Tentamen i Mekanik för F del A

Kurskod: FFM053.
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Lördagen den 8 januari 2005 kl 08.30-12.30 i V.
Jourhavande assistent: Måns Henningson, 0737-296826.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 24 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. a) En metallbit är infrusen i en isbit som flyter i ett glas med vatten. Isbiten börjar smälta, så småningom lossnar metallbiten och sjunker till botten, och därefter smälter isbiten fullständigt. Beskriv hur vattenytans läge relativt glaset ändras under de olika faserna av detta förlopp.

   b) Ett nöjesfält planerar en ny attraktion, som skall bestå av en bana på vilken en vagn kan rulla under inflytande av gravitationskraften och normalkraften från banan (friktionen försummas). Den övre startpunkten A och den nedre slutpunkten B är givna. Den *kortaste* banan från A till B är som bekant en rät linje, men ungefär hur ser den *snabbaste* banan ut?

2. Två partiklar med massorna m_1 och m_2 växelverkar med varandra så att det påverkas av de totala krafterna $\mathbf{F}$ respektive $-\mathbf{F}$. Visa att vektorn $\mathbf{r}$ från den ena partikeln till den andra uppfyller en differentialekvation av formen

   $$\mathbf{F} = M\ddot{\mathbf{r}},$$

   samt uttryck konstanten M i de givna massorna m_1 och m_2.

3. Bestäm storlekarna av den kraft och det vridmoment som verkar i punkten O då jämvikt råder.

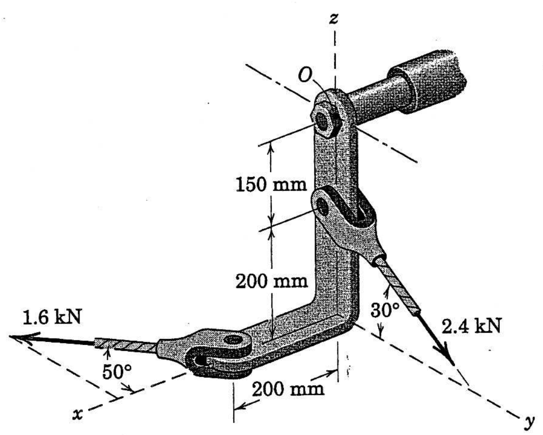
4. Tre identiska homogena cylindrar är lagda på varandra på ett horisontell underlag enligt figuren. Bestäm det minsta värdet på den statiska friktionskoeficienten μ_s (antages vara samma i alla kontaktpunkter) för att jämvikt skall kunna råda.

5. Klossen P startar i vila från punkten A vid tiden $t = 0$ och rör sig sedan med likformig acceleration a uppför det lutande planet. Bestäm tidsderivatan $\dot{r}$ av avståndet r som funktion av tiden t.

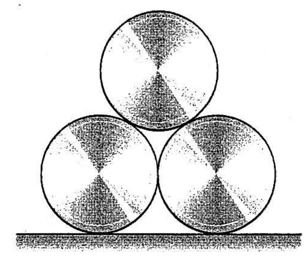
6. Systemet släpps från vila i det avbildade läget. Cylindern som väger 6 kg kan fritt passera genom öppningen, men ringen som ligger ovanpå cylindern är så stor att den blir liggande ovanpå öppningen. Bestäm höjden h som 8 kg cylindern stiger innan den vänder.

God fortsättning!

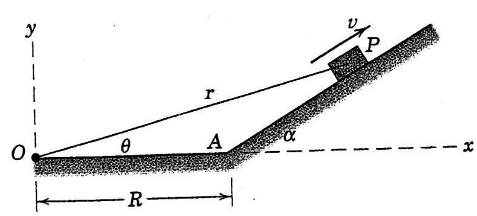
3.


z
O
150 mm
200 mm
1.6 kN
30°
2.4 kN
50°
200 mm
x
y

4.



5.


y
v
P
r
O
θ
A
α
x
R

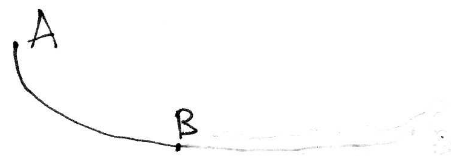
6.


4 kg
400 mm
h
6 kg
8 kg

Lösningar till Mekanik F del A 2005-01-08

1. a) Använd Arkimedes princip:
När isbiten smälter så kompenserar smältvattnets volym precis minskningen av den undanträngda volym som behövs för att upprätthålla jämvikt. Vattenytans läge är alltså oförändrad under dessa faser. Däremot sjunker vattenytans läge då metallbiten lossnar, eftersom metallen tar upp en mindre volym än samma massa vatten gör.

b) Banan ligger i det vertikalplan som bestäms av A och B och ser ut ungefär så här:



2. Beteckna partiklarnas ortsvektorer (m a p en fix punkt O) med $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$.

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{1}{m_1}\mathbf{F} - \frac{1}{m_2}(-\mathbf{F}) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\mathbf{F}$$

d v s $\mathbf{F} = M\ddot{\mathbf{r}}$ där

$$M = 1/\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

3. Låt $F_1 = 1{,}6\,kN$, $F_2 = 2{,}4\,kN$, $a = 200\,mm$, $b = 150\,mm$

De två givna krafterna har summan

$$\mathbb{F} = F_1\left(\hat{\mathbb{i}}\cos 50^\circ - \hat{\mathbb{j}}\sin 50^\circ\right) + F_2\left(\hat{\mathbb{j}}\cos 30^\circ - \hat{\mathbb{k}}\sin 30^\circ\right)$$

$$= \hat{\mathbb{i}}\,F_1\cos 50^\circ + \hat{\mathbb{j}}\left(-F_1\sin 50^\circ + F_2\cos 30^\circ\right) + \hat{\mathbb{k}}\left(-F_2\sin 30^\circ\right)$$

och utövar ett vridmoment $\mathbb{M}_o$ m a p punkten O

$$\mathbb{M}_o = \left(a\hat{\mathbb{i}} - (a+b)\mathbb{k}\right) \times F_1\left(\hat{\mathbb{i}}\cos 50^\circ - \hat{\mathbb{j}}\sin 50^\circ\right)$$

$$+ \left(-b\hat{\mathbb{k}}\right) \times F_2\left(\hat{\mathbb{j}}\cos 30^\circ - \mathbb{k}\sin 30^\circ\right)$$

$$= \hat{\mathbb{i}}\left(-F_1(a+b)\sin 50^\circ + F_2 b\cos 30^\circ\right)$$

$$+ \hat{\mathbb{j}}\left(-F_1(a+b)\cos 50^\circ\right) + \hat{\mathbb{k}}\left(-F_1 a\sin 50^\circ\right)$$

Kraften och vridmomentet som verkar i infästningen i O skall vara motsatta dessa, och alltså ha storlekarna

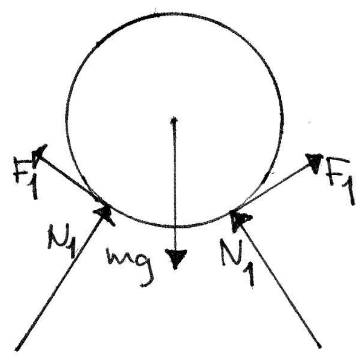
$$|-\mathbb{F}| = \sqrt{(F_1\cos 50^\circ)^2 + (-F_1\sin 50^\circ + F_2\cos 30^\circ)^2 + (-F_2\sin 30^\circ)^2}$$

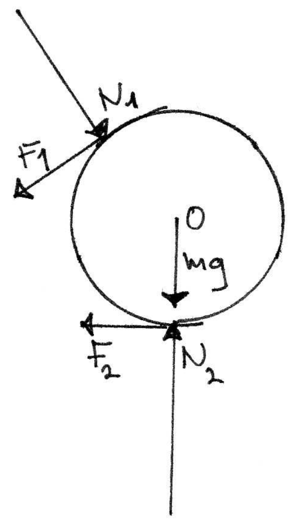
$$\approx 1{,}8\,kN$$

$$|-\mathbb{M}_o| = \sqrt{(-F_1(a+b)\sin 50^\circ + F_2 b\cos 30^\circ)^2 + (-F_1(a+b)\cos 50^\circ)^2 + (-F_1 a\sin 50^\circ)^2}$$

$$\approx 0{,}45\,kNm$$

4. Frilägg den övre och den högra cylindern:





Jämviktsekvationerna lyder

$$\begin{array}{ll}
\uparrow & \left\{\begin{array}{l}
2N_1\cos 30^\circ + 2F_1 \sin 30^\circ - mg = 0 \\[1ex]
0 = 0 \\[1ex]
-N_1 \cos 30^\circ - F_1 \sin 30^\circ + N_2 - mg = 0 \\[1ex]
N_1 \sin 30^\circ - F_1 \cos 30^\circ - F_2 = 0 \\[1ex]
F_1 - F_2 = 0
\end{array}\right. \\
\rightarrow & \\
\uparrow & \\
\rightarrow & \\
\circlearrowleft O &
\end{array}
\iff
\left\{\begin{array}{l}
F_1 = \dfrac{1}{4+2\sqrt{3}} \\
F_2 = \dfrac{1}{4+2\sqrt{3}} \\
N_1 = \frac{1}{2} mg \\
N_2 = \frac{3}{2} mg
\end{array}\right.$$

Varur fås att $\mu_s \geq \dfrac{F_1}{N_1} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} \approx 0{,}27$

5. Enligt cosinussatsen är

$$r = \sqrt{R^2 + \left(\tfrac{1}{2}at^2\right)^2 - 2R\,\tfrac{1}{2}at^2 \cos(\pi - \alpha)}$$

$$= \sqrt{R^2 + \tfrac{1}{4}a^2t^4 + Rat^2 \cos\alpha}$$

Varur fås att

$$\dot{r} = \frac{a^2t^3 + 2Rat\cos\alpha}{2\sqrt{R^2 + \tfrac{1}{4}a^2t^4 + Rat^2\cos\alpha}}$$

6. Låt $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 4$ kg, $m_3 = 6$ kg, $s = 0{,}4$ m

Beteckna systemets fart då ringen når öppningen v.

Energiprincipen på de två förloppen ger då

$$\begin{cases} \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)v^2 = (m_2 + m_3 - m_1)gs \\ \tfrac{1}{2}(m_1 + m_3)v^2 = (m_1 - m_3)g(h - s) \end{cases}$$

Varur fås att

$$h = s\,\frac{2m_1m_2}{(m_1 - m_3)(m_1 + m_2 + m_3)}$$