Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: Lördagen den 13 januari 2007 klockan 14.00-18.00 i V.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Examinator: Måns Henningson, 0737-296826.

Poängberäkning: Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

Betygsgränser: För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-4.
För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-6 så att 6-11 poäng ger betyg 3, 12-14 poäng ger betyg 4 och 15-18 poäng ger betyg 5.

Grundläggande uppgifter

1. En kropp påverkas av två vertikala krafter med storlekarna P_1 och P_2 samt ett horisontellt vridmoment med storleken C enligt figuren. Detta kraftsystem är ekvivalent med en enda kraft med en viss given storlek F som angriper i punkten A. Uttryck P_1, P_2 och C i avståndet d och kraften F.

2. Kropparna A och B har massorna $3m$ respektive $2m$. Den statiska friktionskoefficienten mellan kroppen B och underlaget är μ_s. Bestå det intervall som kraften P måste ligga i för att jämvikt skall råda. (Friktionen mellan kropparna A och B samt mellan A och den vertikala väggen försummas.)

3. De båda klossarna är i kontakt med varandra medan de glider ner för det lutande planet. Bestäm deras acceleration samt normalkraften mellan dem. (Friktionen mellan kloss A och underlaget försummas.)

4. Partikeln A och vagnen B har massorna m_A respektive m_B. Systemet startar i vila i det avbildade läget. Bestäm hastigheterna för A och B relativt det horisontella underlaget när A har kommit till den kvartscirkelformade banans lägsta punkt. (Friktionen mellan A och B samt mellan B och underlaget försummas.)

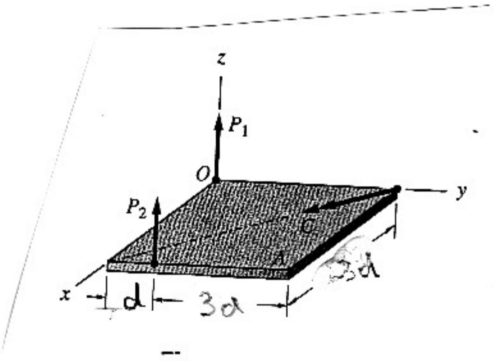
Överkursuppgifter

5. Om en balk belastas enligt den övre figuren så brister den för en viss last $P_1^{\max}$ eftersom böjmomentet blir för stort i någon punkt. Hur stor kan lasten P_2 högst vara innan balken brister av samma anledning då den belastas enligt den nedre figuren?

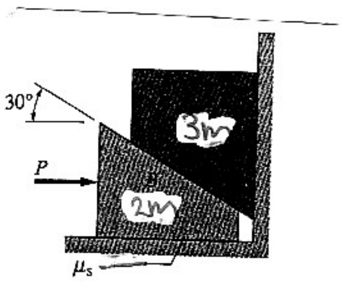
6. Kedjan har massan ρ per längdenhet och lyfts med den konstanta hastigheten v genom att trumman roterar. Bestäm spänningen i punkten A.

Lycka till!

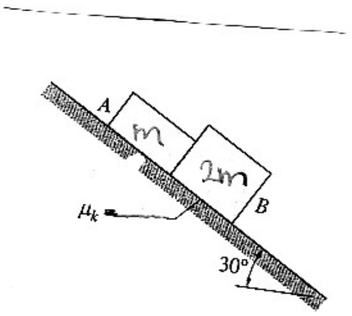
1.


z
P_1
O
y
P_2
A
x
d
3d
3d

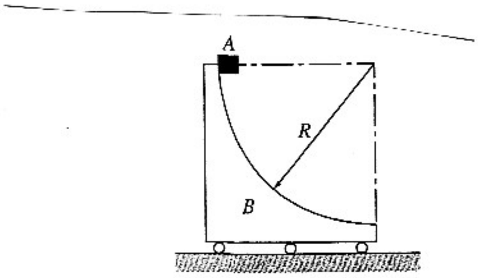
2.


30°
P
3m
2m
μ_s

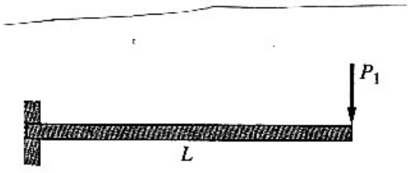
3.

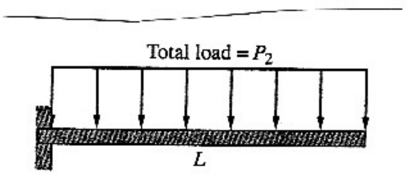

A
m
2m
B
μ_k
30°

4.

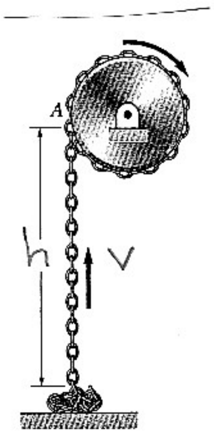

A
R
B

5.


P_1
L


Total load = P_2
L

6.


A
h
V

1) Det avbildade kraftsystemet har kraftsumman

$$\mathbf{R} = P_1\hat{\mathbf{k}} + P_2\hat{\mathbf{k}} = (P_1 + P_2)\hat{\mathbf{k}}$$ och vridmomentet m a p O

$$\mathbf{M}_O = (3d\hat{\mathbf{i}} + d\hat{\mathbf{j}}) \times P_2\hat{\mathbf{k}} + \left(\tfrac{3}{5}C\hat{\mathbf{i}} - \tfrac{4}{5}C\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$= \left(dP_2 + \tfrac{3}{5}C\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(3dP_2 + \tfrac{4}{5}C\right)\hat{\mathbf{j}}$$

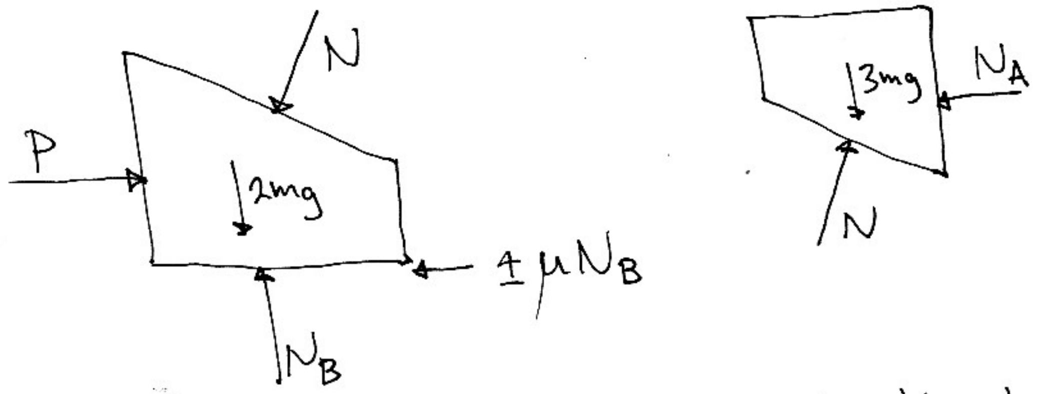
En vertikal kraft med storleken F som angriper i A har kraftsumman och vridmomentet m a p O

$$\mathbf{R}' = F\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{M}_O' = (3d\hat{\mathbf{i}} + 4d\hat{\mathbf{j}}) \times F\hat{\mathbf{k}} = 4dF\hat{\mathbf{i}} - 3dF\hat{\mathbf{j}}$$

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{R}' \\ \mathbf{M}_O = \mathbf{M}_O' \end{cases} \iff \begin{cases} P_1 + P_2 = F \\ dP_2 + \frac{3}{5}C = 4dF \\ -3dP_2 - \frac{4}{5}C = -3dF \end{cases} \iff \begin{cases} C = 9dF \\ P_1 = \frac{12}{5}F \\ P_2 = -\frac{7}{5}F \end{cases}$$

2) Frilägg A och B separat då glidning precis sker:



Det övre (undre) tecknet på friktionskraften skall användas vid glidning åt höger (vänster).

Jämviktsekvationerna lyder

$$
\begin{array}{lll}
A & \uparrow & N\cos 30^\circ - 3mg = 0 \\
 & \rightarrow & N\sin 30^\circ - N_A = 0 \quad \text{(behövs ej)} \\
B & \uparrow & N_B - N\cos 30^\circ - 2mg = 0 \\
 & \rightarrow & P - N\sin 30^\circ \mp \mu N_B = 0
\end{array}
$$

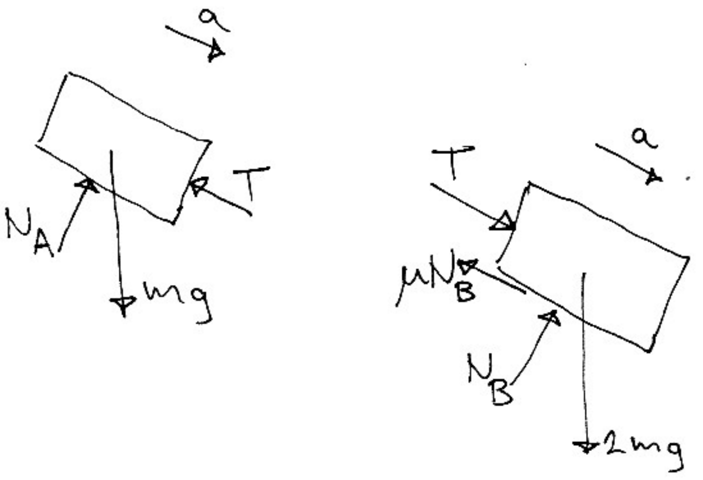
Varur fås att

$$P = (\sqrt{3} \pm 5\mu)mg$$

Jämvikt råder alltså då

$$(\sqrt{3} - 5\mu)mg < P < (\sqrt{3} + 5\mu)mg$$

3) Frilägg klossarna separat:



Newtons andra lag lyder

$$
\begin{array}{ll}
A \nearrow & \left\{\begin{array}{l} N_A - mg\cos 30^\circ = 0 \\ mg\sin 30^\circ - T = ma \end{array}\right. \\
\searrow & \\
B \nearrow & \left\{\begin{array}{l} N_B - 2mg\cos 30^\circ = 0 \\ 2mg\sin 30^\circ + T - \mu N_B = 2ma \end{array}\right. \\
\searrow &
\end{array}
$$

varur fås att

$$
\begin{cases}
N_A = \frac{\sqrt{3}}{2} mg \\
N_B = \sqrt{3}\, mg \\
T = \frac{\mu}{\sqrt{3}} mg \\
a = \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sqrt{3}}\right) g
\end{cases}
$$

Svar: accelerationen är $\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sqrt{3}}\right) g$
och normalkraften är $\frac{\mu}{\sqrt{3}} mg$

4) Beteckna de sökta hastigheterna med V_A och V_B. (positiva åt höger)

Bevarande av energi och rörelsemängd ger att

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_A V_A^2 + \frac{1}{2} m_B V_B^2 = m_A g R \\ m_A V_A + m_B V_B = 0 \end{cases}$$

varur fås att

$$\begin{cases} V_A = \sqrt{\dfrac{2gR}{1+m_A/m_B}} \\ V_B = -\sqrt{\dfrac{m_A\, 2gR}{m_B(1+m_B/m_A)}} \end{cases}$$

5) Böjmomentet på avståndet x från den högra ändpunkten är

$M_1 = xP_1$ respektive $M_2 = x\frac{1}{2}P_2$

i de två fallen.

Dessa är lika (för alla x) om $P_2 = 2P_1$.

6) Beteckna spänningen i punkten A med T.

Spänningen i punkten där kedjan lämnar bordet är då

$$T' = T - \rho g h$$

Under tidsintervallet Δt lyfts en bit av kedjan med massan $\Delta m = \rho v \Delta t$ och ändrar därvid sin rörelsemängd från 0 till $\Delta p = \rho v \Delta t\, v$

Det gäller att $\Delta p = T' \Delta t$

Varur fås att

$$T = \rho(gh + v^2).$$