Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: Lördagen den 7 januari 2006 klockan 14.00-18.00 i V.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Examinator: Måns Henningson, 0737-296826.

Poängberäkning: Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

Betygsgränser: För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-4.
För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-6 så att 6-11 poäng ger betyg 3, 12-14 poäng ger betyg 4 och 15-18 poäng ger betyg 5.

Grundläggande uppgifter

1. Den vertikala stången är fäst i punkten O så att den fritt kan vrida sig kring x- och y-axlarna men inte kring z-axeln. Bestäm spänningen i linorna FG och AE om spänningen T i linan CD och avståndet a är givna.

2. Mannen med massan $M = 80$ kg håller tunnan med massan $m = 34$ kg i jämvikt enligt figuren. Bestäm det maximala värdet på avståndet x för att han inte skall glida mot underlaget, om den statiska friktionskoefficienten är $\mu_s = 0.40$.

3. Mannen har massan M och vagnen har massan m. Mannen drar i repet med kraften F. Bestäm vagnens acceleration. Övriga massor samt friktionen försummas.

4. Klossen har massan m och påverkas av en kraft P som varierar linjärt från $P = 0$ vid tiden $t = 0$ till ett givet maximalt värde $P = P_{\max}$ vid tiden $t = t_{\max}$. Den statiska och kinetiska friktionskoefficienten mellan klossen och underlaget är μ_s respektive μ_k. Bestäm klossens hastighet vid tiden $t = t_{\max}$ om den startar i vila vid tiden $t = 0$.

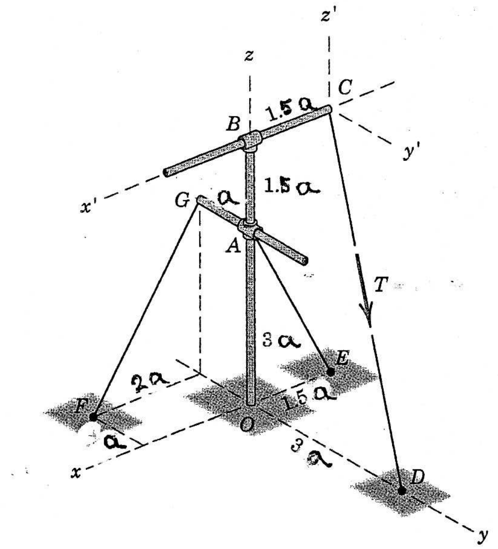
Överkursuppgifter

5. De halvsfäriska skalen har inner och ytterradierna r respektive R. Bestäm den kraft F som behövs för att dra isär dem om lufttrycket p_{inre} inne i klotet är mindre än det yttre lufttrycket p_{yttre}.

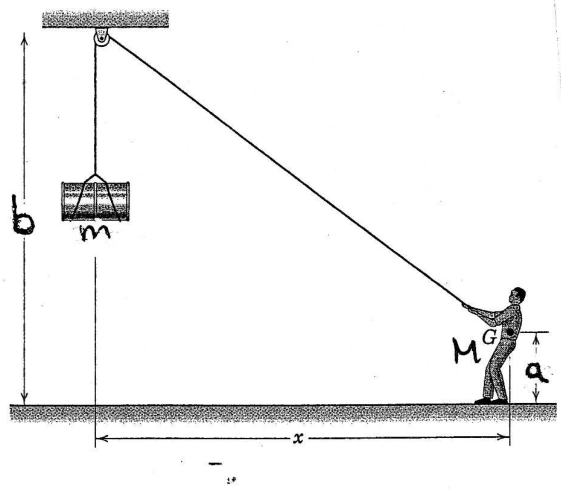
6. Bestäm accelerationen för tyngdpunkten för systemet som består av fyra tyngder vardera med massan m då det påverkas av krafter enligt figuren. Övriga massor samt friktionen försummas.

Lycka till!

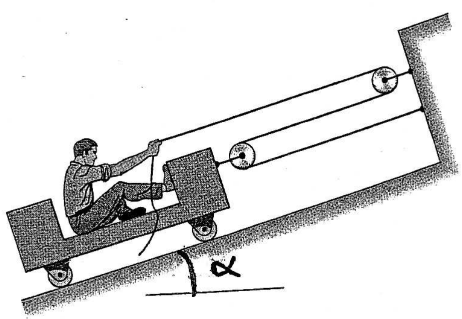
1.


z'
z
C
B
1.5 a
y'
x'
G
a
1.5 a
A
T
3 a
E
2 a
F
O
1.5 a
a
3
a
D
x
y

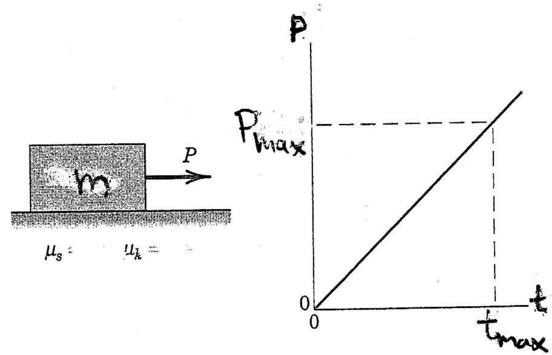
2.


b
m
M
G
a
x

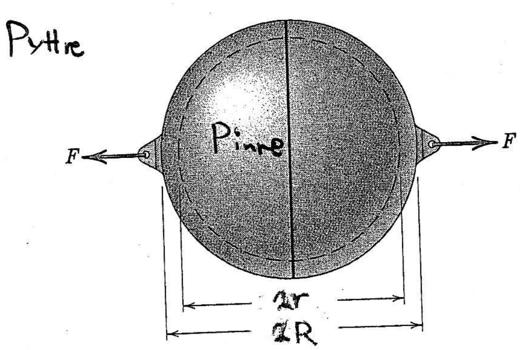
3.


α

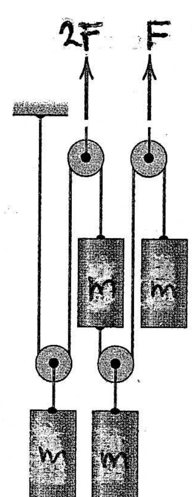
4.


m
P
μ_s
u_k
P
P_{max}
0
0
t
t_{max}

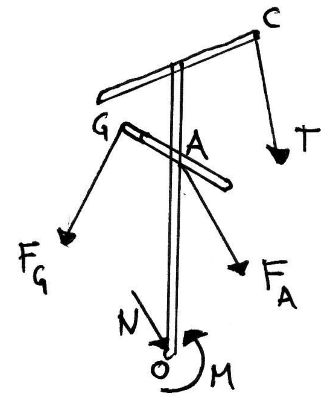
5.


Pytre
Pinre
F
F
2r
2R

6.


2F
F
m
m
m
m

1. Frilägg stången:



Punkterna A, C och G har ortsvektorerna

$$\begin{cases} \mathbb{r}_A = (0,0,3)a \\ \mathbb{r}_C = (-\tfrac{3}{2}, 0, \tfrac{9}{2})a \\ \mathbb{r}_G = (0,-1,3)a \end{cases}$$

m a p origo O. I dessa punkter angriper krafterna

$$\begin{cases} \mathbb{F}_A = \frac{2}{\sqrt{45}}(-\tfrac{3}{2}, 0, -3)F_A \\ \mathbb{F}_G = \frac{1}{\sqrt{13}}(2, 0, -3)F_G \\ \mathbb{T} = \frac{2}{\sqrt{126}}(\tfrac{3}{2}, 3, -\tfrac{9}{2})T \end{cases}$$

Vid jämvikt gäller att

$$0 = \mathbb{M}_0 = \mathbb{r}_A \times \mathbb{F}_A + \mathbb{r}_C \times \mathbb{T} + \mathbb{r}_G \times \mathbb{F}_G + (0,0,1)M$$

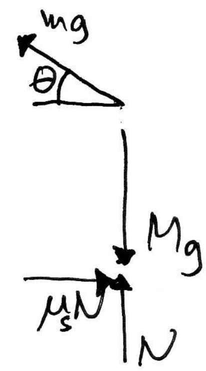
$$= \left(\frac{3a}{\sqrt{13}}F_G - \frac{27a}{\sqrt{126}}T, \frac{6a}{\sqrt{13}}F_G - \frac{3a}{\sqrt{5}}F_A, \dots\right)$$

Varur fås att

$$\begin{cases} F_A = 3\sqrt{\frac{10}{7}}\,T \\ F_G = 3\sqrt{\frac{13}{14}}\,T\,. \end{cases}$$

2. Frilägg mannen och ställ upp jämviktsekvationer då glidning precis sker:

$$
\begin{cases} \rightarrow & \mu_s N - mg\cos\theta = 0 \\ \uparrow & N - Mg + mg\sin\theta = 0 \end{cases}
$$



Härur fås att

$$\frac{1}{\mu_s}\cos\theta + \sin\theta = \frac{M}{m}$$

villket kan skrivas som en andragradsekvation i variabeln $t = \tan\theta$:

$$t^2\left(1 - \left(\frac{M}{m}\right)^2\right) + \frac{2}{\mu}t = \left(\frac{M}{m}\right)^2 - \frac{1}{\mu^2}$$

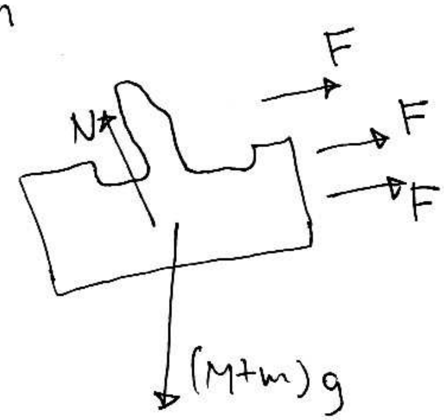
Med de givna värdena på m, M och μ har denna lösningarna

$t = 1{,}23$ $\quad$ $(t = -0.13)$

Det sökta avståndet är

$$x = \frac{b-a}{t}$$

3. Frilägg mannen och vagnen



Newtons andra lag längs med planet ger nu att

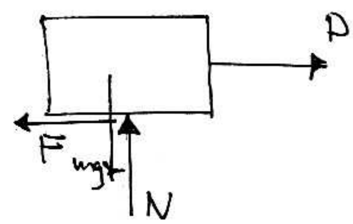
$$3F - (M+m)g\sin\alpha = (M+m)a$$

så att accelerationen blir

$$a = \frac{3F}{M+m} - g\sin\alpha$$

---

4. Frilägg klossen:



Klossen är i vila med

$$F = P = \frac{P_{max}}{t_{max}} t$$

ända tills tiden $t_0 = \frac{\mu_s mg}{P_{max}} t_{max}$

då den börjar glida.

(Om $\mu_s mg$ är större än P_{max} börjar den aldrig glida.)

Därefter är $F = \mu_k mg$ och accelerationen blir

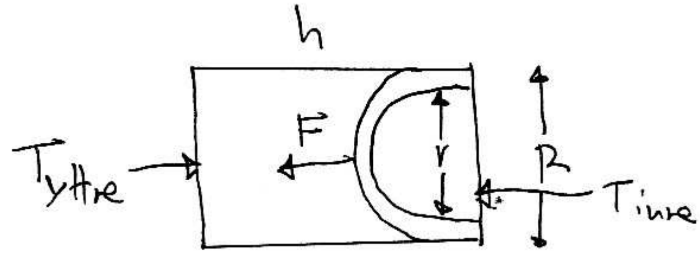
$$a = \frac{1}{m}(P - F) = \frac{1}{m} \frac{P_{max}}{t_{max}} t - \mu_k g$$

Den sökta hastigheten blir

$$V = \int_{t_0}^{t_{max}} a\, dt = \frac{1}{2m} \frac{P_{max}}{t_{max}} \left(t_{max}^2 - t_0^2\right) - \mu_k g (t_{max} - t_0)$$

$$= \frac{1}{2m} P_{max} t_{max} \left(1 - \left(\frac{\mu_s mg}{P_{max}}\right)^2\right) - \mu_k g t_{max} \left(1 - \frac{\mu_s mg}{P_{max}}\right)$$

5. Frilägg en cylinder med radie R och höjd $h > R$ där det ena halvklotet får plats:



Precis då halvkloten släpper från varandra har vi

$$F = T_{yttre} - T_{inre} = \pi R^2 p_{yttre} - \pi r_2 p_{inre}$$

---

6. Kraften i linan som sitter fast i taket är F.

Systemet påverkas alltså av den totala kraften

$4F - 4mg$

och har massan $4m$.

Tyngdpunktens acceleration blir då

$$a = \frac{4F - 4mg}{4m} = \frac{F}{m} - g$$