Tentamen i Mekanik för F del A

Kurskod: FFM053.
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Lördagen den 10 januari 2004 08.45-12.45 i V.
Jourhavande assistent: Pär Arvidsson, ankn 3685.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 30 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. a) Går det att bestämma massan M så att konstruktionen är i jämvikt, om spännkraften i linan inte får överstiga 500 N? (Friktion samt massor för lina och trissor kan försummas.)

   b) Emil har under jullovet byggt en bil av Mecano. Ovanpå bilen har han monterat ett 'vindkraftverk', vars propeller är förbunden med bilens hjul genom ett system av kugghjul och drivremmar. Tanken är att när han blåser på propellern med en hårtork, så skall bilen röra sig. Men kan en sådan konstruktion verkligen röra sig *mot* vindriktningen?

2. Visa att tyngdkraftsfördelningen på en godtycklig tredimensionell stel kropp (inte nödvändigtvis med konstant densitet) kan ersättas med en enda punktkraft (vars angreppspunkt G kallas för kroppens tyngdpunkt.) Man skall alltså visa att tyngdkraftsfördelningen och punkt-kraften inte bara har samma kraftsumma, utan även samma vridmoment med avseende på någon godtycklig referenspunkt.

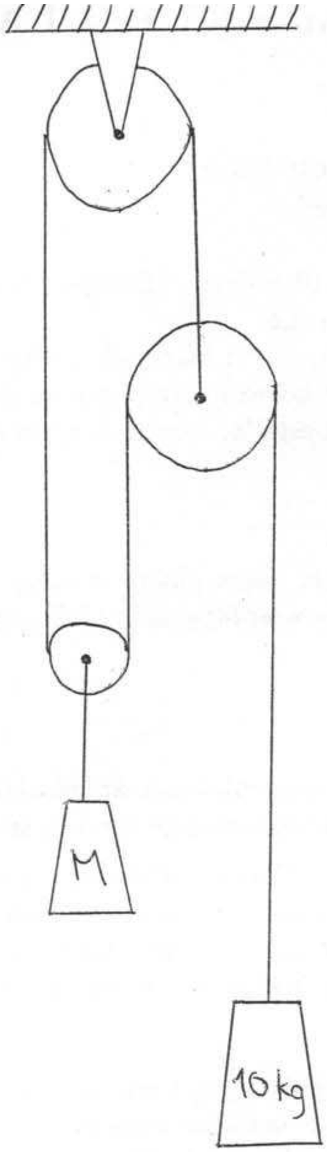
3. Trumman och axeln har tillsammans massan 50 kg och tyngdpunkten i G. Axeln påverkas av ett yttre 120 Nm vridmoment enligt figuren, men hindras att rotera genom linan som är fäst i trumman och i punkten C. Bestäm reaktionskrafterna (till storlek och riktning) från lagren i A och B på axeln då jämvikt råder. Angivna mått är i mm.

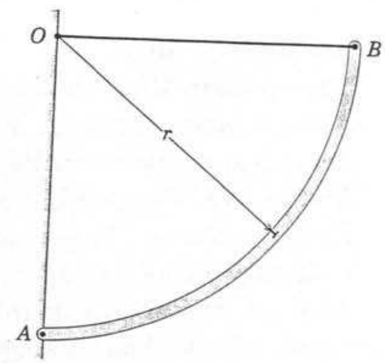
4. Den homogena kvartscirkeln har massan m och befinner sig i ett vertikalplan. Den kan vrida sig fritt kring punkten A och hålls på plats av den horisontella linan OB. Bestäm reaktionskraften (till storlek och riktning) från väggen på kvartscirkeln i punkten A.

5. Bestäm hastigheten v_B uttryckt i hastigheten v_A och vinkeln θ. (Linan som går från taket, över trissorna i A och B och är fäst i axeln till trissa A är otänjbar och hålls spänd av fjädern.)

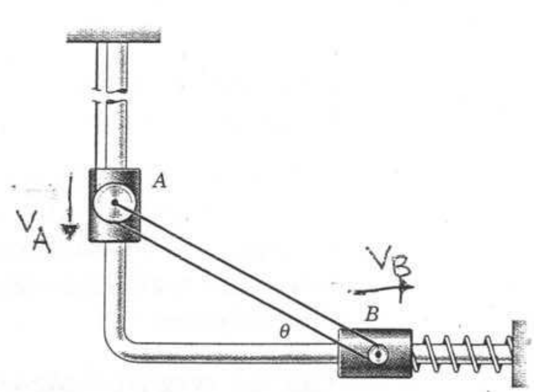
6. Linan är fäst i och lindad kring trissan i O. Konstruktionen släpps i vila då vinkeln $\theta = 0$. Bestäm cylinderns hastighet v då $\theta = 30^o$. (Friktion samt massor för lina, trissor och armarna som vikterna sitter på försummas.)

Lycka till!

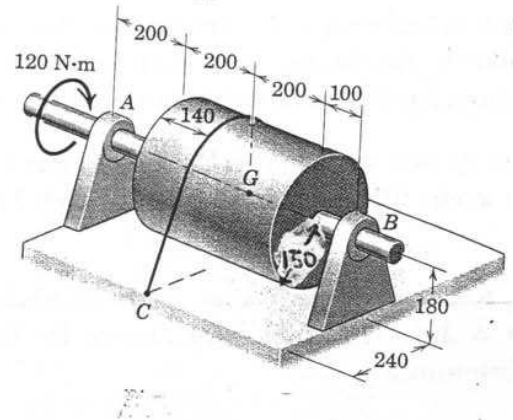

M
10 kg


O
B
r
A

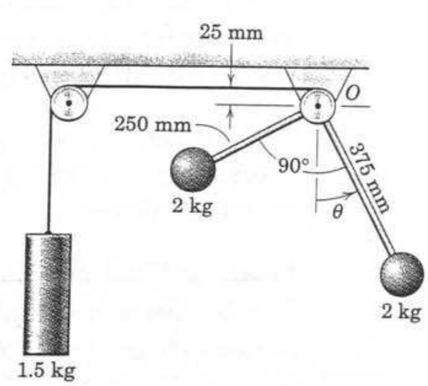
5.


A
V_A
V_B
B
θ

3.


120 N·m
200
200
200
100
A
140
G
B
150
C
180
240

6.


25 mm
O
250 mm
90°
375 mm
2 kg
θ
2 kg
1.5 kg

Lösningar till tentamen i Mekanik för F del A

10 januari 2004

1. (a) Nej! Tänk t.ex. på att kraften i linan måste vara densamma överallt, vilket gör att den högra trissan ej kan vara i jämvikt.

   (b) Ja! En friktionskraft från underlaget verkar på bilen och ger den en acceleration framåt. Per-Olof Nilsson har ett sådant fordon bland sina fysikaliska leksaker.

2. Orientera ett koordinatsystem så att tyngdkraften verkar i negativ z-led. Det betyder att tyngdkraften på ett infinitesimalt volymselement dV i punkten $\mathbf{x}$ blir $d\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})gdV\,\hat{z}$, där $\rho(\mathbf{x})$ betecknar densiteten. Den totala kraften verkande på kroppen är då

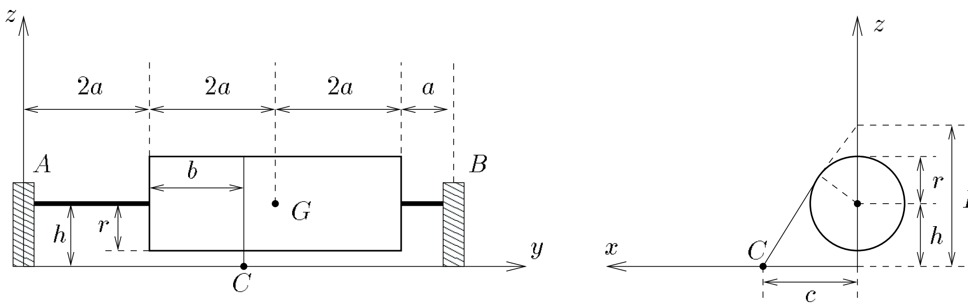
$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\int \rho(\mathbf{x})gdV\,\hat{z} = -\int dm\,g\hat{z} = -mg\hat{z},$$

där integralen är över kroppens volym. På samma sätt fås att vridmomentet kring origo (som ju är en godtycklig punkt) blir

$$\mathbf{M} = \int d\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \int \mathbf{x}\times d\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\int \rho(\mathbf{x})gdV\,\mathbf{x}\times\hat{z} = \bar{\mathbf{x}}\times(-mg\hat{z}) = \bar{\mathbf{x}}\times\mathbf{F},$$

där $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{m}\int \mathbf{x}\,dm$ betecknar tyngdpunktens läge. Detta visar att tyngdkraftsfördelningen är ekvivalent med en punktkraft placerad i tyngdpunkten.

3. Inför beteckningar enligt figur.



En friläggning ger att de krafter som påverkar trumman och axeln är: en kraft $\mathbf{A} = A_x\hat{x}+A_z\hat{z}$ i lager A, en kraft $\mathbf{B} = B_x\hat{x}+B_z\hat{z}$ i lager B, en kraft $\mathbf{C} = C\frac{c\hat{x}-H\hat{z}}{\sqrt{c^2+H^2}}$ längs linan mot punkten C samt en tyngdkraft $-mg\hat{z}$ i G. Beteckna dessutom det yttre momentet med $\mathbf{M} = -M\hat{z}$. Sträckan H är inte given utan fås till $H \approx 561.9$ mm genom ekvationen (likformiga trianglar)

$$\frac{c}{H} = \frac{r}{\sqrt{(H-h)^2 - r^2}}.$$

Kraft- och momentjämvikt (kring A) ger nu att

$$\begin{aligned}
C\frac{c}{\sqrt{c^2+H^2}} + A_x + B_x &= 0 \qquad \text{(kraft, } \hat{x}\text{)}\\
-C\frac{H}{\sqrt{c^2+H^2}} + A_z + B_z - mg &= 0 \qquad \text{(kraft, } \hat{z}\text{)}\\
7aB_z - 4amg - (2a+b)C\frac{H}{\sqrt{c^2+H^2}} &= 0 \qquad \text{(moment, } \hat{x}\text{)}\\
rC - M &= 0 \qquad \text{(moment, } \hat{y}\text{)}\\
-7aB_x - (2a+b)C\frac{c}{\sqrt{c^2+H^2}} &= 0 \qquad \text{(moment, } \hat{z}\text{).}
\end{aligned}$$

Ekvationssystemet har lösningen

$$\begin{aligned}
A_x &\approx -161.6\,\mathrm{N}\\
A_z &\approx 588.6\,\mathrm{N}\\
B_x &\approx -152.6\,\mathrm{N}\\
B_z &\approx 638\,\mathrm{N}\\
C &= 800\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

4. Beteckna krafterna i x- respektive y-led från fästpunkten A på kvartscirkeln med A_x och A_y. Kraften från linan i B går enbart i x-led medan kraften på ett bågelement $d\theta$ är $dF = \frac{2m}{\pi r} g r d\theta$ i negativ y-led. Kraftjämvikt i y-led ger direkt att $A_y = mg$. Momentjämvikt medsols kring punkten O ger vidare att

$$-A_x r + \int_0^{\pi/2} r\cos\theta \frac{2m}{\pi r} g r d\theta = 0,$$

där θ är vinkeln mellan sträckan OB och $\mathbf{r}$. Detta ger att $A_x = \frac{2}{\pi} mg$.

5. Låt x_{A} vara sträckan från kröken till trissa A och x_{B} sträckan från kröken till trissa B. Det betyder att $v_A = -\dot{x}_A$ och $v_B = \dot{x}_B$. Linan är otänjbar, alltså måste

$$2\sqrt{x_{\mathrm{A}}^2 + x_{\mathrm{B}}^2} - x_{\mathrm{A}} = \text{konst.}$$

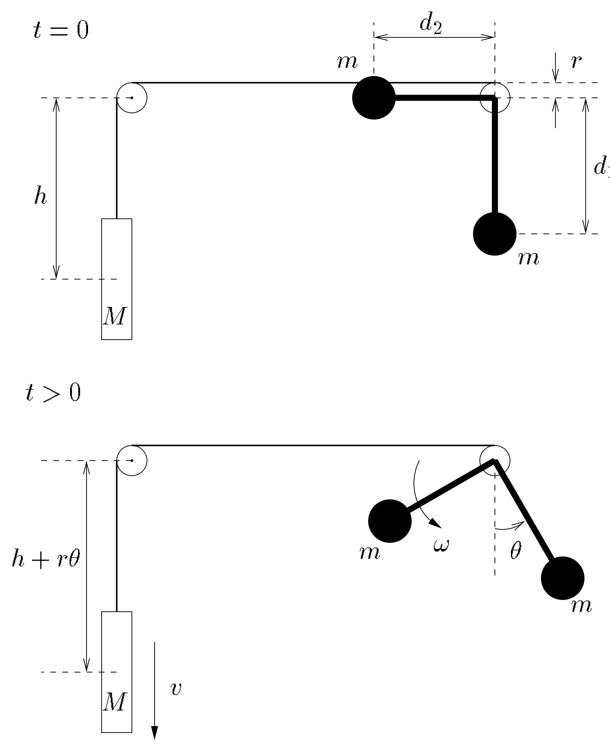
Derivering av detta uttryck ger att

$$-2\sin\theta v_A + 2\cos\theta v_B + v_A = 0,$$

där vi har använt att $\sin\theta = \frac{x_{\mathrm{A}}}{\sqrt{x_{\mathrm{A}}^2 + x_{\mathrm{B}}^2}}$ och $\cos\theta = \frac{x_{\mathrm{B}}}{\sqrt{x_{\mathrm{A}}^2 + x_{\mathrm{B}}^2}}$. Vi ser direkt att

$$v_B = \left(\tan\theta - \frac{1}{2\cos\theta}\right) v_A.$$

6. Inför beteckningar enligt figur.



Med nollnivån i höjd trissorna fås att energin vid $t = 0$ är

$$\begin{cases} V = -Mgh - mgd_1 \\ T = 0, \end{cases}$$

medan energin när $t > 0$ är

$$\begin{cases} V = -Mg(h + r\theta) - mgd_1\cos\theta - mgd_2\sin\theta \\ T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(d_1^2 + d_2^2). \end{cases}$$

Dessutom vet vi att $v = r\omega$. Energikonservering ger nu, med numeriska värden insatta, att $v \approx 0.071$ m/s då $\theta = 30°$.