# Tentamen i Mekanik för F och Kf del A

*Kurskod*: FFM052.
*Examinator*: Måns Henningson.
*Tid och plats*: Fredagen den 14 mars 2003 14.15 - 18.15 i V.
*Jourhavande assistent*: Pär Arvidsson, ankn 3685.
*Hjälpmedel*: Typgodkänd räknedosa.
*Poängberäkning*: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 och 2 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 30 poäng.
*Tänk på* att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

*De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.*

1. a) Det U-formade rörets skänklar har båda tvärsnittsarean 1 cm$^2$. Man häller först i 1 liter vatten med densiteten 1 g/cm$^3$. De båda vätskeytorna ligger då på nivån $h = 40$ cm enligt figuren. Man häller sedan i 5 cm$^3$ olja med densiteten 0,8 g/cm$^3$ i den vänstra skänkeln. Var kommer då den fria oljeytan i den vänstra skänkeln och vattenytan i den högra skänkeln att ligga?

   b) De två aporna har båda massan 30 kg och hänger till en början stilla i de positioner som har avbildats i figuren. Den vänstra apan börjar sedan att klättra uppåt med farten 0.50 m/s *relativt repet* medan den högra apan börjar att klättra nedåt med farten 0.25 m/s *relativt repet*. På vilket avstånd från B kommer den högra apan att befinna sig när den vänstra apan har kommit fram till A? (Repets massa kan försummas, och det löper friktionsfritt över de båda trissorna i A och B.)

2. a) En partikel rör sig i rummet med hastigheten $\mathbf{v}$. Visa att dess fart $v = |\mathbf{v}|$ och acceleration $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ uppfyller sambandet

$$\frac{d}{dt}v = v^{-1}\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}.$$

   b) En partikel med massan $m$ och elektriska laddningen $q$ som rör sig i ett magnetfält $\mathbf{B}$ påverkas av kraften

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

   Visa att partikelns fart är konstant. (*Ledning:* Använd den formel som skulle bevisas i deluppgift a).)

*Vänd!*

3. Bestäm de krafter som verkar på vevaxeln från lagren i A och B för att den skall vara i jämvikt när den påverkas av den pålagda kraften 150 N samt en kraft med verkningslinjen CD.

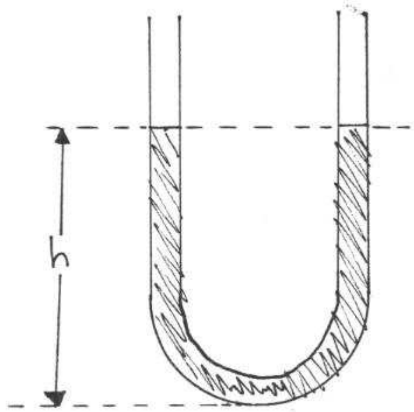
4. Bestäm det maximala böjmomentet i balken när den belastas med en kraftfördelning enligt figuren. (Balkens massa kan försummas.)

5. Bestäm accelerationen för kropparna A och B. (Massorna för rep och trissor samt friktionskrafterna kan försummas.)

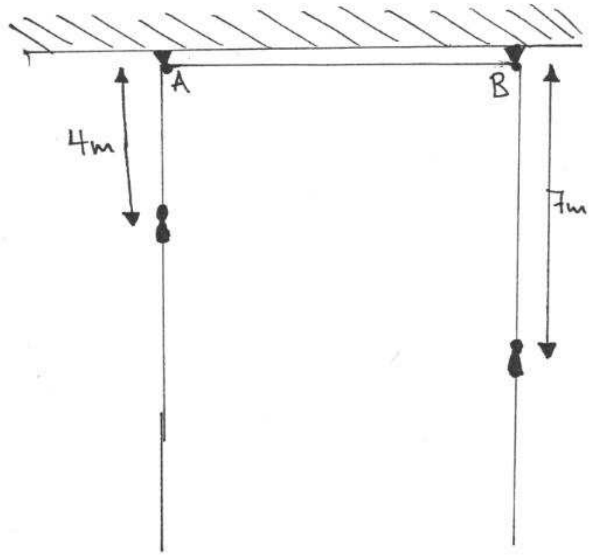
6. Bilen har massan $m$ och hastigheten $v_A$ när den passerar punkt A. Under färden nerför backen, som har lutningen 6% (definierad enligt figuren) och längden $d$, frikopplar föraren motorn och bromsar så att hastigheten när bilen passerar punkt B har minskat till $v_B$. Bilen påverkas även av luftmotståndet, som antas vara givet av en konstant kraft $F$. Beräkna den värmeenergi som har genererats i bromsarna under färden nerför backen.

*Lycka till!*

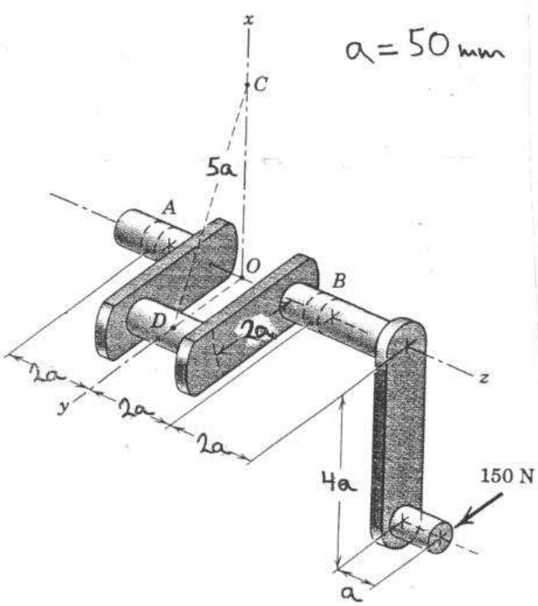
1. a)


h

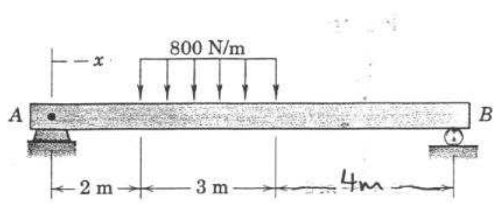
1. b)


A
B
4m
7m

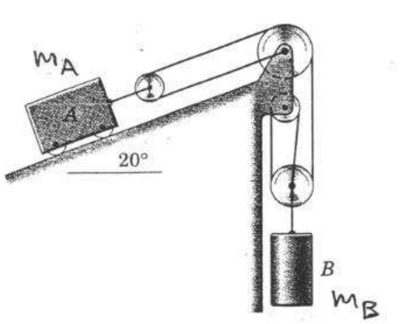
3.


a = 50 mm
x
C
5a
A
O
B
D
2a
z
2a
y
2a
2a
4a
150 N
a

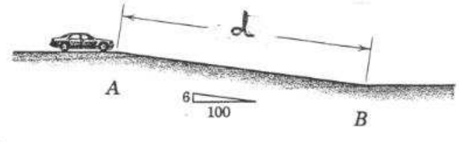
4.


x
800 N/m
A
B
2 m
3 m
4m

5.


mA
A
20°
B
mB

6.


d
A
6
100
B

# Lösningar till tentamen i Mekanik för F del A

14 mars 2003

1. (a) Oljan som tillsätts i den vänstra skänkeln har massan $0.8(\mathrm{g/cm^3}) \cdot 5(\mathrm{cm^3}) = 4$ g och upptar höjden 5 cm. För att jämvikt ska uppnås måste 2 g vatten strömma över till den högra skänkeln, det vill säga att vattennivån i den högra höjs med 2 cm. Samtidigt minskar då vattennivån med 2 cm i den vänstra, men oljans höjd tillkommer. Alltså blir nivåerna 43 cm i den vänstra och 42 cm i den högra.

   (b) Friläggning av aporna och repet ger att *båda* aporna påverkas av *samma* kraft uppåt. Detta innebär i sin tur att hur aporna än klättrar kommer de att röra sig på samma sätt relativt trissorna, alltså kommer den högra apan också att ha klättrat 4 m uppåt när den vänstra klättrat 4 m uppåt. Den högra apan kommer alltså att befinna sig 3 m nedanför B när den vänstra når A, oberoende av deras hastigheter relativt repet.

2. (a) Derivera uttrycket $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ med avseende på tiden. Detta ger att

$$2v\frac{dv}{dt} = 2\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}},$$

   alltså gäller att

$$\frac{dv}{dt} = v^{-1}\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}},$$

   vilket skulle visas.

   (b) Newtons andra lag ger att

$$q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{v}},$$

   vilket insatt i resultatet från (a) ger att

$$\frac{dv}{dt} = \frac{q}{mv}\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0,$$

   vilket skulle visas (kom ihåg att $\mathbf{v} \perp \mathbf{v} \times \mathbf{B}$).

3. En friläggning ger att de krafter som verkar på vevaxeln är

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= F\hat{y} \qquad \text{(pålagd kraft, } F = 150 \text{ N)} \\
\mathbf{A} &= A_x\hat{x} + A_y\hat{y} \qquad \text{(lagerkraft i A)} \\
\mathbf{B} &= B_x\hat{x} + B_y\hat{y} \qquad \text{(lagerkraft i B)} \\
\mathbf{T} &= T\mathbf{n}_{CD} = T\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\hat{x} + \frac{2}{5}\hat{y}\right) \qquad \text{(kraft längs CD)}
\end{aligned}$$

med de koordinataxlar som ges i figuren. Ortsvektorerna (från O) till lämpliga punkter på dessa krafters verkningslinjer är

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\mathrm{F}} &= -4a\hat{x} + 5a\hat{z} \\
\mathbf{r}_{\mathrm{A}} &= -2a\hat{z} \\
\mathbf{r}_{\mathrm{B}} &= 2a\hat{z} \\
\mathbf{r}_{\mathrm{T}} &= 2a\hat{y}.
\end{aligned}$$

Newtons andra lag i $\hat{x}$-led och i $\hat{y}$-led ger att

$$\begin{aligned}
A_x + B_x - \frac{\sqrt{21}}{5}T &= 0 \\
A_y + B_y + F + \frac{2}{5}T &= 0.
\end{aligned}$$

Momentjämvikt kring O ger nu att ($\mathbf{M} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$)

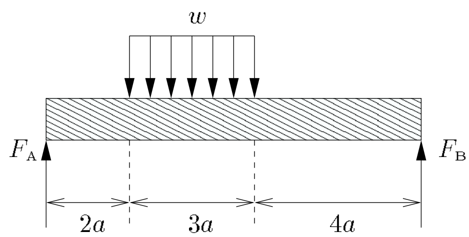
$$\begin{aligned}
-5aF + 2aA_y - 2aB_y &= 0 \qquad (\hat{x}) \\
-2aA_x + 2aB_x &= 0 \qquad (\hat{y}) \\
-4aF + 2a\frac{\sqrt{21}}{5}T &= 0 \qquad (\hat{z}),
\end{aligned}$$

totalt har vi alltså fem ekvationer och fem obekanta. Ekvationssystemet löses enkelt och resultatet blir

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= F\hat{x} + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{\sqrt{21}}\right) F\hat{y} \approx (150\hat{x} + 47.0\hat{y})\ \mathrm{N} \\
\mathbf{B} &= F\hat{x} + \left(-\frac{7}{4} - \frac{2}{\sqrt{21}}\right) F\hat{y} \approx (150\hat{x} - 328\hat{y})\ \mathrm{N},
\end{aligned}$$

oberoende av $a$.

4. Frilägg först *hela* balken för att bestämma stödkrafterna i A och B.



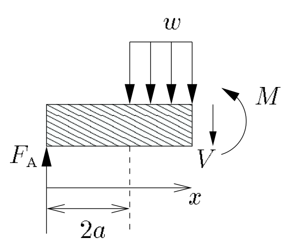

Låt $a = 1$ m och kraftfördelningen $w = 800$ N/m. Momentjämvikt medsols kring A ger att (den resulterande kraften från $w$ ligger mitt i kraftfördelningen)

$$3aw\left(2a + \frac{3a}{2}\right) - 9aF_{\mathrm{B}} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{B}} = \frac{7aw}{6} \approx 933\ \mathrm{N},$$

momentjämvikt medsols kring B ger sedan att

$$-3aw\left(4a + \frac{3a}{2}\right) + 9aF_{\mathrm{A}} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{A}} = \frac{11aw}{6} \approx 1467\ \mathrm{N}.$$

Gör nu ett snitt genom balken i intervallet $2a < x < 5a$ och inför skjuvspänning och moment på vanligt sätt.




Kraftjämvikt för denna del av balken ger nu att

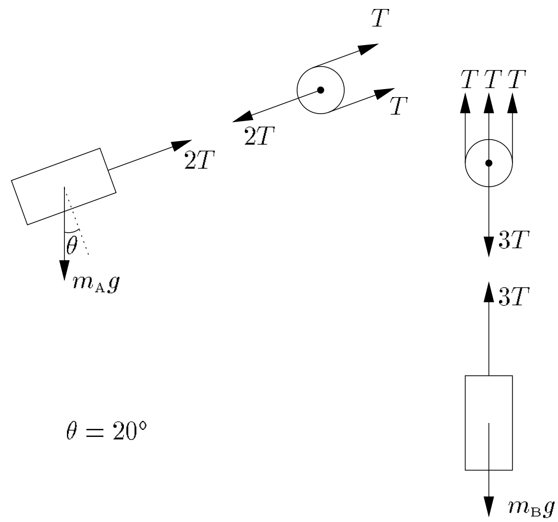
$$F_{\mathrm{A}} - w(x - 2a) - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{23aw}{6} - wx,$$

där vi har använt resultatet ovan för $F_{\mathrm{A}}$. Maximala böjmomentet i balken fås då $V = 0$, alltså vid $x_{\max} = \frac{23a}{6}$, vilket ligger i intervallet. Momentjämvikt medsols kring A för detta $x$ ger nu att ($V = 0$)

$$w(x_{\max} - 2a)\left(\frac{x_{\max} - 2a}{2} + 2a\right) - M = 0,$$

alltså blir det maximala böjmomentet i balken

$$M = \frac{w}{2}(x_{\max} - 2a)(x_{\max} + 2a) = \frac{385}{72}wa^2 \approx 4280\ \mathrm{Nm}.$$




5. Genom friläggning av kropparna och trissorna ser man att om kraften på A från linan är $2T$ måste kraften från linan på B vara $3T$. Observera att trissorna och linorna är masslösa, alltså måste de vara i jämvikt.

   Newtons andra lag för de båda kropparna blir nu (låt $x_{\mathrm{A}}$ vara avståndet från den stora trissan till A, positiv rikting nedåt längs planet, samt $x_{\mathrm{B}}$ avståndet från den stora trissan till B, positiv riktning nedåt)

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{A}} g \sin\theta - 2T &= m_{\mathrm{A}} \ddot{x}_{\mathrm{A}} \\ m_{\mathrm{B}} g - 3T &= m_{\mathrm{B}} \ddot{x}_{\mathrm{B}}, \end{aligned}$$

   kravet att linan ska ha konstant längd ger dessutom det kinematiska tvånget

$$2\ddot{x}_{\mathrm{A}} + 3\ddot{x}_{\mathrm{B}} = 0.$$

   Genom att lösa detta ekvationssystem fås att

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{\mathrm{A}} &= -\frac{6m_{\mathrm{B}} - 9m_{\mathrm{A}}\sin\theta}{9m_{\mathrm{A}} + 4m_{\mathrm{B}}} g \\ \ddot{x}_{\mathrm{B}} &= \frac{4m_{\mathrm{B}} - 6m_{\mathrm{A}}\sin\theta}{9m_{\mathrm{A}} + 4m_{\mathrm{B}}} g. \end{aligned}$$

6. Beteckna den mekaniska energin i punkten A med $E_{\mathrm{A}}$, i punkten B med $E_{\mathrm{B}}$ samt den värmeenergi som förlorats i bromsarna med $Q$. Vi vet att ($\theta = \arctan \frac{6}{100}$)

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{A}} &= \frac{1}{2} m v_{\mathrm{A}}^2 + mgd\sin\theta \\ E_{\mathrm{B}} &= \frac{1}{2} m v_{\mathrm{B}}^2 \end{aligned}$$

   Energikonservering ger att (luftmotståndet utför ett arbete $Fd$)

$$E_{\mathrm{A}} - Fd - Q = E_{\mathrm{B}},$$

   alltså blir värmeenergin i bromsarna

$$Q = E_{\mathrm{A}} - E_{\mathrm{B}} - Fd = \frac{1}{2} m(v_{\mathrm{A}}^2 - v_{\mathrm{B}}^2) + mgd\sin\theta - Fd.$$