Tentamen i Mekanik för F del A

Kurskod: FFM053.
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Fredagen den 18 juni 2004 08.45-12.45 i V.
Jourhavande assistent: Ann-Marie Pendrill, ankn 3282.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 24 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. a) Vardera vikten har massan 5 kg, plattan som vågen står på har massan 0,8 kg, vågen har massan 2,3 kg, och cylindern som står på vågen har massan 1,5 kg. Vad visar vågen? (Linornas massor samt friktionen i trissorna försummas.)

   b) Två kroppar med massor m_A och m_B kolliderar med varandra, varvid deras hastigheter ändras från $\mathbf{v}_A$ och $\mathbf{v}_B$ till $\mathbf{v}'_A$ och $\mathbf{v}'_B$. Är det möjligt att $|\mathbf{v}'_B| > |\mathbf{v}_B|$ samtidigt som $|\mathbf{v}'_B| > |\mathbf{v}_A|$ vid en sådan process? (Detta innebär alltså att kroppen B's fart efter kollisionen är större än både kroppen B's fart före kollisionen och kroppen A's fart före kollisionen.)

2. Två partiklar med massorna m_1 och m_2 påverkar varandra med krafter som är parallella med (eller motriktade) vektorn från den ena partikeln till den andra. Inga andra krafter verkar på partiklarna. Visa att deras sammanlagda rörelsemängdsmoment med avseende på en godtycklig fix punkt är konstant under rörelsen. (Rörelsemängdsmomentet $\mathbf{H}_O$ med avseende på en fix punkt O för en partikel med massan m är $\mathbf{H}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$, där $\mathbf{r}$ är partikelns ortsvektor med avseende på O och $\mathbf{v}$ dess hastighet.)

3. Dörrens tyngdpunkt är belägen i skivans mittpunkt. Dess tyngd upptas helt av gångjärnet i A. Bestäm storleken av den kraft som verkar på gångjärnet i B.

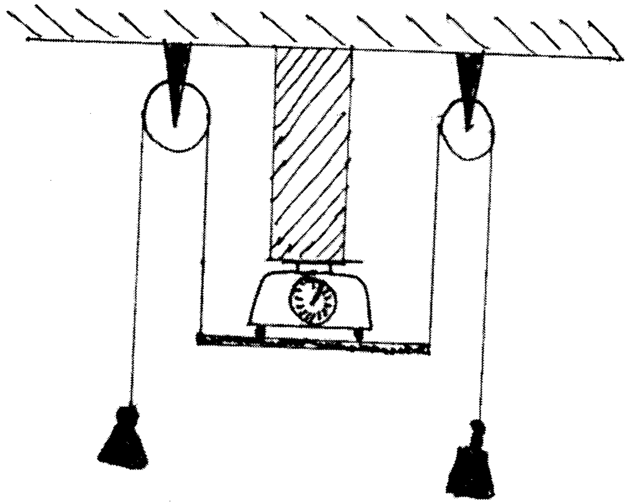
4. Den homogena stången sänks sakta med hjälp av linan som är fäst i dess övre ände och löper under trissan. När $\theta = 40^o$ börjar stångens undre ände att glida. Bestäm den statiska friktionskoefficienten mellan stången och underlaget.

5. Bestäm accelerationerna för kropparna A och B samt spänningen i linan. (Trissornas och linans massa samt friktionen försummas.)

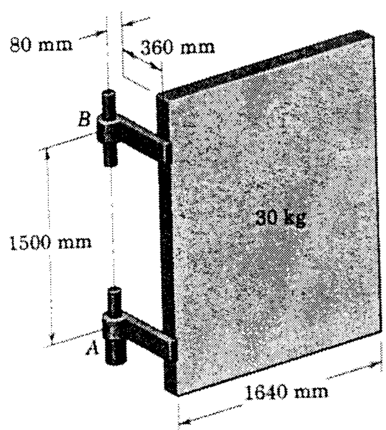
6. Klotet har massan $m = 1,5$ kg och ges en utgångsfart $v_A = 2,5$ m/s i punkten A. De horisontella fjädrarna, som båda har fjäderkonstanten $k = 1800$ N/m, är då ospända. Klotet följer sedan den streckade banan i ett vertikalplan. Bestäm dess fart v_B i punkten B, som befinner sig 125 mm rakt under punkten A.

Lycka till!

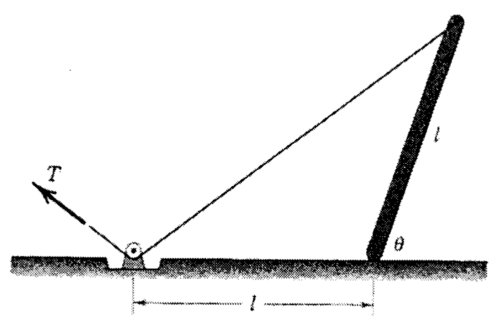
1, a)



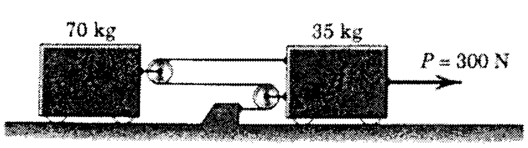
3.


80 mm
360 mm
B
30 kg
1500 mm
A
1640 mm

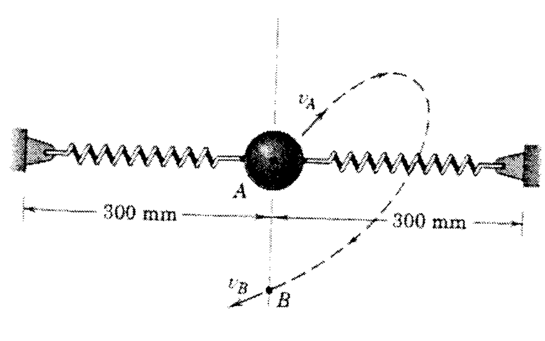
4.


T
l
θ
l

5.


70 kg
35 kg
P = 300 N

6.


v_A
A
300 mm
300 mm
v_B
B

Lösningsförslag, extratentamen 18 juni 2004

1a)
M=5kg, m_v=2.3kg, m_p=0.8kg, cylinderns massa är oväsentlig

- Vågens utslag N/g ges av Normalkraften, N, på vågens översida.
- Friläggning av vågen ger att kraften mellan våg och platta blir $(N + m_v g)$
- Spänningen i vardera linan ges av $T=Mg$
- Krafter på plattan: $m_p g + (N + m_v g) - 2T = 0$
- Detta ger $N/g = 2T/g - m_p - m_v = (10 - 2.3 - 0.8)$kg = 6.9 kg

1b) Ja det är möjligt, när ett lätt föremål kolliderar med ett tyngre och de har motriktade hastigheter före rörelsen. (Eftersom relativa hastigheten byter tecken i en elastisk kollision kommer det lätta föremålets fart att vara större efter kollisionen.)

Exempel:

- Studsa liten boll ovanpå stor boll ner mot marken.
- Racket mot boll
- "Slingshot"-banor för raketer där man utnyttjar rörelsemängd hos t.ex. månen eller en planet.

Eftersom det finns exempel kan det räcka att ge något, och förklara vad som är väsentligt i situationen.

2: Visa rörelsemängdens bevarande för två partiklar som växelverkar med en kraft utmed förbindelselinjen.

- $\mathbf{H}_o = \mathbf{r}_1 \text{ x } m_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \text{ x } m_2 \mathbf{v}_2$
- För att visa rörelsemängdens bevarande visar vi att tidsderivatan blir noll:
- $d\mathbf{H}_o/dt =$
  $\mathbf{r}_1 \text{ x } m\, \mathbf{a}_1 + 0 + \mathbf{r}_2 \text{ x } m\, \mathbf{a}_2 + 0$
- (Vi har utnyttjat att $\mathbf{v} \text{ x } \mathbf{v} = 0$, enligt definitionen av vektorprodukt)
- Utnyttja Newtons 2:a, dvs $\mathbf{F}_i$

3) Dörren. Momentjämvikt. Alla krafter i z-led tas upp i gångjärn A. Vi betraktar i fortsättningen endast moment m.a.p. A Jag lägger koordinatsystemet (x,y,z) så att A ligger i origo och:

- $\mathbf{B}$=(0,0,b), där b=1500mm
- Masscentrum: $\mathbf{G}$ = (a,c,b/2), a=0.360m, c= (80 + 1640/2)mm=0.900m
- Krafter:
  - Tyngdkraft: (0,0,-mg)
  - Krafter i gångjärn B: (Fx, Fy,0)
- Sätt upp momentjämvikt kring A
  - Moment pga tyngdkraften:
    $\mathbf{G}$ x (0,0,-mg) = (-c mg, a mg,0)
  - Moment från B:
    (0,0,b) x (Fx, Fy,0)= (-bFy, bFx, 0)
- Om summan av momenten skall vara

$= m\, \mathbf{a}_i$

- Newtons 3:a ger för växelverkan mellan partiklarna:
- $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$
- Vi får alltså: $d\mathbf{H}_o/dt = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1 = 0$
- Detta uttryck blir noll eftersom $\mathbf{F}_1$ är i samma riktning som $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$

noll får vi alltså

- $-bFy - c\, mg=0$, dvs $Fy = -c\, mg/b$
- $bFx + a\, mg=0$, dvs $Fx = -a\, mg/b$

4) **Givet** Stångens massa M, längd l, vinkel då stången börjar glida: θ. Inför också en okänd spänning, **T**, i linan och en normalkraft, **N**.

Sökt: friktionskoefficienten μ_s

- Momentjämvikt kring A: $Mg\, l/2 \cos\theta = T\, l \sin\theta/2$
- Kraftjämvikt, horisontell led: $\mu_s N - T \cos\theta/2 = 0$
- Kraftjämvikt, vertikal led: $Mg - N + T \sin\theta/2 = 0$

Ur momentjämvikten erhålles
$T = mg \cos\theta / \sin\theta/2$
Insättning leder till ett uttryck för friktionskoefficienten:

$\mu_s = \cos\theta \cot(\theta/2) / (2 + \cos(\theta)) = 0.76$

Obs. uttrycket är oberoende av M (och l).

5) Låt y beteckna längden mellan vänstra trissan och linans fäste och x längden mellan linans fäste och högra trissan.

- Eftersom linans längd bevaras får vi:
- $3x+2y=\text{konst}$
- Detta uttryck leder till $3\, a_B - 2\, a_A=0$, dvs
- $a_A = 3\, a_B/2$
- Frilägg de två blocken:
  - $2T = m_A a_A$
  - $P-3T = m_B a_B$
- Kombinera:
  - $m_A a_A = 3\, m_A a_B/2 = 2T$
  - Detta ger $T = 3\, m_A a_B/4$
  - $m_B a_B = P-3T = P - 9\, m_A a_B /4$

Vi får alltså

$a_B = P/(m_B + 9\, m_A/4)$

Insättning av numeriska värden ger $a_A = 2.3\ m/s^{/2}$, $a_B = 1.56\ m/s^{/2}$ och $T=82N$

6) Ett typiskt problem att lösas med energiprincipen. Det finns för lite information för att försöka bestämma någon bana - men det spelar inte någon roll när man bara ska bestämma farten i en viss punkt.

m = 1.5kg, v_A=2.5m/s, h = 0.125m, k=1800N/m, l=0.300,

- Vid starten har klotet rörelseenergin $mv_A^2/2 = 4.69$J
- Vid punkten B har klotet förlorat mgh i lägesenergi pga tyngdkraften (=1,84J)
- Systemet har samtidigt ökat energin i de två fjädrarna som förlängts från 0.300m till $l+x= (l^2 + h^2)^{1/2} = 0.325$m, dvs x=0.025m
- Energin i vardera fjädern blir då $kx^2/2$, totalt kx^2 (=1.125J)
- Klotet har i detta läge rörelseenergin $mv_B^2/2$
- Energikonservering ger: $mv_A^2/2 = mv_B^2/2 + mgh - kx^2$
- Detta ger ett uttryck
- $v_B = (v_B^2 + 2gh - 2kx^2/m)^{0.5}$
- Insättning ger $v_B = 2.68$m/s

(Kommentar: Det är inte nödvändigt att räkna ut mellanresultat för rörelseenergin i början, eller för mgh och kx^2, men jag gjorde det för att se att resultatet verkade rimligt - skulle farten t.ex. öka eller minska?)

Kommentarer

---

http://fy.chalmers.se/~f3aamp/mekA/tenta.html
AMP 2004-06-18