Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: Måndagen den 6 mars 2006 klockan 08.30-12.30 i V.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Examinator: Måns Henningson, 0737-296826.

Poängberäkning: Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

Betygsgränser: För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-4.
För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-6 så att 6-11 poäng ger betyg 3, 12-14 poäng ger betyg 4 och 15-18 poäng ger betyg 5.

Grundläggande uppgifter

1. Den L-formade homogena balken med längden $7d$ hålls i jämvikt med tre vertikala kablar, som är fästa i punkterna A, B och 0. Bestäm avstånden a och b så att krafterna i de tre kablarna blir lika stora.

2. Den homogena stången med längden $\frac{9}{2}r$ och den homogena cylindern med radien r har vardera massan m. Vad är det minsta värdet på den statiska friktionskoefficienten μ_s i punkterna A, B och C, för vilket jämvikt kan råda?
   Ledning: Bestäm först $\sin\theta$ och $\cos\theta$, där θ är vinkeln mellan stången och underlaget.

3. Pinnen P glider i spår både i armen OA, som roterar med vinkelhastigheten $\dot{\theta} = \omega$, och i den fasta cirkelbågen BC. Uttryck P's fart v (d v s hastighetens storlek) då $\theta = 60^o$.
   Observera: Figuren är inte skalenlig!

4. Hylsan C ges en viss acceleration a_C. Bestäm accelerationerna a_A och a_B för kropparna A och B, som har massorna m_A respektive m_B. Övriga massor samt friktionen försummas.

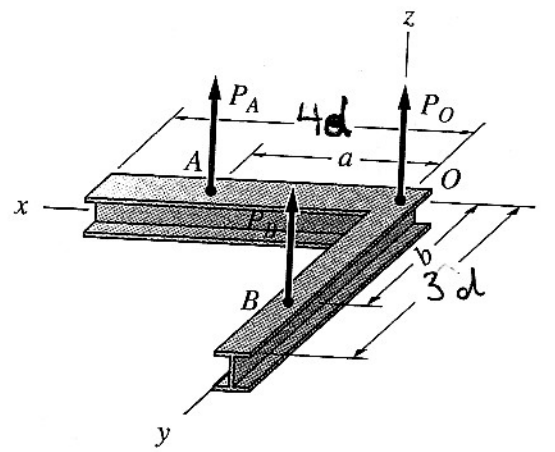
Överkursuppgifter

5. Bestäm förhållandet L/R så att den homogena ståltråden böjd enligt figuren kan vara i jämvikt.
   Ledning: Beräkna tyngdkraftfördelningens vridmoment med avseende på den punkt där ståltråden vidrör bordet.

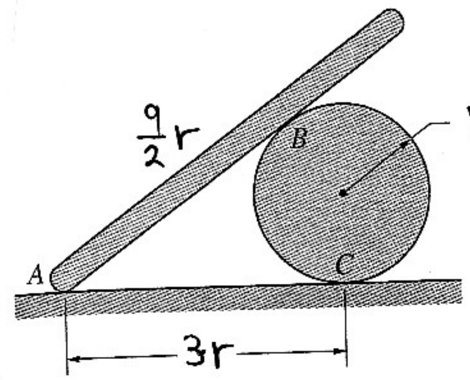
6. Konstruktionen kan fritt vrida sig kring z-axeln, och har ursprungligen vinkelhastigheten $\dot{\theta} = \omega_0$ då vinkeln $\alpha = 60^o$. Genom att anpassa den pålagda vertikala kraften F kan man ändra vinkeln α. Bestäm vinkelhastigheten $\dot{\theta}$ då vinkeln $\alpha = 30^o$. De båda kulorna har lika stora massor. Övriga massor samt friktionen försummas.
   Ledning: Använd att en viss storhet är bevarad under förloppet.

Lycka till!

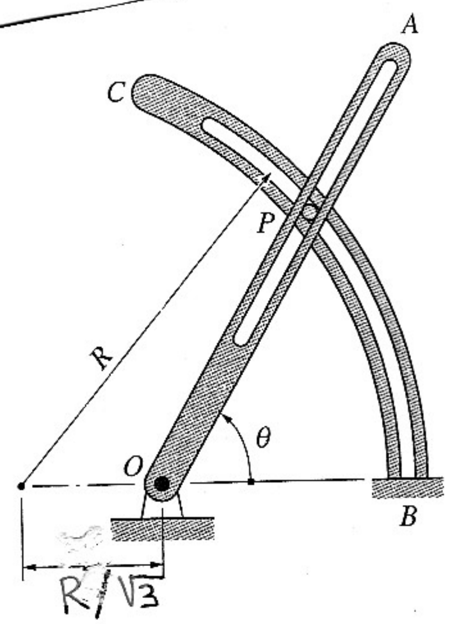
1.


z
P_A
4d
P_O
A
a
O
x
P_B
b
3d
B
y

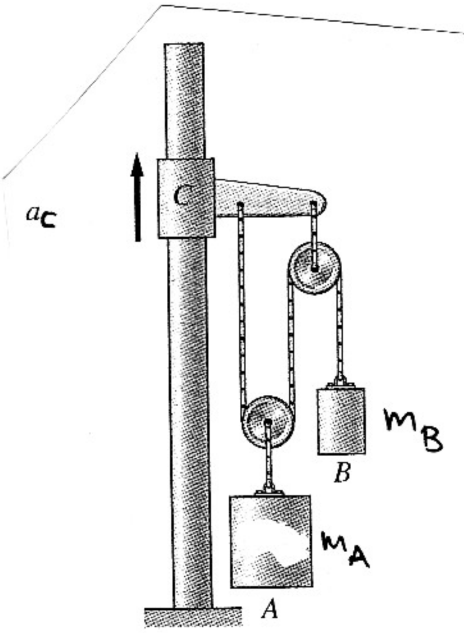
2.


$\frac{9}{2}r$
B
r
A
C
3r

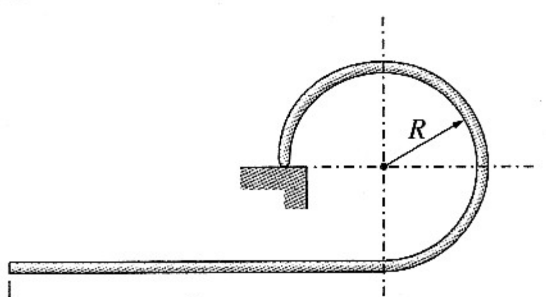
3.


A
C
P
R
θ
O
B
R/√3

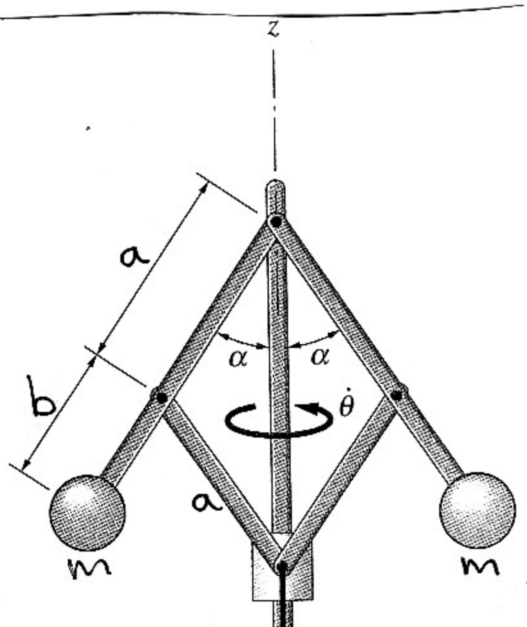
4.


a_C
C
m_B
B
m_A
A

5.


R
L

6.


z
a
α
α
b
$\dot{\theta}$
a
m
m

1. Balken angrips av tyngdkrafter $-4W\hat{k}$ och $-3W\hat{k}$ i punkter med ortsvektorer $2d\hat{i}$ respektive $\frac{3d}{2}\hat{j}$, samt av tre krafter $F\hat{k}$ som angriper i punkter med ortsvektorer 0, $a\hat{i}$ och $b\hat{j}$.

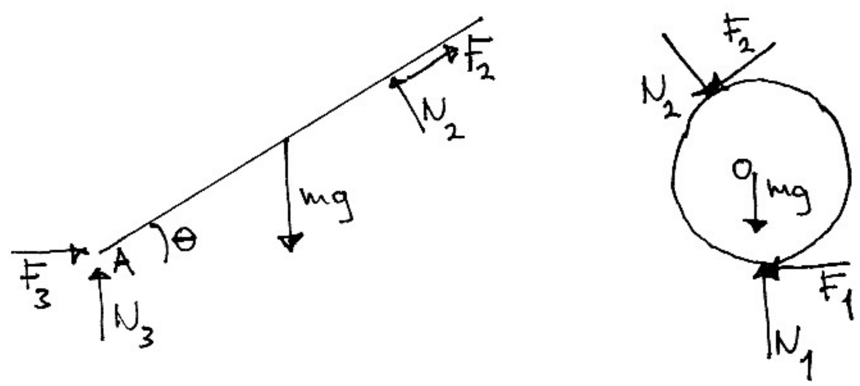
Kraftjämvikt ger att $(3F-7W)\hat{k}=0$

och momentjämvikt kring O ger att

$$0 = 2d\hat{i}\times(-4W\hat{k}) + \frac{3d}{2}\hat{j}\times(-3W\hat{k})$$
$$+ 0\times F\hat{k} + a\hat{i}\times F\hat{k} + b\hat{j}\times F\hat{k}$$
$$= \left(-\frac{9dW}{2} + bF\right)\hat{i} + (8dW - aF)\hat{j}$$

Härur fås att $\begin{cases} a = \frac{24}{7}d \\ b = \frac{27}{14}d \end{cases}$

2. Frilägg stången och cylindern separat



Vinkeln mellan stången och underlaget är

$\theta = 2\arctan\frac{1}{3}$ så att $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$

Jämviktsekvationer för stången:

$$\begin{aligned}
\uparrow: &\quad N_3 - mg + \tfrac{4}{5}N_2 + \tfrac{3}{5}F_2 = 0 \\
\rightarrow: &\quad F_3 - \tfrac{3}{5}N_2 + \tfrac{4}{5}F_2 = 0 \\
\overset{\curvearrowleft}{A}: &\quad -mg\,\tfrac{9r}{4}\,\tfrac{4}{5} + N_2\,3r = 0
\end{aligned}$$

och för cylindern:

$$\begin{aligned}
\uparrow: &\quad N_1 - mg - \tfrac{4}{5}N_2 - \tfrac{3}{5}F_2 = 0 \\
\rightarrow: &\quad \tfrac{3}{5}N_2 - \tfrac{4}{5}F_2 - F_1 = 0 \\
\overset{\curvearrowleft}{O}: &\quad rF_2 - rF_1 = 0
\end{aligned}$$

Varur fås att $F_1 = F_2 = F_3 = \frac{1}{5}mg$, $N_1 = \frac{8}{5}mg$, $N_2 = \frac{3}{5}mg$, $N_3 = \frac{2}{5}mg$

så att $\frac{F_1}{N_1} < \frac{F_2}{N_2} < \frac{F_3}{N_3} = \frac{1}{2}$

Svar: $\mu = \frac{1}{2}$

3. Beteckna avståndet från O till P med r.

Cosinussatsen ger att

$$R^2 = \left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2 + r^2 + 2\frac{R}{\sqrt{3}} r \cos\theta$$

Deriveras denna ekvation m a p tiden får man

$$0 = 2r\dot{r} + \frac{2R}{\sqrt{3}}\dot{r}\cos\theta - \frac{2R}{\sqrt{3}} r \sin\theta\,\dot{\theta}$$

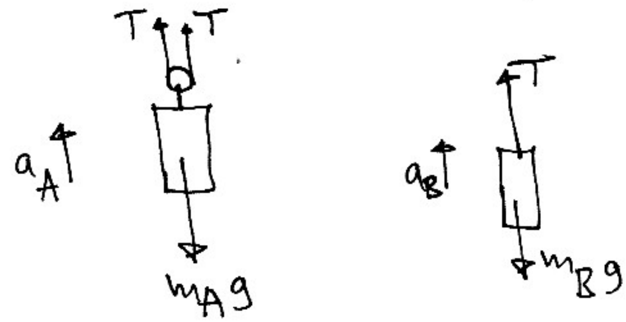
Insättning av $\theta = 60^\circ$ ger att $r = \frac{R}{\sqrt{3}}$

och att $\dot{r} = \frac{R\dot{\theta}}{3}$

Den sökta farten är

$$v = \left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right)^{1/2} = \frac{2}{3} R\dot{\theta}$$

4. Frilägg A inklusive den nedre trissan samt B:



Newtons andra lag ger nu

$$2T - m_A g = m_A a_A$$

$$T - m_B g = m_B a_B$$

Dessutom har vi att

$$2a_A + a_B = 3a_c$$

på grund av att linan har en konstant längd.

Dessa ekvationer har lösningen

$$\begin{cases} a_A = \dfrac{6m_B a_c + (2m_B - m_A)g}{m_A + 4m_B} \\ a_B = \dfrac{3m_A a_c - 2(2m_B - m_A)g}{m_A + 4m_B} \\ T = \ldots \end{cases}$$

5. Låt ρ beteckna massan/längdenhet.

Tyngdkraften på den raka delen utövar då vridmomentet m a p trådens stödpunkt O

$$M_O^{rak} = \left(\frac{L}{2} - R\right) L \rho g$$

medan tyngdkraften på den böjda delen ger

$$M_O^{böjd} = -\int_{-\pi/2}^{\pi} R(1+\cos\theta)\,\rho g\,R\,d\theta = -\rho g R^2\left(\frac{3\pi}{2} + 1\right)$$

Momentjämvikt ger att

$$0 = M_O^{rak} + M_O^{böjd} = \frac{R^2 \rho g}{2}\left(\left(\frac{L}{R}\right)^2 - 2\frac{L}{R} - 3\pi - 2\right)$$

varur fås att

$$\frac{L}{R} = 1 + \sqrt{3\pi + 3}$$

6. Rörelsemängdsmomentets komponent i z-axelns riktning är

$$H_z = 2\left((a+b)\sin\alpha\right)^2 m\dot{\theta}$$

Detta är bevarat under förloppet, eftersom de krafter som påverkar konstruktionen inte utövar något vridmoment m a p z-axeln.

Härur fås alltså att

$$2\left((a+b)\sin\alpha_1\right)^2 m\omega_1 = 2\left((a+b)\sin\alpha_0\right)^2 m\omega_0$$

så att

$$\omega_1 = \frac{\sin^2\alpha_0}{\sin^2\alpha_1}\omega_0 = 3\omega_0$$