Tentamen i Mekanik för F del A

Kurskod: FFM053.
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Måndagen den 23 augusti 2004 14.15-18.15 i V.
Jourhavande assistent: Måns Henningson, 0737-296826.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 24 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. a) Med hjälp av åtta likadana fjädrar har man gjort det båda avbildade konstruktionerna. Var och en av dem kan ersättas av en enda fjäder med lämpligt vald fjäderkonstant. Vilken av konstruktionerna (den vänstra eller den högra) svarar då mot en fjäder med högst fjäderkonstant?

   b) En partikel rör sig i rummet under inflytande av en kraft $\mathbf{F} = \mathbf{v} \times \mathbf{n}$, där $\mathbf{v}$ är partikelns momentana hastighet och $\mathbf{n}$ är en given konstant vektor. Partikeln ges en utgångshastighet $\mathbf{v}_0$ som har en komponent parallell med och en komponent vinkelrät mot $\mathbf{n}$. Beskriv kvalitativt partikelbanans form under den fortsatta rörelsen.

2. En partikel med massan m är fäst i ena änden av en fjäder med fjäderkonstanten k och ospända längden l. Den andra änden av fjädern är fäst i en fix punkt O. Partikeln glider friktionsfritt på ett horisontalplan genom O, och kan därvid utföra en cirkelrörelse runt O. Bestäm omloppstiden T för en sådan rörelse som funktion av cirkelns radie r, då $r > l$.

3. Tre identiska stålkulor, vardera med massan m, ligger i den cylindriska ringen som är placerad på ett horisontellt bord. Ringens radie är sådan att kulorna precis rör vid varandra, och dess höjd är något större än kulornas radie. En fjärde likadan kula placeras ovanpå de tre kulorna. Bestäm storleken av den horisontella kraft varmed ringen påverkar var och en av de tre undre kulorna. (*Ledning:* Rita figurer ovanifrån och från sidan.)

Vänd!

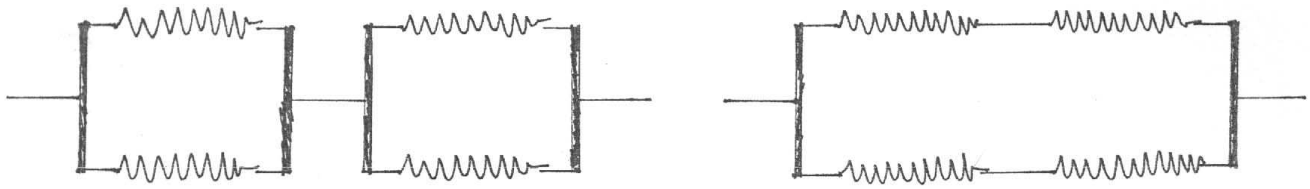
4. Den homogena stången har längden l och är placerad i öppningen med bredden d så att den bildar vinkeln 30^o med horisontalplanet. Den statiska friktionskoefficienten vid A och B är $\mu_s = 0,40$. Bestäm de värden på kvoten l/d för vilka stången kan vara i jämvikt.

5. En kula med massan m kan röra sig friktionsfritt på en ring med radie r, som roterar med den konstanta vinkelhastigheten ω kring en vertikal axel. Efter att eventuella svängningsrörelser har dött ut ligger kulan stilla i förhållande till ringen i den avbildade positionen, karaktäriserad av vinkeln θ. Uttryck ω i de givna storheterna.

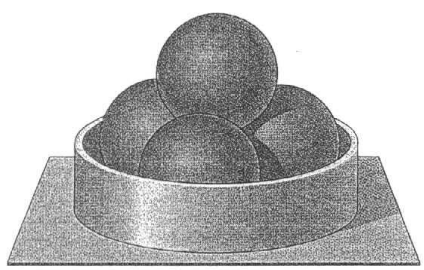
6. Kroppen A med massan 3 kg släpps från vila i det avbildade 60^o läget, och träffar sedan vagnen B med massan 1 kg, som befinner sig i vila. Stöten är fullständigt elastisk. Bestäm avståndet s från punkten C till den punkt där B vänder. Friktionen försummas.

Lycka till!

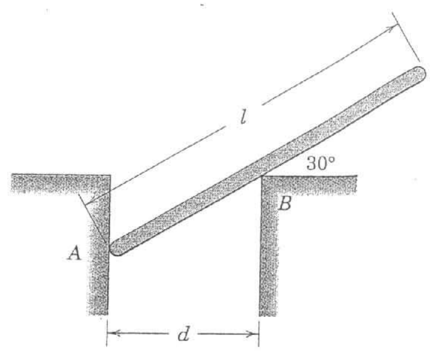
1. a)



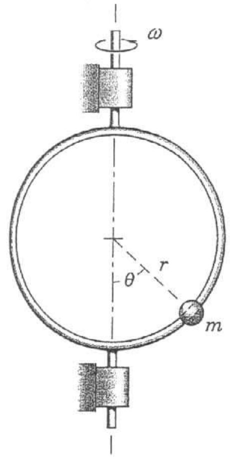
3.



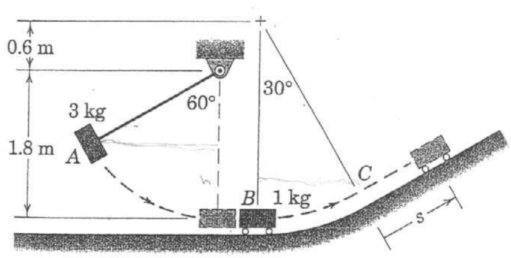
4.



5.



6.



Lösningar till tentamen i Mekanik F del A den 23 augusti 2004

1. a) Beteckna de ingående fjädrarnas fjäderkonstant med k.
Den vänstra konstruktionen har då fjäderkonstanten

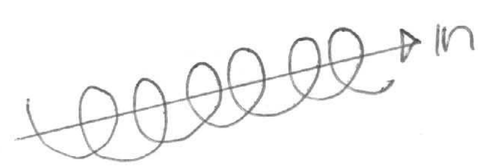
$$1/\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\right)+1/\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\right) = k$$

och den högra har fjäderkonstanten

$$1/\left(\frac{1}{k+k}+\frac{1}{k+k}\right) = k$$

d v s de har samma fjäderkonstant.

b) Partikelns hastighetskomponent parallell med $\mathbb{B}$ är konstant under förloppet, medan hastighetskomponenten vinkelrät mot $\mathbb{B}$ kommer att rotera.
Banan blir alltså skruvformig.



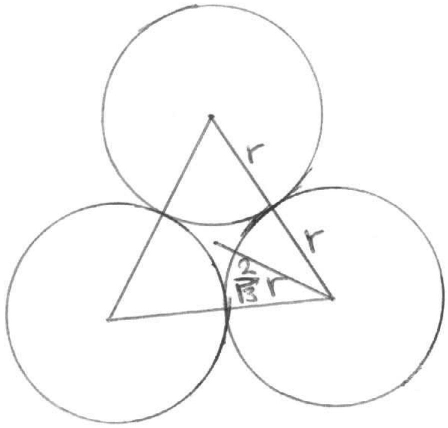
2. Newtons andra lag för partikeln lyder i polära koordinater

$$-k(r-l) = -mr\dot{\theta}^2$$

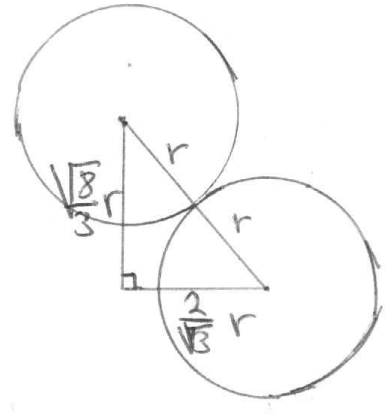
varur följer att omloppstiden T ges av

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = 2\pi\sqrt{\frac{mr}{k(r-l)}}$$

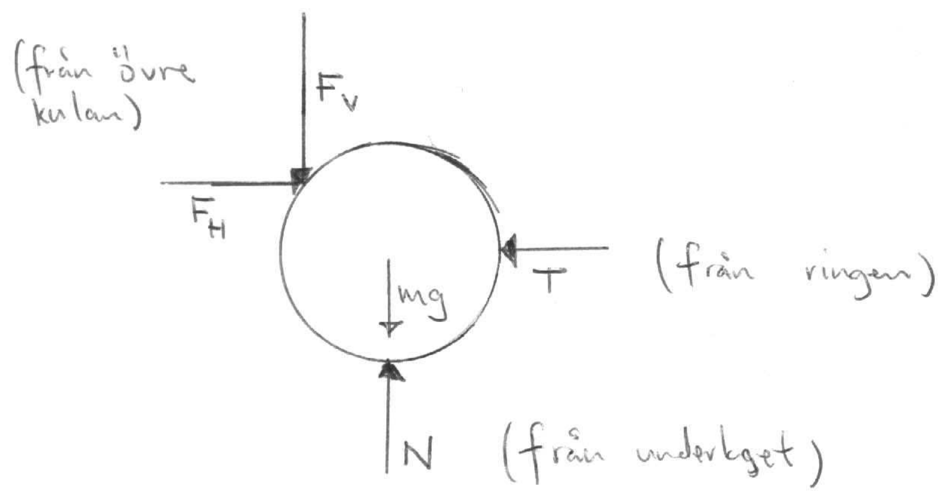
3. Ovanifrån



från sidan



Frilägg en av de undre kulorna

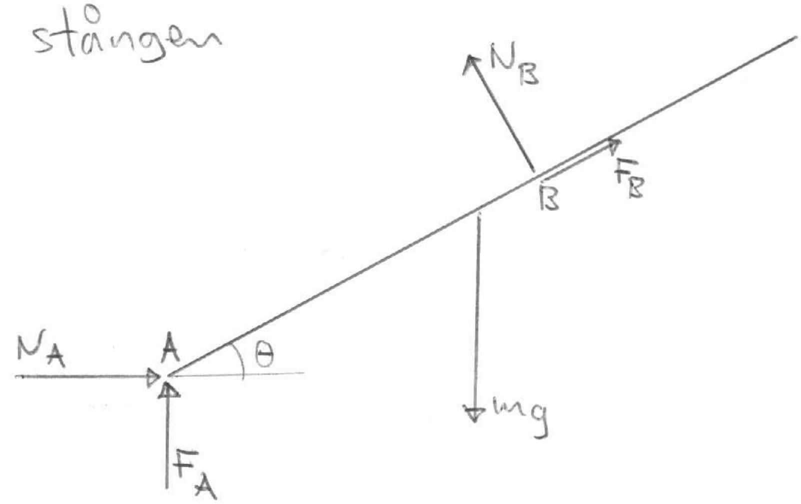


Friläggning av den övre kulan ger att $F_V = \frac{mg}{3}$.

Kraftjämvikt i horisontalled ger att den sökta kraften är

$$T = F_H = F_V \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \Big/ \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} F_V = \frac{mg}{3\sqrt{2}}$$

4. Frilägg stången



och ställ upp jämviktsekvationerna:

$$\begin{aligned} &\rightarrow \quad \\ &\uparrow \quad \\ &\overset{\curvearrowleft}{A} \quad \end{aligned}\begin{cases} N_A - N_B \sin\theta + F_B \cos\theta = 0 \\ F_A - mg + N_B \cos\theta + F_B \sin\theta = 0 \\ -\frac{l}{2}\cos\theta \; mg + \frac{d}{\cos\theta} N_B = 0 \end{cases}$$

Då glidning neråt precis sker är $F_A = \mu_s N_A$ och $F_B = \mu_s N_B$.

Ekvationerna ger då att

$$\frac{l}{d} = \frac{2N_B}{mg\cos^2\theta} = \frac{2}{\cos^2\theta(\cos\theta + 2\mu\sin\theta - \mu^2\cos^2\theta)} \approx 2,4$$

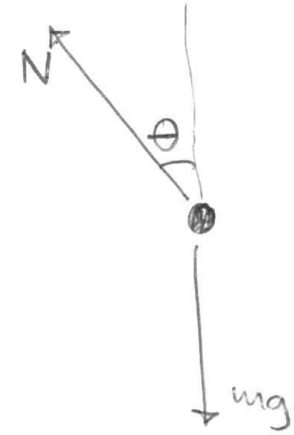
Då glidning uppåt precis sker är $F_A = -\mu_s N_A$ och $F_B = -\mu_s N_B$

Ekvationerna ger då att

$$\frac{l}{d} = \frac{2N_B}{mg\cos^2\theta} = \frac{2}{\cos^2\theta(\cos\theta - 2\mu\sin\theta - \mu^2\cos^2\theta)} \approx 8,1$$

Jämvikt råder alltså för $2,4 < \frac{l}{d} < 8,1$

5. Frilägg kulan, och ställ upp Newtons andra lag i cylindriska koordinater



$$\begin{array}{l} \uparrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{cases} N\cos\theta - mg = 0 \\ -N\sin\theta = -mr\sin\theta\,\omega^2 \end{cases}$$

Varav följer att

$$\omega = \sqrt{\frac{N}{mr}} = \sqrt{\frac{g}{r\cos\theta}}$$

Detta förutsätter dock att $\omega > \sqrt{\frac{g}{r}}$.

Om $\omega < \sqrt{\frac{g}{r}}$ blir $\theta = 0$ då jämvikten har inställt sig.

6. Låt

$m_A = 3\ \text{kg}$, $m_B = 1\ \text{kg}$, $r = 1{,}8\ \text{m}$ $R = 2{,}4\ \text{m}$

v_A = A's hastighet omedelbart före stöten

v_A' = A's 〃 efter 〃

v_B' = B's 〃 efter 〃

Vi får då följande ekvationer:

$$\begin{cases} m_A g r(1-\cos 60^\circ) = \frac{1}{2} m_A v_A^2 & \text{(energiprincipen för A's fallrörelse)} \\ m_A v_A = m_A v_A' + m_B v_B' & \text{(bevarande av rörelsemängd i stöten)} \\ \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2 & \text{(energiprincipen för stöten)} \\ \frac{1}{2} m_B v_B'^2 = m_B g\left[R(1-\cos 30^\circ) + s \sin 30^\circ\right] & \text{(energiprincipen för B's fortsatta rörelse)} \end{cases}$$

Härur fås att

$$v_A = \sqrt{gr}$$

$$v_B' = \sqrt{gr}\ \frac{2m_A}{m_A + m_B}$$

$$s = 2\left[\frac{v_B'^2}{2g} - R\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \frac{v_B'^2}{g} - R(2-\sqrt{3})$$

$$= r\,\frac{4m_A^2}{(m_A+m_B)^2} - R(2-\sqrt{3})$$