Tentamen i Mekanik för F del A

Kurskod: FFM053.
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Fredagen den 12 mars 2004 14.15-18.15 i V.
Jourhavande assistent: Ann-Marie Pendrill, ankn 3282.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 30 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. a) Emil har fäst den ena änden av en fjäder, vars ospända längd är 48 cm, i en vägg och drar sedan i den andra änden med kraften 400 N. Fjädern förlängs därvid till 72 cm. Han tar därefter loss fjädern från väggen och sedan drar han och Emilia i var sin ände av fjädern åt motsatta håll. De avpassar dragkraften så att fjädern åter förlängs till 72 cm. Med vilken kraft drar då Emil i fjädern?

   b) Hur stor är tyngdaccelerationen på den höjd (ca 300 km över jordytan) där rymdfärjorna ligger i omloppsbana med astronauterna svävande inuti? (Tyngdaccelerationen är omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet till jordens centrum. Jorden har radien 6370 km, och vid jordytan är tyngdaccelerationen 9,8 m/s^2.)

2. En partikel med massan m rör sig i rummet under inflytande av kraften

$$\mathbf{F} = -\frac{k}{r^3}\mathbf{r}.$$

   Här betecknar $\mathbf{r}$ partikelns ortsvektor med avseende på en fix punkt O, $r = |\mathbf{r}|$ är dess avstånd till O, och k är en konstant. Excentricitetsvektorn $\mathbf{E}$ definieras som

$$\mathbf{E} = \frac{m}{k}\mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) - \frac{1}{r}\mathbf{r},$$

   där $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ är partikelns hastighet. Visa att $\mathbf{E}$ är konstant, det vill säga att $\dot{\mathbf{E}} = 0$. (*Ledning:* Använd Newtons andra lag, samt identiteten $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$, som gäller för godtyckliga vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$.)

3. Behållaren med last har massan m. Bestäm tryckspänningen P i stagen i triangeln ABC.

Vänd!

4. Cylindern har massan m och hålls på plats med linan som är fäst i punkterna A och B. Den statiska friktionskoefficienten mellan cylindern och underlaget är μ_s. Hur stor måste kraften P vara för att cylindern skall börja glida?

5. Cylindern rör sig fram och tillbaka längs med stången så att dess avstånd r till den vertikala axeln beror av tiden t enligt $r = r_0 + b \sin \omega t$. Samtidigt vrider sig stången kring den vertikala axeln med vinkelhastigheten $\Omega = \dot{\theta}$. Här antas r_0, b, ω och Ω vara givna konstanter. Bestäm värdet på r i det ögonblick då cylinderns acceleration inte har någon radiell komponent.

6. Kropparna A och B har samma massor. Systemet släpps från vila i det avbildade läget då $x = y$. All rörelse sker sedan i ett vertikalplan. Friktionen försummas. Bestäm den maximala hastigheten för kroppen B.

Lycka till!

Lösningar till tentamen i Mekanik F del A den 12 mars 2004

1a. Han drar med 400 N även i det fallet. Fjädern är i jämvikt eftersom den även påverkas av en motriktad kraft med storleken 400 N, i det första fallet från väggen, i det andra fallet från Emilia.

1b. Man får $9{,}8\,\text{m/s}^2 \cdot \left(\frac{6370 \cdot 10^3\,\text{m}}{6370 \cdot 10^3\,\text{m} + 300 \cdot 10^3\,\text{m}}\right)^2 = 8{,}9\,\text{m/s}^2$

d v s nästan lika mycket som på jordytan. Orsaken till att astronauterna svävar är att de och rymdfärjan befinner sig i fritt fall när de rör sig runt jorden.

2. $$\dot{\mathbb{E}} = \frac{m}{k}\dot{\mathbb{V}} \times (\mathbb{r} \times \mathbb{V}) + \frac{m}{k}\mathbb{V} \times (\dot{\mathbb{r}} \times \mathbb{V}) + \frac{m}{k}\mathbb{V} \times (\mathbb{r} \times \dot{\mathbb{V}})$$

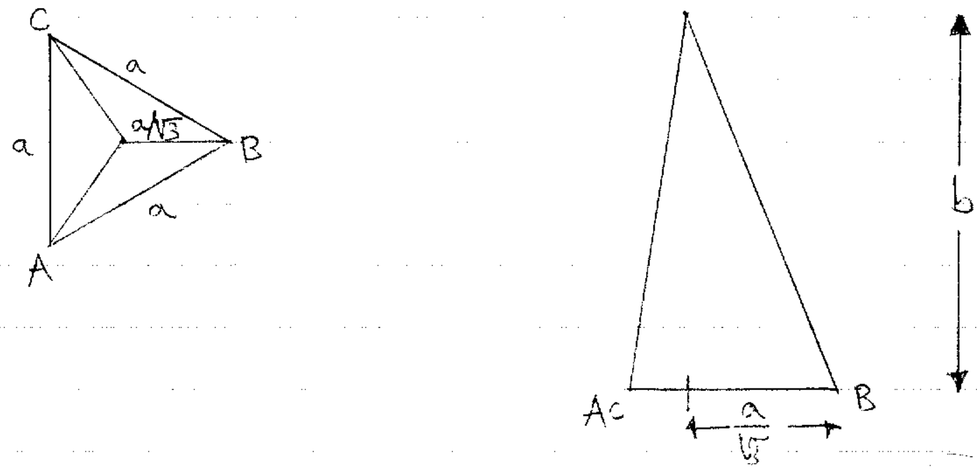
$$+ \frac{\mathbb{r} \cdot \dot{\mathbb{r}}}{r^3}\mathbb{r} - \frac{1}{r}\dot{\mathbb{r}}$$

$$= \frac{1}{k}\mathbb{F} \times (\mathbb{r} \times \mathbb{V}) + \frac{1}{k}\mathbb{V} \times (\mathbb{r} \times \mathbb{F}) + \frac{1}{r^3}\mathbb{r} \cdot \mathbb{V}\,\mathbb{r} - \frac{1}{r}\mathbb{V}$$

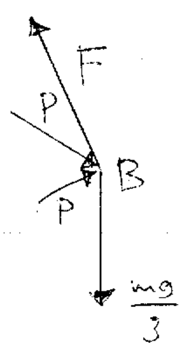
$$= -\frac{1}{r^3}\mathbb{r} \times (\mathbb{r} \times \mathbb{V}) + \frac{1}{r^3}\mathbb{r} \cdot \mathbb{V}\,\mathbb{r} - \frac{1}{r^3}\mathbb{r} \cdot \mathbb{r}\,\mathbb{V}$$

$$= 0$$

3. Konstruktionen sedd uppifrån och från sidan:



Vi frilägger ett av hörnen, t ex det i B. Det påverkas av tyngdkraften, $\frac{mg}{3}$, spännkraften F i linan samt tryckkrafter P i två stag



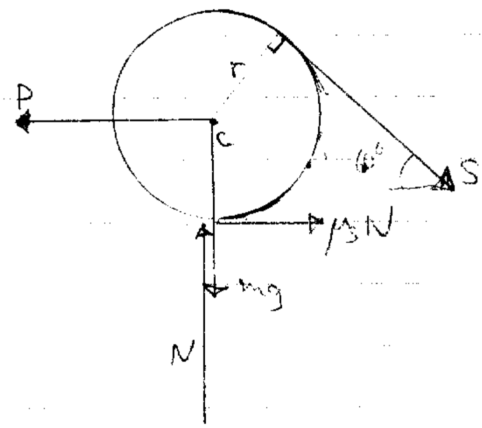
Beteckna spännkraftens horisontal och vertikalkomponenter med F_x respektive F_y. Det gäller då att $\frac{F_x}{F_y} = \frac{a/\sqrt{3}}{b}$. Jämvikt i horisontell och vertikal led ger att $F_y = \frac{mg}{3}$ och att $2P\cos 30^\circ = F_x$.

Härur fås den sökta tryckspänningen

$$P = \frac{1}{9}\,\frac{mga}{b}.$$

4.

Vi frilägger cylindern och den del av snöret som ligger an mot cylindern då glidningen börjar:



Jämviktsekvationerna lyder (med r = cylinderns radie)

$$
\begin{cases}
\rightarrow: & S\cos 60^\circ + \mu_s N - P = 0 \\
\uparrow: & N - S\sin 60^\circ - mg = 0 \\
\curvearrowright c: & Sr - \mu_s N r = 0
\end{cases}
$$

Varur fås att

$$P = \frac{3mg\mu_s}{2-\sqrt{3}\mu_s}$$

5. Radialkomponenten av cylinderns acceleration är

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$= -b\omega^2 \sin \omega t - (r_0 + b\sin \omega t)\Omega^2$$

$$= -r_0\Omega^2 - b\sin \omega t\,(\omega^2 + \Omega^2)$$

Villkoret $a_r = 0$ ger att

$$b\sin \omega t = -\frac{r_0\Omega^2}{\omega^2 + \Omega^2}$$

så att

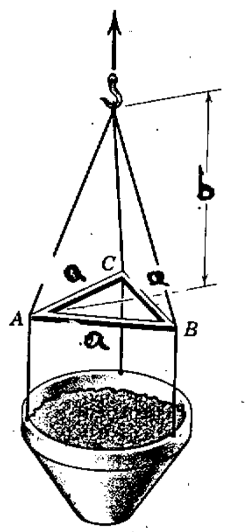
$$r = r_0 - \frac{r_0\Omega^2}{\omega^2 + \Omega^2} = r_0 \frac{\omega^2}{\omega^2 + \Omega^2}$$

6. B's hastighet är maximal då den befinner sig rakt ovanför A, eftersom A's fallsträcka då är maximal och A's hastighet är noll.
Betecknas kropparnas massor med m så ger energiprincipen B's hastighet v enligt

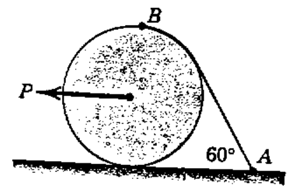
$$\frac{mv^2}{2} = mg\left(\frac{L}{\sqrt{2}} + L\right)$$

d v s $$v = \sqrt{gL(2+\sqrt{2})}$$

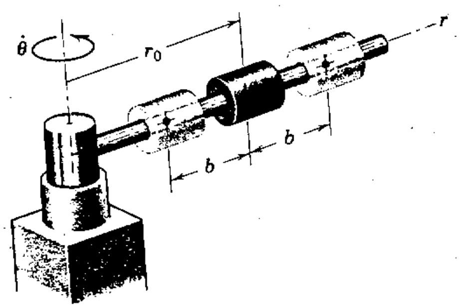
3.



4.



5.



6.