Tentamen i Mekanik för F och Kf del A

Kurskod: FFM052.
Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Lördagen den 11 januari 2003 kl 08.45 - 12.45 i V.
Jourhavande assistent: Erik Flink, ankn 3685.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 30 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. En geting med massan 0,43 g är instängd i en lufttät burk, som står på en noggrann laboratorievåg. När getingen sitter på burkens botten visar vågen 178,14 g.

   a) Vad visar vågen när getingen står stilla i luften utan att vidröra burken?

   b) Vad visar vågen när getingen accelererar uppåt med 9,81 m/s^2 utan att vidröra burken? (Luftens rörelse försummas.)

2. De två fjädrarna i den vänstra figuren har fjäderkonstanterna k_1 respektive k_2 och de ospända längderna l_1 respektive l_2. Man vill ersätta dem med en enda fjäder med fjäderkonstanten k och ospända längden l som i den högra figuren. Bestäm k och l uttryckta i k_1, k_2, l_1 och l_2 så att de två systemen blir ekvivalenta.

3. Den homogena stången OC har massan m och kan fritt vrida sig kring O. Fjädern har fjäderkonstanten k och är ospänd när C sammanfaller med A. Bestäm den erforderliga spännkraften T för att konstruktionen skall vara i jämvikt enligt figuren.

4. Bestäm kraften och vridmomentet som verkar på den högra delen av balken i punkten A. (Tyngdkraften på balken försummas.)

5. Ett mynt läggs på en horisontell skiva på avståndet r från centrum. Skivan startar i vila och har därefter den konstanta vinkelaccelerationen $\alpha = \ddot{\theta}$. Den statiska friktionskoefficienten mellan skivan och myntet är μ. Bestäm det antal varv N som skivan hinner vrida sig innan myntet börjar glida.

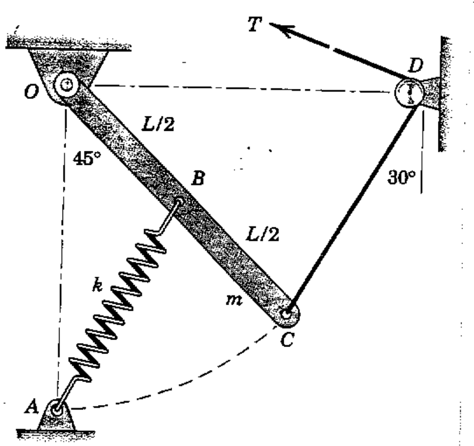
6. De två bilarna kolliderar och fastnar i varandra. Bestäm deras hastighet (till storlek och riktning) omedelbart efter kollisionen.

Lycka till!

2.

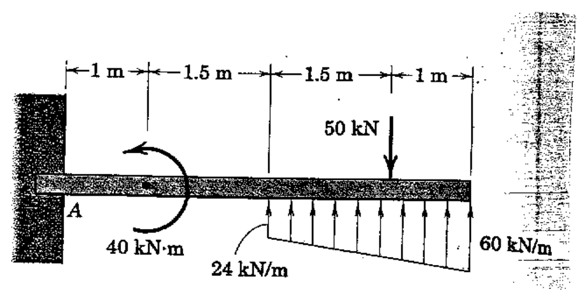
k_1
k_2
L_1
L_2
k
L

3.



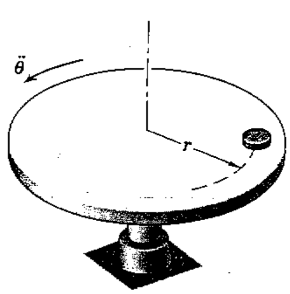
T
D
O
L/2
45°
B
30°
L/2
k
m
C
A

4.



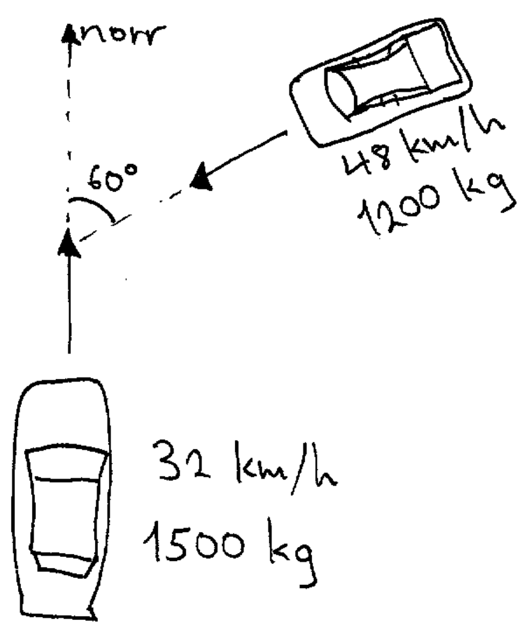
1 m
1.5 m
1.5 m
1 m
50 kN
A
40 kN·m
24 kN/m
60 kN/m

5.



$\ddot{\theta}$
r

6.



norr
60°
48 km/h
1200 kg
32 km/h
1500 kg

Mek A TENTA 030111 MEKANIK FÖR F OCH Kf DEL A

1a) Vågen visar fortfarande 178,14 g eftersom det behövs en kraft $F = m_{geting} \cdot g$ från luften för att hålla getingen stilla. Luften kommer därmed att utöva kraften $F = m_{geting} \cdot g$ på vågen, vilket är samma kraft som getingen utövade på vågen då den satt på burkens botten.

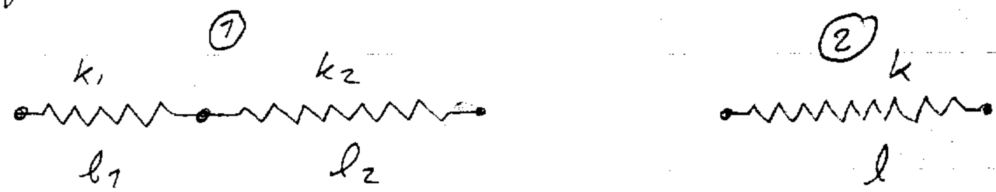
b) Nu tillkommer kraften som behövs för att accelerera getingen, $F_{acc} = m_{geting} \cdot a$ enligt Newtons andra lag.

Vågen visar $178{,}14 \text{ gram} + m_{geting} \frac{a}{g} = 178{,}57 \text{ g}$

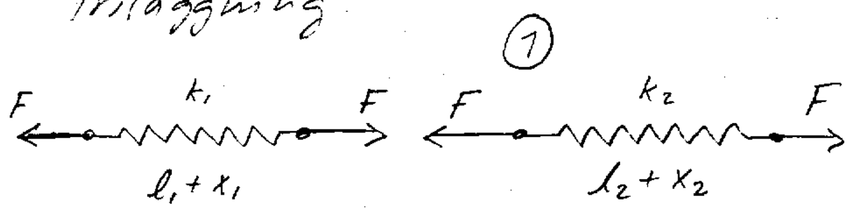
gram

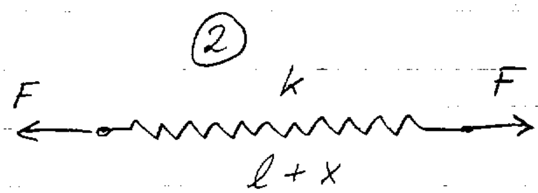
Mek A   TENTA 030111

2) Vill dimensionera k och l så att fjäder ② blir ekvivalent med de två seriekopplade fjädrarna.



Detta innebär att de två systemen ① och ② skall ha samma totala fjäderkonstant.
Välj även $l = l_1 + l_2$.
Låt x_1, x_2 och x vara avvikelserna från jämviktsläget för de tre fjädrarna.
Applicera en kraft F i varje ände av de två systemen. Vi får då följande friläggning





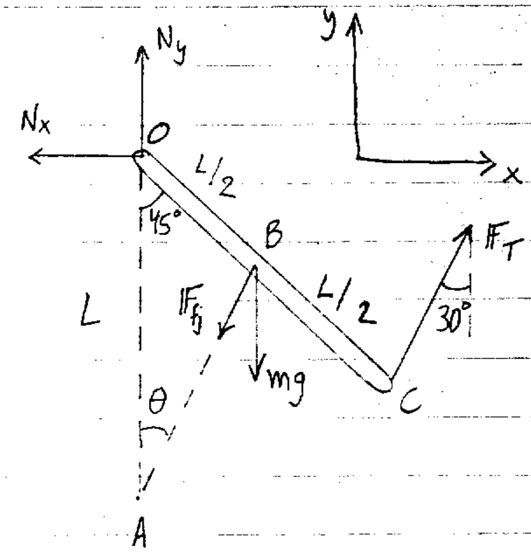
Nu gäller att $F = k_1 x_1 = k_2 x_2 = kx$.
Om system ① och ② är ekvivalenta, så $x = x_1 + x_2$.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow k_1 x_1 = k(x_1 + x_2) \\ \text{Har även att } x_2 = x_1 \dfrac{k_1}{k_2} \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 = k\left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right)$$

$$\Rightarrow k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Mek A TENTA 030111

3) Räkna med moment-jämvikt i O, så behöver vi inte bestämma N_x och N_y.



Våra krafter är

$\vec{mg} = -mg\,\hat{y}$

$\mathbb{F}_T = T(\sin 30^\circ\,\hat{x} + \cos 30^\circ\,\hat{y}) =$
$= \frac{T}{2}(\hat{x} + \sqrt{3}\,\hat{y})$

$\mathbb{F}_{fj} = kx(-\sin\theta\,\hat{x} - \cos\theta\,\hat{y})$, $x = \overline{AB} - \frac{L}{2}$

Dessa ger upphov till momenten (kring O)

$M_0 = \vec{OB} \times (\mathbb{F}_{fj} + \vec{mg}) + \vec{OC} \times \mathbb{F}_T = \vec{OB} \times (\mathbb{F}_{fj} + \vec{mg} + 2\mathbb{F}_T) = 0$

där $\vec{OB} = \frac{L}{2}(\sin 45^\circ\,\hat{x} - \cos 45^\circ\,\hat{y}) = \frac{L}{2\sqrt{2}}(\hat{x} - \hat{y})$

$\Rightarrow M_0 = +\hat{z}\,\frac{L}{2\sqrt{2}}\left(+(\mathbb{F}_{fj})_x + (\mathbb{F}_{fj})_y + (\vec{mg})_x + (\vec{mg})_y + 2(\mathbb{F}_T)_x + 2(\mathbb{F}_T)_y\right)$

$= +\frac{L}{2\sqrt{2}}\left(-kx(\sin\theta + \cos\theta) - mg + T(+1+\sqrt{3})\right)\hat{z} = 0$

$\Rightarrow T = \frac{1}{\sqrt{3}+1}\left(mg + k\left(\overline{AB} - \frac{L}{2}\right)(\sin\theta + \cos\theta)\right)$

Behöver $\overline{AB}$ och θ:

Cosinussatsen $\Rightarrow$ $\overline{AB}^2 = L^2 + (L/2)^2 - 2L\frac{L}{2}\cos 45^\circ$

$\Rightarrow \overline{AB} = \frac{L}{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$

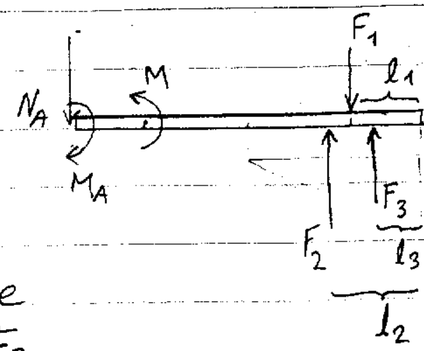
Sinussatsen $\Rightarrow$ $\sin\theta = \frac{L}{2} \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\overline{AB}} = \frac{1}{\sqrt{10 - 4\sqrt{2}}}$

$\Rightarrow \theta \approx 28{,}675^\circ$

Vi får nu $T = 0{,}366\,mg + 0{,}1176\,kL$

Mek A TENTA 030111

4) Frilägg balken



Ersätt den rektangulära delen av den distribuerade lasten med en kraft F_2 som angriper $l_2 = 2{,}5/2\ m = 1{,}25\ m$ från höger ände och den triangulära delen av lasten med en kraft F_3 som angriper $l_3 = \frac{1}{3} \cdot 2{,}5\ m = 0{,}833\ m$ från höger ände.

$F_2 = 24 \cdot 2{,}5\ kN = 60\ kN$; $F_3 = \frac{60-24}{2} \cdot 2{,}5\ kN = 45\ kN$

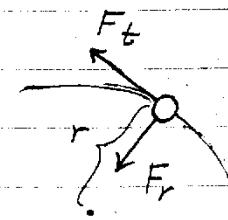
Kraftjämvikt ger $N_A = -F_1 + F_2 + F_3 = \underline{55\ kN}$.

Momentjämvikt ger

$$M_A = M - F_1(l - l_1) + F_2(l - l_2) + F_3(l - l_3) =$$
$$= \underline{252{,}5\ kNm}$$

Mek A TENTA 030111

5) Frilägg myntet



Newtons andra lag ger

- i tangentiell led

$$F_t = m\alpha r$$

- i radiell led

$$F_r = m r \omega^2$$

Vi behöver således ω.

Använd att $\alpha\, d\theta = \dot\theta\, d\dot\theta$ och integrera båda sidorna. Efter N varv har myntet färdats vinkeln $2\pi N$ (radianer)

Vi får $$\int_0^{2\pi N} \alpha\, d\theta = \int_0^{\omega} \dot\theta\, d\dot\theta$$

$$\Rightarrow 2\pi N \alpha = \frac{1}{2}\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = 4\pi N \alpha$$

Den totala kraften på myntet efter N varv är alltså

$$F = \sqrt{F_t^2 + F_r^2} = \sqrt{(m\alpha r)^2 + (m r 4\pi N \alpha)^2} =$$

$$= m\alpha r \sqrt{1 + (4\pi N)^2}$$

När denna kraft blir större än den maximala friktionskraften $\mu m g$ börjar myntet att glida.

$$\therefore\ m\alpha r \sqrt{1 + (4\pi N)^2} = \mu m g$$

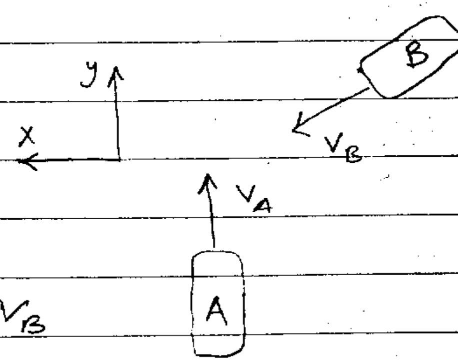
$$\Rightarrow N = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\left(\frac{\mu g}{\alpha r}\right)^2 - 1}$$

Ser att om $\mu g < \alpha r$ börjar myntet att glida direkt.

Mek A TENTA 030111

6) Rörelsemängden är bevarad i både x- och y-led.

Före:



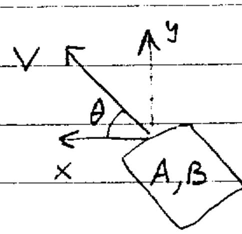
x-led:

$p_x = m_B v_B \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} m_B v_B$

y-led:

$p_y = m_A v_A - m_B v_B \cos 60^\circ = m_A v_A - \frac{1}{2} m_B v_B$

Efter:



x-led:

$\tilde{p}_x = v_x (m_A + m_B)$

y-led:

$\tilde{p}_y = v_y (m_A + m_B)$

$$p_x = \tilde{p}_x \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} m_B v_B = (m_A + m_B) v_x$$

$$\Rightarrow v_x = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m_B v_B}{m_A + m_B} \approx 18{,}475 \text{ km/h}$$

$$p_y = \tilde{p}_y \Rightarrow m_A v_A - \frac{1}{2} m_B v_B = (m_A + m_B) v_y$$

$$\Rightarrow v_y = \frac{m_A v_A - \frac{1}{2} m_B v_B}{m_A + m_B} \approx 7{,}111 \text{ km/h}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{v} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \underline{19{,}80 \text{ km/h}}$$

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \underset{\sim}{\theta} = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \underline{21{,}05^\circ}$$