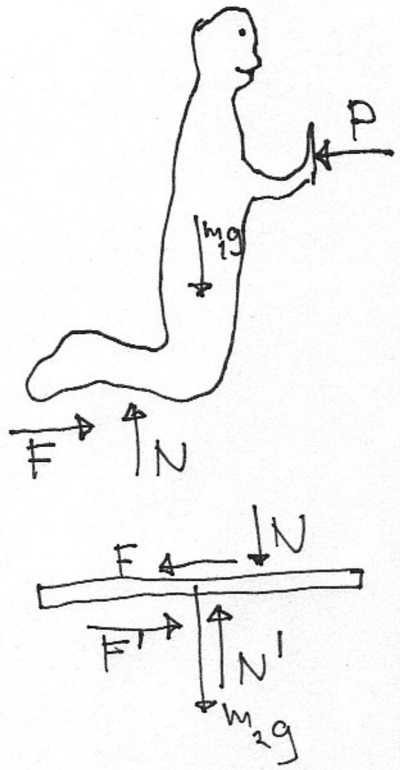
$$\mathbf{P} = P\left(\frac{4}{5}\hat{\mathbf{i}} + \frac{3}{5}\hat{\mathbf{j}}\right)$$

Det sökta vridmomentet är

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}$$

$$= bP\left(-\frac{3}{5}\hat{\mathbf{i}} + \frac{4}{5}\hat{\mathbf{j}} - \frac{7}{5}\hat{\mathbf{k}}\right)$$

2. Frilägg personen och plattan separat, och ställ upp jämviktsekvationerna:



$$\begin{cases} F = P \\ N = m_1 g \end{cases}$$

$$\begin{cases} F' = F \\ N' = N + m_2 g \end{cases}$$

Vid glidning mellan plattan och marken gäller att $F' = \mu_2 N'$.

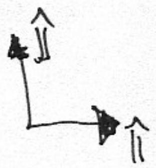
Gränsfallet att personen precis börjar glida mot plattan ger att $F = \mu_1 N$.

Tillsammans ger dessa ekvationer att

$$\mu_2 = \mu_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Det sökta villkoret är alltså $\mu_2 < \mu_1 \frac{m_1}{m_1+m_2}$.

3. Inför horisontella och vertikala enhetsvektorer $\hat{\mathbf{i}}$ och $\hat{\mathbf{j}}$.



Centrums hastighet är $\mathbf{v} = v\,\hat{\mathbf{i}}$.

Ventilens hastighet relativt centrum är

$$\mathbf{u}_{rel} = r\omega\left(\hat{\mathbf{i}}\cos\theta + \hat{\mathbf{j}}\sin\theta\right)$$

där vinkelhastigheten $\omega = \frac{v}{R}$.

Ventilens absoluta hastighet är då

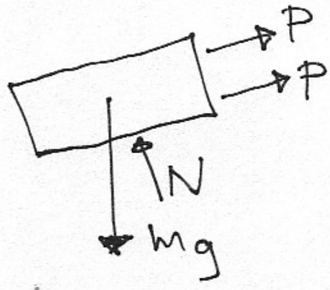
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{rel} + \mathbf{v} = v\left(\left(1 + \frac{r}{R}\cos\theta\right)\hat{\mathbf{i}} + \frac{r}{R}\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right)$$

Den sökta farten är

$$u = |\mathbf{u}| = v\sqrt{\left(1 + \frac{r}{R}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\sin\theta\right)^2}$$

$$= v\sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2\frac{r}{R}\cos\theta}$$

4. Frilägg vagnen:



Under förflyttningen från A till B uträttar de på vagnen verkande krafterna arbetet $U = 2Pd - \frac{5}{13} mgd$, vilket är lika med ändringen i vagnens kinetiska energi $\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$.

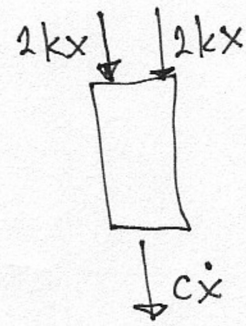
Härur fås att

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + \left(\frac{4P}{m} - \frac{10}{13} g\right) d}$$

5. Låt x beteckna massans vertikala avvikelse från jämviktsläget.

Fjäderns förlängning är då $2x$.

Frilägg massan:



Rörelseekvationen lyder

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + 4kx = 0$$

Den karaktäristiska ekvationen

$$m\lambda^2 + c\lambda + 4k = 0$$

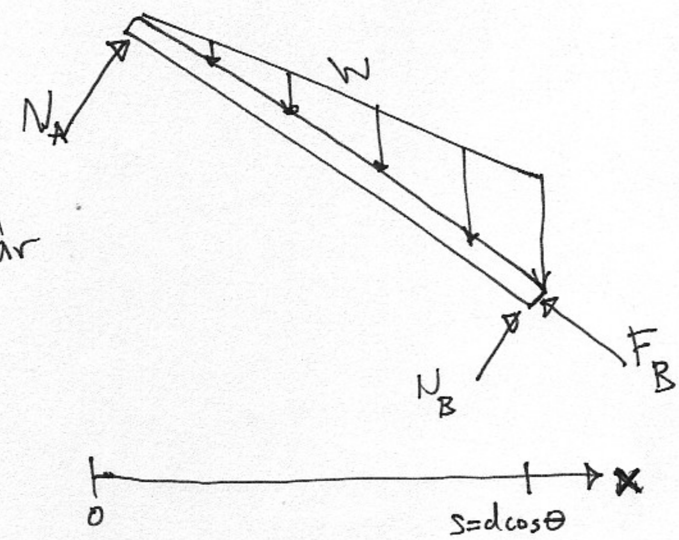
har rötterna

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{4k}{m}}$$

Kritisk dämpning inträffar då dessa sammanfaller

d v s då $\quad c = 4\sqrt{km}$

6. Frilägg balken:



Det horisontella avståndet från A till B är $s = d\cos\theta$

Kraftfördelningen har kraftsumman

$$P = \int_0^s dx\, \frac{x}{s} w_{max} = \frac{1}{2} s\, w_{max}$$

och vridmomentet m a p B

$$M_B = \int_0^s dx\, (s-x) \frac{x}{s} w_{max} = \frac{1}{6} s^2 w_{max}$$

Jämviktsekvationerna lyder

$$\begin{cases} \nearrow: & N_A + N_B - P\cos\theta = 0 \\ \nwarrow: & F_B - P\sin\theta = 0 \\ \curvearrowleft_B: & -d N_A + M_B = 0 \end{cases}$$

Varur fås att

$$\begin{cases} N_A = \frac{1}{6} d\cos^2\theta\, w_{max} \\ N_B = \frac{1}{3} d\cos^2\theta\, w_{max} \\ F_B = \frac{1}{2} d\sin\theta\cos\theta\, w_{max} \end{cases}$$

7. Beteckna vattendjupet med y.

Den resulterande kraften är

$$F = \int_0^a dy\, y \rho g y = \frac{1}{3} \rho g a^3$$ ρ = densiteten

och dess vridmoment m a p fönstrets översta punkt är

$$M_0 = \int_0^a dy\, y^2 \rho g y = \frac{1}{4} \rho g a^4$$

Verkningslinjen ligger alltså på djupet

$$d = \frac{M_0}{F} = \frac{3}{4} a$$