Tentamen i FFM515 Mekanik 1

Tid och plats: Torsdagen den 17 mars 2005 på eftermiddagen i V.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Examinator: Måns Henningson, 0737-296826.

Poängberäkning: Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:
För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
Allvarliga principiella fel eller en ofullständig lösning ger 0 poäng på uppgiften.

Betygsgränser: För att bli godkänd krävs minst 6 poäng totalt på uppgifterna 1-4.
För de som är godkända bestäms betyget av den totala poängen på uppgifterna 1-6 så att 6-11 poäng ger betyg 3, 12-14 poäng ger betyg 4 och 15-18 poäng ger betyg 5.

Grundläggande uppgifter

1. Den homogena horisontella plattan har massan m. Bestäm spännkraften i linorna AD, BD och CD.

2. Klossens massa M, vinklarna α och β samt den statiska friktionskoefficienten μ_s mellan klossen och det lutande planet är givna. (Övrig friktion försummas.) Bestäm det intervall för vagnens massa m i vilket jämvikt kan råda.

3. Ramen rör sig med den konstanta accelerationen a åt höger. Hylsan A glider friktionsfritt på stången, som bildar vinkeln θ med horisontalplanet. Hylsans position kan beskrivas med hjälp av avståndet s. Bestäm $\ddot{s}$, det vill säga hylsans acceleration relativt stången.

4. De båda bilarna har massorna m_A och m_B och rör sig med farterna v_A och v_B i vinkeln α mot varandra när de kolliderar i punkten P och fastnar i varandra. Bestäm deras gemensamma fart v och vinkeln θ omedelbart efter kollisionen.

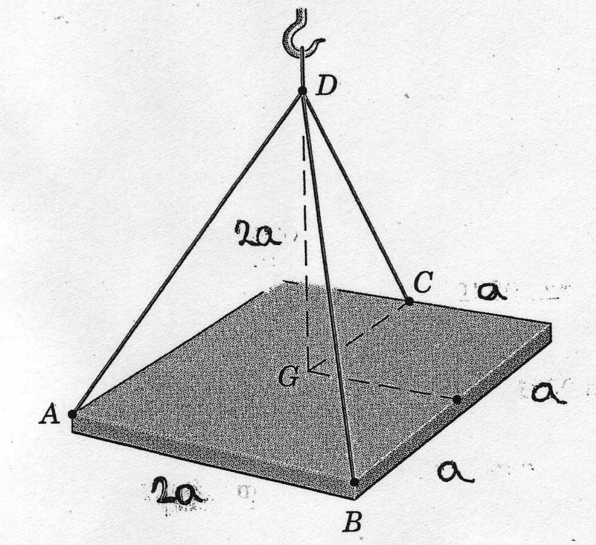
Överkursuppgifter

5. Bestäm skjuvkraften V och böjmomentet M i balken som funktioner av avståndet x från infästningspunkten A. (Tyngdkraften på balken är inkluderad i lasten w.)

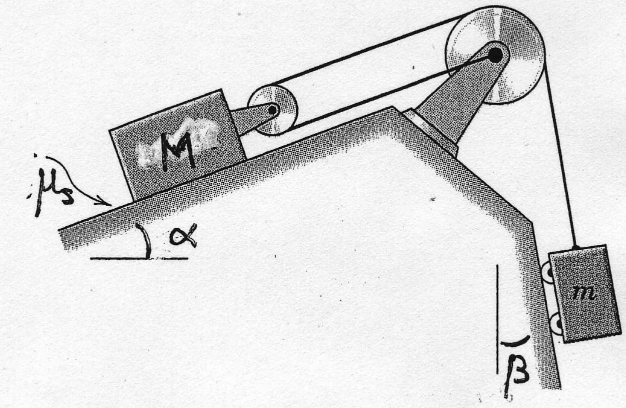
6. Stången med de två kloten roterar med vinkelhastigheten ω samtidigt som dess mittpunkt G rör sig med farten v i positiva x-axelns riktning. Bestäm systemets rörelsemängdsmoment $\mathbf{H}_0$ med avseende på O då G har koordinaterna x och y. (Stångens massa och klotens radie försummas.)

Lycka till!

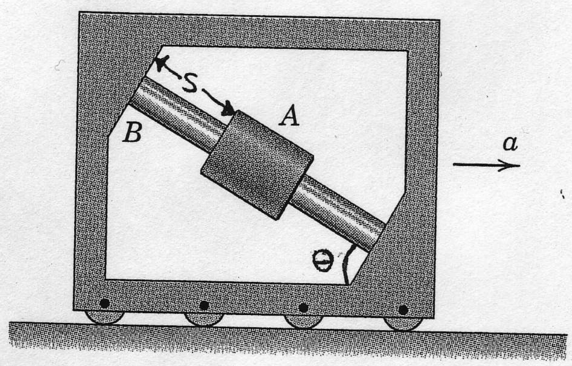
1.


D
2a
C
a
G
a
A
2a
a
B

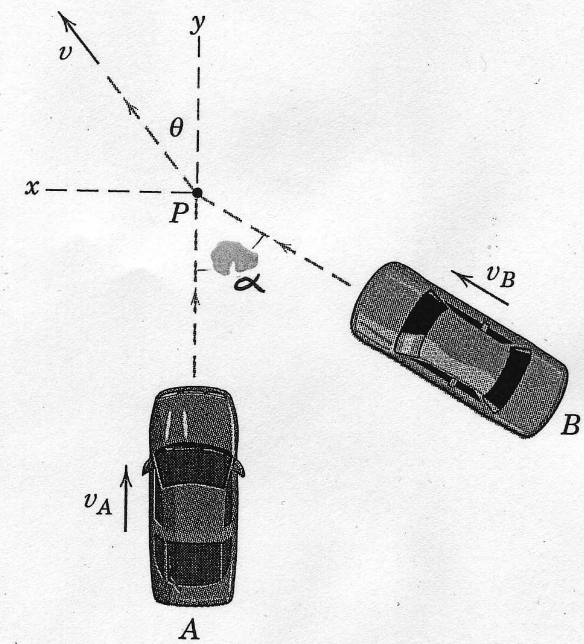
2.


M
μ_s
α
m
β

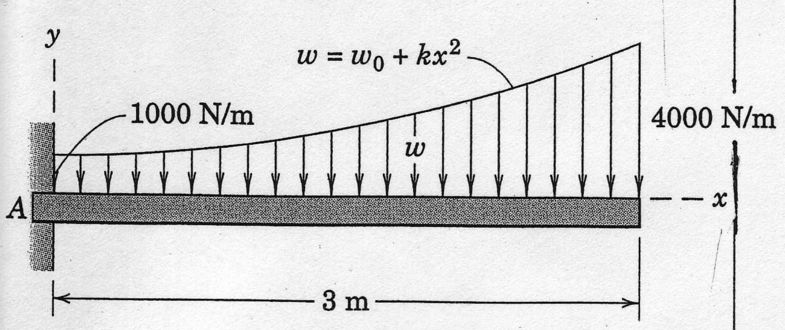
3.


s
A
B
a
θ

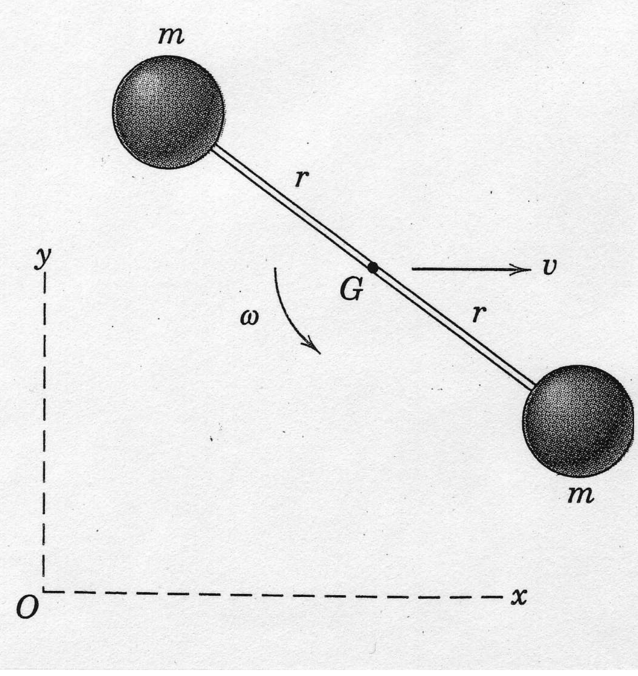
4.


v
y
θ
x
P
α
v_B
B
v_A
A

5.

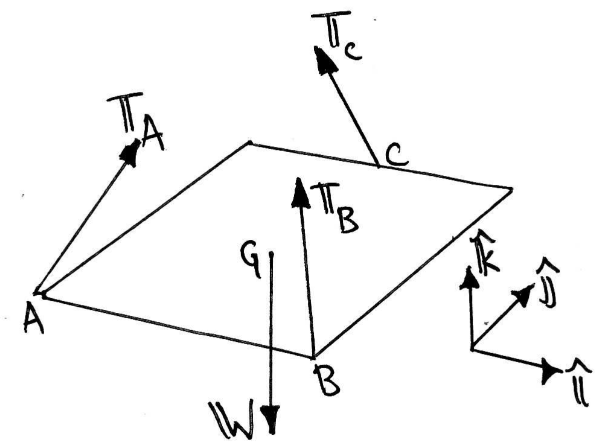

y
$w = w_0 + kx^2$
1000 N/m
4000 N/m
w
A
x
3 m

6.


m
r
y
v
G
ω
r
m
O
x

1. Plattan angrips av krafterna

$$\begin{cases} \mathbf{T}_A = T_A \frac{1}{\sqrt{6}} (\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}) \\ \mathbf{T}_B = T_B \frac{1}{\sqrt{6}} (-\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}) \\ \mathbf{T}_C = T_C \frac{1}{\sqrt{5}} (-\hat{\jmath} + 2\hat{k}) \\ \mathbf{W} = -mg\hat{k} \end{cases}$$



i punkterna A, B, C och G vars ortsvektorer m a p G är

$$\begin{cases} \mathbf{r}_A = a(-\hat{\imath} - \hat{\jmath}) \\ \mathbf{r}_B = a(\hat{\imath} - \hat{\jmath}) \\ \mathbf{r}_C = a\hat{\jmath} \\ \mathbf{r}_G = 0 \end{cases}$$

Kraftjämvikt ger att

$$0 = \mathbf{T}_A + \mathbf{T}_B + \mathbf{T}_C + \mathbf{W}$$

$$= \hat{\imath}\left(\frac{1}{\sqrt{6}} T_A - \frac{1}{\sqrt{6}} T_B\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{1}{\sqrt{6}} T_A + \frac{1}{\sqrt{6}} T_B - \frac{1}{\sqrt{5}} T_C\right) + \hat{k}\left(\sqrt{\frac{2}{3}} T_A + \sqrt{\frac{2}{3}} T_B + \frac{2}{\sqrt{5}} T_C - mg\right)$$

och momentjämvikt kring G ger att

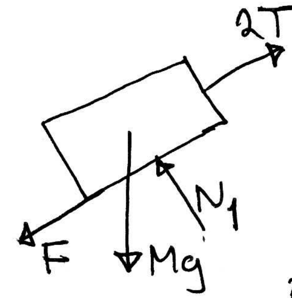
$$0 = \mathbf{r}_A \times \mathbf{T}_A + \mathbf{r}_B \times \mathbf{T}_B + \mathbf{r}_C \times \mathbf{T}_C + \mathbf{r}_G \times \mathbf{W}$$

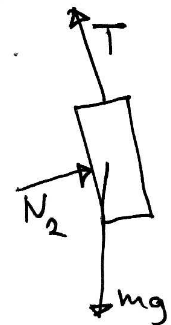
$$= \hat{\imath}\, a\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} T_A - \sqrt{\frac{2}{3}} T_B + \frac{2}{\sqrt{5}} T_C\right) + \hat{\jmath}\, a\left(\sqrt{\frac{2}{3}} T_A - \sqrt{\frac{2}{3}} T_B\right)$$

Varur fås att

$$T_A = T_B = mg\sqrt{\frac{3}{32}} \quad \text{och} \quad T_C = mg\sqrt{\frac{5}{16}}$$

2. Jämviktsekvationerna lyder





$$
\begin{cases}
2T - F - Mg\sin\alpha = 0 \\
N_1 - Mg\cos\alpha = 0 \\
T - mg\cos\beta = 0 \\
N_2 - mg\sin\beta = 0
\end{cases}
$$

varur fås att
$$
\begin{cases}
F = 2mg\cos\beta - Mg\sin\alpha \\
N_1 = Mg\cos\alpha
\end{cases}
$$

I gränsfallet med glidning uppåt (neråt) är

$F = \mu_s N_1$ $\quad (F = -\mu_s N_1)$ så att

$$
\mu_s = \frac{2mg\cos\beta - Mg\sin\alpha}{Mg\cos\alpha} \qquad \left(\mu_s = -\frac{2mg\cos\beta - Mg\sin\alpha}{Mg\cos\alpha}\right)
$$

varur fås att

$$
m = M\,\frac{\mu_s\cos\alpha + \sin\alpha}{2\cos\beta} \qquad \left(m = M\,\frac{-\mu_s\cos\alpha + \sin\alpha}{2\cos\beta}\right)
$$

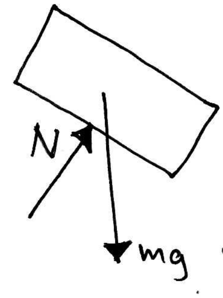
Förutsatt att $\mu_s \leq \tan\alpha$ råder alltså jämvikt då

$$
M\,\frac{-\mu_s\cos\alpha + \sin\alpha}{2\cos\beta} \leq m \leq M\,\frac{\mu_s\cos\alpha + \sin\alpha}{2\cos\beta}
$$

Om $\mu_s > \tan\alpha$ får vi istället intervallet

$$
0 \leq m \leq M\,\frac{\mu_s\cos\alpha + \sin\alpha}{2\cos\beta}
$$

3. Newtons andra lag för hylsan ger



$$\searrow \quad mg \sin\theta = m(a\cos\theta + \ddot{s})$$

varur fås att

$$\ddot{s} = g\sin\theta - a\cos\theta$$

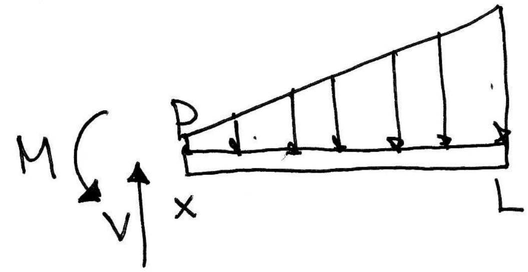
4. Rörelsemängdens bevarande ger

$$\begin{cases} \uparrow \quad m_A v_A + m_B v_B \cos\alpha = (m_A + m_B) v \cos\theta \\ \leftarrow \quad m_B v_B \sin\alpha = (m_A + m_B) v \sin\theta \end{cases}$$

Varur fås att

$$\begin{cases} \theta = \arctan \dfrac{m_B v_B \sin\alpha}{m_A v_A + m_B v_B \cos\alpha} \\ v = \dfrac{1}{m_A + m_B} \sqrt{(m_A v_A + m_B v_B \cos\alpha)^2 + (m_B v_B \sin\alpha)^2} \end{cases}$$

5. Gör ett snitt i punkten P på avståndet x från den vänstra ändpunkten och frilägg den högra delen av balken:



Kraftjämvikt ger nu skjuvkraften

$$V = \int_x^L (w_0 + ks^2)\,ds = w_0(L-x) + \frac{k}{3}(L^3 - x^3)$$

och momentjämvikt kring P ger böjmomentet

$$M = \int_x^L (w_0 + ks^2)(s-x)\,ds$$

$$= \frac{w_0}{2}(L^2 - x^2) - w_0 x (L-x) + \frac{k}{4}(L^4 - x^4) - \frac{kx}{3}(L^3 - x^3)$$

6. $$\mathbf{H}_O = \mathbf{r}_1 \times m\dot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \times m\dot{\mathbf{r}}_2$$

$$= (\mathbf{r}_G + \boldsymbol{\rho}) \times m(\dot{\mathbf{r}}_G + \dot{\boldsymbol{\rho}}) + (\mathbf{r}_G - \boldsymbol{\rho}) \times m(\dot{\mathbf{r}}_G - \dot{\boldsymbol{\rho}})$$

$$= 2m(\mathbf{r}_G \times \dot{\mathbf{r}}_G + \boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\rho}})$$

$$= 2m\hat{\mathbf{k}}(-yv + \omega r^2)$$