Tentamen i Mekanik för F del A

Kurskod: FFM052.
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Måndagen den 25 augusti 2003 14.15 - 18.15 i V.
Jourhavande assistent: Erik Flink, ankn 3685.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 30 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. a) De fyra klossarna är homogena rätblock med långsidorna 12 cm. De är staplade på varandra men sitter inte ihop. Hur stort kan avståndet $s = s_1 + s_2 + s_3$ maximalt vara utan att bygget rasar? (*Ledning:* Bestäm först s_1, därefter s_2 och slutligen s_3.)

   b) Bestäm kraften P så att klossarna i de två figurerna får samma acceleration. (Försumma friktionen och massorna för rep och block.)

2. En projektil rör sig med hastigheten $\mathbf{v}$ genom luften, och påverkas därvid av en luftmotståndskraft $\mathbf{F}$, som är motriktad $\mathbf{v}$. Luftmotståndskraften har storleken $|\mathbf{F}| = k|\mathbf{v}|^2$, där k är en konstant (med enheten Ns^2/m^2). Om vi inför ett Cartesiskt koordinatsystem med ortonormerade basvektorer $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ och $\mathbf{k}$ så kan vi skriva $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ och $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$. Uttryck kraftkomponenterna F_x, F_y och F_z med hjälp av hastighetskomponenterna v_x, v_y och v_z samt konstanten k.

3. De två krafterna som verkar på stolpen kan ersättas med en ekvivalent kraftskruv, det vill säga en resulterande kraft $\mathbf{R}$ med verkningslinje och ett därmed parallellt vridmoment $\mathbf{M}$. Bestäm vektorerna $\mathbf{R}$ och $\mathbf{M}$, samt koordinaterna för den punkt där verkningslinjen skär yz-planet.

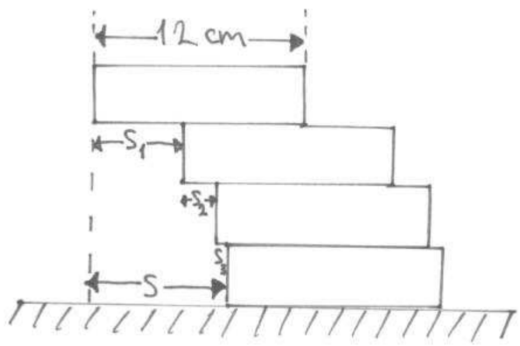
4. Cylindern har massan $m = 1200kg$, och friktionskoefficienterna mellan trucken och cylindern samt mellan cylindern och det lutande planet har båda värdet $\mu = 0,40$. Bestäm den minsta möjliga horisontella kraften från underlaget på truckens däck för att jämvikt skall kunna råda.

5. Kropp B rör sig neråt med hastigheten v_B. Bestäm hastigheten (horisontal och vertikalkomponent) för kropp A uttryckt i b, l, θ och v_B. (Kabeln som A hänger i antas hela tiden vara vertikal.)

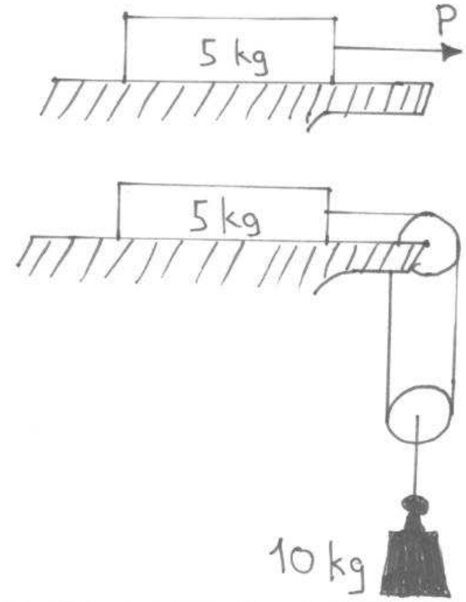
6. Bestäm alla värden på vinkeln θ så att kroppen får accelerationen $9m/s^2$ åt höger.

Lycka till!

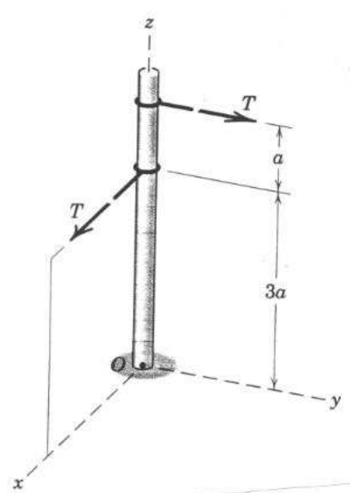
1. a)


12 cm
S_1
S_2
S_3
S

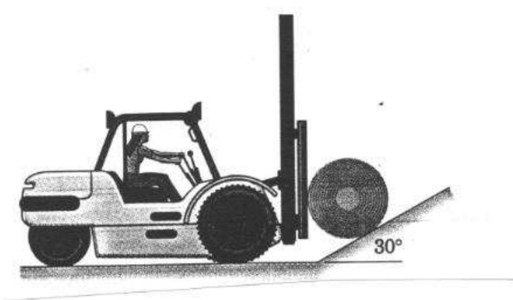
1. b)


P
5 kg
5 kg
10 kg

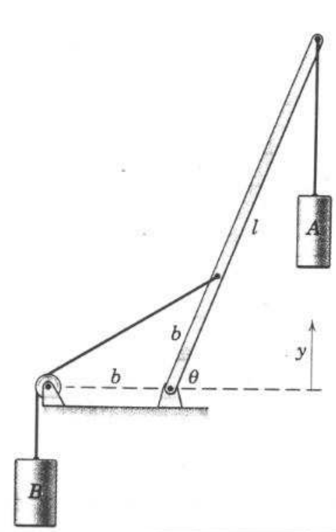
3.


z
T
a
T
3a
O
y
x

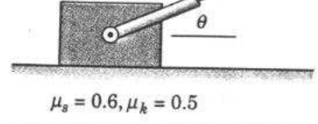
4.


30°

5.


A
l
b
y
b
θ
B

6.


P = 450 N
35 kg
θ
$\mu_s = 0.6, \mu_k = 0.5$

Lösningar till tentamen i Mekanik för F del A

25 augusti 2003

1. (a) Principen här är att bygga på stapeln underifrån och placera varje nytt blocks vänsterkant rakt under de ovanliggande blockens tyngdpunkt. Detta ger direkt det maximala avståndet, eftersom varje förflyttning av *något* block åt vänster gör att stapeln välter.
   I vårt fall fås först $s_1 = l/2$ trivialt. Dessa två blocks tyngdpunkt ligger $3l/4$ in från det översta blockets vänsterkant, alltså väljs $s_2 = l/4$. På samma sätt fås sedan $s_3 = l/6$. Slutsumman blir $s = 11l/12 = 11$ cm.

   (b) Inför en kraft T i linan och låt positiv riktning vara åt höger i figuren för klossarna ($m = 5$ kg) samt nedåt för tyngden ($M = 10$ kg). Newtons andra lag blir i det första fallet

   $$P = ma$$

   och i det andra

   $$\begin{aligned} T &= ma \\ Mg - 2T &= M\frac{a}{2}. \end{aligned}$$

   Genom att eliminera T ur de två sista ekvationerna fås direkt att

   $$a = \frac{2g}{1 + 4\frac{m}{M}},$$

   vilket ger att

   $$P = ma = \frac{2mg}{1 + 4\frac{m}{M}} \approx 32.7 \text{ N}$$

2. En enhetsvektor riktad längs $\mathbf{v}$ är $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, vilket innebär att luftmotståndskraften kan skrivas

   $$\mathbf{F} = -k|\mathbf{v}|^2\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = -k|\mathbf{v}|\mathbf{v},$$

   vilket på komponentform blir

   $$\begin{aligned} F_x &= -kv_x\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \\ F_y &= -kv_y\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \\ F_z &= -kv_z\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \end{aligned}$$

3. Den resulterande kraften $\mathbf{R}$ fås direkt som summan av de utritade krafterna och blir

   $$\mathbf{R} = T\hat{x} + T\hat{y}.$$

   Antag nu att den punkt P där kraftskruvens verkningslinje skär yz-planet är $\mathbf{x}_P = (0, y, z)$. Vektorerna från denna punkt till krafternas angreppspunkter i figuren är

   $$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= -y\hat{y} + (4a - z)\hat{z} \\ \mathbf{r}_2 &= -y\hat{y} + (3a - z)\hat{z}. \end{aligned}$$

   Nu fås summan av vridmomenten kring P som

   $$\mathbf{M}_P = -(4a - z)T\hat{x} + (3a - z)T\hat{y} + yT\hat{z}.$$

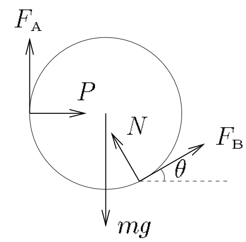
   För att vi ska få en kraftskruv i P krävs att $\mathbf{R}$ och $\mathbf{M}_P$ är parallella. Detta ger omedelbart att

   $$\begin{aligned} y &= 0 \\ z &= \frac{7a}{2}, \end{aligned}$$

   och det resulterande momentet blir

   $$\mathbf{M} = -\frac{a}{2}T\hat{x} - \frac{a}{2}T\hat{y}.$$

4. Frilägg cylindern enligt figur. Observera riktningen hos friktionskrafterna F_{A} och F_{B}.



Kraftjämvikt och momentjämvikt (kring cylinderns mitt) ger nu att

$$\begin{aligned} P - N\sin\theta + F_{\mathrm{B}}\cos\theta &= 0 \qquad (\hat{x}) \\ F_{\mathrm{A}} + N\cos\theta + F_{\mathrm{B}}\sin\theta - mg &= 0 \qquad (\hat{y}) \\ F_{\mathrm{B}} - F_{\mathrm{A}} &= 0. \end{aligned}$$

Antag nu att gränsfriktion råder vid ytan mot trucken, alltså att $F_{\mathrm{A}} = \mu P$. Gränsfriktion måste enligt förutsättningarna råda vid någon av ytorna, annars skulle P kunna minskas utan att cylindern skulle glida utför planet.

Vi måste nu kontrollera att friktionen vid den andra ytan inte blir för stor. Ekvationerna ovan ger direkt att

$$\frac{F_B}{N} = \frac{\mu\sin\theta}{1+\mu\cos\theta} \approx 0.15 < 0.4,$$

alltså var vårt antagande korrekt. Hade vi antagit gränsfriktion vid den andra ytan hade $\mu > 0.4$ krävts vid ytan mot trucken, vilket är orimligt.

Genom att lösa ut P ur ekvationerna ovan fås nu att

$$P = \frac{mg\sin\theta}{\cos\theta + \mu(1+\sin\theta)} \approx 4010 \text{ N}.$$

Friläggning av trucken ger nu direkt att den horisontella kraften från underlaget på trucken är $P \approx 4010$ N.

5. Notera först att kropp A rör sig på exakt samma sätt som punkten P där linan från A fäster i stången. Beteckna koordinaterna (mätta från stångens infästning i planet) för punkten P med $(x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}})$. Trigonometri ger nu att

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{P}} &= l\cos\theta \\ y_{\mathrm{P}} &= l\sin\theta. \end{aligned}$$

Vi ser också att cosinusteoremet tillämpat på triangeln med yttervinkeln θ ger

$$s^2 = b^2 + b^2 - 2b^2\cos(\pi - \theta) = 2b^2(1+\cos\theta),$$

där s är längden hos linsegmentet mellan trissan ovanför B och infästningen i stången. Notera att när B rör sig nedåt blir s mindre, ur detta resonemang inses direkt att $\dot{s} = -v_B$.

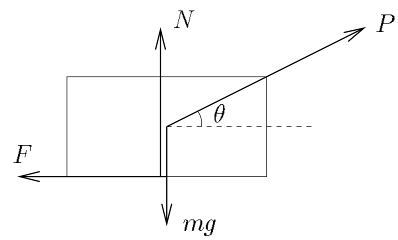
Genom att derivera tvången ovan med avseende på tiden fås nu att

$$\begin{aligned} \dot{x}_P &= -l\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y}_P &= l\dot{\theta}\cos\theta \\ 2s\dot{s} &= -2b^2\dot{\theta}\sin\theta. \end{aligned}$$

Eliminering av $\dot{\theta}$ ger nu att ($\mathbf{v}_A = (v_x, v_y) = (\dot{x}_P, \dot{y}_P)$)

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{l}{b}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,v_B \\ v_y &= \frac{l}{b}\frac{\sqrt{2(1+\cos\theta)}}{\tan\theta}v_B. \end{aligned}$$

6. Frilägg kroppen enligt figur.



Newtons andra lag tillämpad på klossen ger nu att

$$
\begin{aligned}
P\cos\theta - F &= ma \\
N + P\sin\theta - mg &= 0.
\end{aligned}
$$

I och med att kroppen har en acceleration råder fullt utvecklad *kinetisk* friktion (oavsett om kroppen råkar befinna sig i vila eller i rörelse vid den aktuella tidpunkten), alltså gäller att

$$F = \mu_k N.$$

Ekvationerna ovan ger nu att

$$\cos\theta + \mu_k \sin\theta = \frac{m(a + \mu_k g)}{P} \equiv A.$$

Vi har infört en dimensionslös storhet A för att göra lösningen mer läsbar.

Denna ekvation kan lösas genom att utnyttja att

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} \qquad -\pi \leq \theta \leq \pi,$$

vilket efter omkastning av termer och en kvadrering ger att

$$\sin^2\theta - \frac{2\mu_k A}{1+\mu_k^2}\sin\theta + \frac{A^2-1}{1+\mu_k^2} = 0.$$

Denna andragradsekvation har rötterna

$$\sin\theta = \frac{\mu_k A \pm \sqrt{1 + \mu_k^2 - A^2}}{1 + \mu_k^2},$$

vilket ger vinklarna

$$\theta \approx \begin{cases} 41.3^\circ \\ 11.9^\circ \end{cases}$$

som båda satisfierar de ursprungliga ekvationerna (alltså inga falska rötter).