Tentamen i Mekanik för F och Kf del A

Examinator: Måns Henningson.
Tid och plats: Fredagen den 15 mars 2002 kl 14.15 - 18.15 i V.
Jourhavande assistent: Erik Flink, ankn 3685.
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. (Deluppgifterna i uppgift 1 ger vardera 5 poäng.) Gränsen för godkänt är 30 poäng.
Tänk på att lösningarna måste vara presenterade på ett klart och tydligt sätt. Rita korrekta figurer där det klart framgår till exempel vilket koordinatsystem som används. Alla övriga införda beteckningar skall också förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Bara formler utan förklarande text är inte acceptabelt.

De kvalitativa uppgifterna 1 a) och b) kräver inte några längre räkningar. Teoriuppgiften 2 skall behandlas i ett allmänt fall utan några extra antaganden. Räkneuppgifterna 3 - 6 är inte ordnade efter svårighetsgrad.

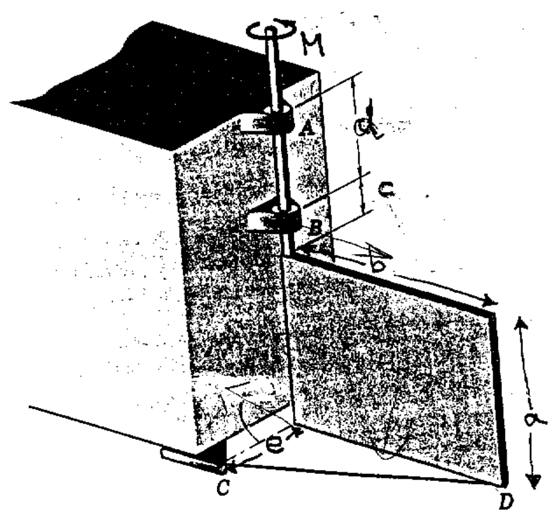
1. a) En pråm lastad med järnskrot ligger i en sluss med stängda portar. Hur påverkas vattenytans läge om man slänger skrotet överbord? Förklara!

   b) Jorden angrips av en gravitationskraft som är riktad mot solen. Ändå är medelavståndet mellan jorden och solen i stort sett oförändrat sedan urminnes tider. Hur går detta ihop med Newtons andra lag?

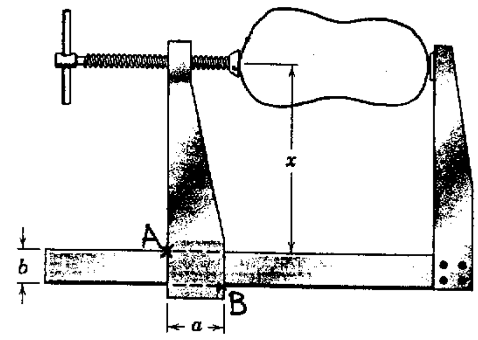
2. Ett kraftsystem består av ett antal krafter $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$ med angreppspunkter med ortsvektorer $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ med avseende på en punkt A. Kraftsumman är $\mathbf{R}$ och vridmomentet med avseende på A är $\mathbf{M}_A$. Uttryck kraftsystemets vridmoment $\mathbf{M}_B$ med avseende på en annan punkt B med hjälp av $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_A$ och vektorn $\mathbf{r}_{AB}$ från A till B.

3. Den homogena plattan har massan $m = 15$ kg och är fast förbunden med den vertikala axeln, som är fritt vridbar. Axeln påverkas av ett yttre vridmoment $M = 120$ Nm. Konstruktionens tyngd upptas helt av lager A. Bestäm storleken av den kraft som verkar på lager B från axeln.

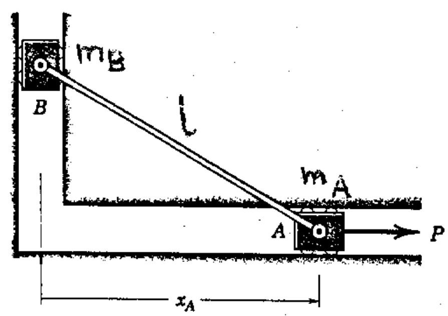
$$\begin{cases} a = 400 \text{ mm} \\ b = 600 \text{ mm} \\ c = 80 \text{ mm} \\ d = 200 \text{ mm} \\ e = 200 \text{ mm} \end{cases}$$



4. Avstånden a och b och den statiska friktionskoefficienten μ_s mellan skruvtvingens två delar är givna. Bestäm det minsta värdet på avståndet x för att man skall kunna spänna fast en kropp enligt figuren utan att glidning sker. (Bortse från tyngdkraften. Observera att när man spänner skruvtvingen så står de två delarna bara i kontakt med varandra i punkterna A och B.)

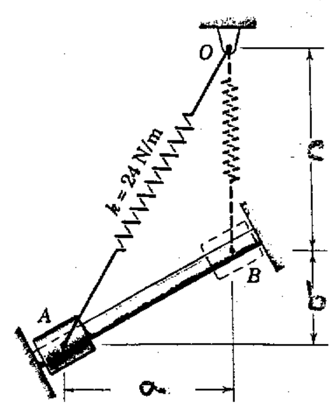


5. I det ögonblick som återges i figuren har kroppen med massan m_A hastigheten v_A riktad åt höger. Bestäm dess momentana acceleration om den då angrips av en yttre kraft med storleken P. (Bortse från friktionen och stångens massa. All rörelse sker i ett horisontalplan, d v s tyngdkraften spelar inte någon roll i problemet.)



6. Fjädern har vilolängden $l = 375$ mm. Hylsan har massan $m = 0,9$ kg och släpps i vila i läge A. Bestäm dess fart när den når läge B. (Bortse från friktionen. All rörelse sker i ett vertikalplan.)

$$\begin{cases} a = 450 \text{ mm} \\ b = 250 \text{ mm} \\ c = 500 \text{ mm} \end{cases}$$



Lycka till!

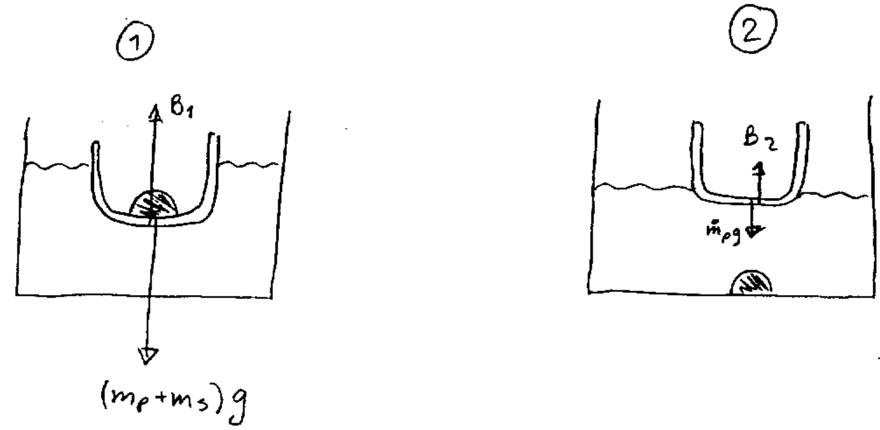
1) Kalla prämens massa, m_p

skrotmassan, m_s

skrotets densitet, ρ_s

skrotets volym, $V_s = \frac{m_s}{\rho_s}$

vattnets densitet, ρ_v



① Lyftkraften från vattnet, $B_1 = (m_p + m_s)\,g$

$\Rightarrow$ undanträngd volym vatten V_1: $\rho_v V_1 = m_p + m_s$

② Lyftkraften från vattnet, $B_2 = m_p g$

$\Rightarrow$ undanträngd volym vatten V_2: $\rho_v V_2 = \rho_v V_s + m_p =$

$$= \rho_v \frac{m_s}{\rho_s} + m_p$$

$$\Rightarrow V_1 - V_2 = m_s \left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_s} \right)$$

$$\rho_s > \rho_v \quad \Rightarrow \quad V_1 > V_2$$

$\Rightarrow$ Vattennivån sjunker!

Mek A   TENTA 020315

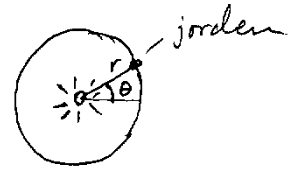
1b) Vid cirkelrörelse finns (bara) en acceleration i radiell led, $a_r = -\frac{v^2}{\rho}$, v = fart

ρ = cirkelns radie

Avståndet mellan jorden och solen är dock oförändrat, ty centralkraften $F = m_J a_r$ ger ej upphov till någon hastighet i radiell led. Kraften ser istället till att hålla kvar jorden i dess omloppsbana. Newtons andra lag är ej bruten.

Kom ihåg: I polära koordinater ges accelerationen i radiell led av

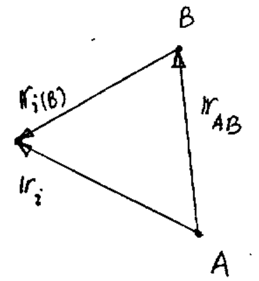
$$a_r = \ddot{r} - \underbrace{r\dot{\theta}^2}_{= \frac{v^2}{\rho} \text{ ovan}}$$



Så även om $\ddot{r} = 0$ och $\dot{r} = 0$ finns det en acceleration i negativ radiell led.

Mek A   TENTA 020315

2) $\mathbb{M}_A = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{r}_i \times \mathbb{F}_i$



Ur figuren fås, $\mathbb{r}_{i(B)} = -\mathbb{r}_{AB} + \mathbb{r}_i$

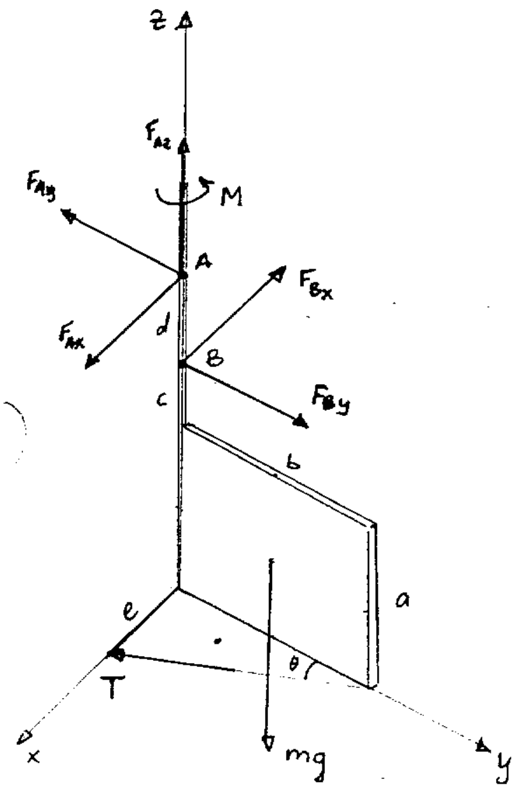
$$\Rightarrow \mathbb{M}_B = \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{r}_i - \mathbb{r}_{AB}) \times \mathbb{F}_i =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{r}_i \times \mathbb{F}_i}_{= \mathbb{M}_A} - \mathbb{r}_{AB} \times \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{F}_i}_{= \mathbb{R}} = \mathbb{M}_A - \mathbb{r}_{AB} \times \mathbb{R}$$

$$\therefore \quad \mathbb{M}_B = \mathbb{M}_A - \mathbb{r}_{AB} \times \mathbb{R}$$

3) Låt $h \equiv a+c+d$

$$\sin\theta = \frac{e}{\sqrt{b^2+e^2}} \;;\; \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2+e^2}}$$



Momentjämvikt kring A i z-led:

$$M - eT\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow T = \frac{M\sqrt{b^2+e^2}}{be} \quad (= 632{,}456\ \text{N})$$

Momentjämvikt kring A i x-led:

$$-\frac{b}{2}mg + d\cdot F_{By} - h\cdot T\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow F_{By} = \frac{b}{2d}mg + \frac{h}{d}\frac{M\cancel{\sqrt{b^2+e^2}}}{\cancel{b}e}\cdot\frac{\cancel{b}}{\cancel{\sqrt{b^2+e^2}}} =$$

$$= \frac{b}{2d}mg + \frac{h}{de}M \quad (= 2260{,}73\ \text{N})$$

Momentjämvikt kring A i y-led:

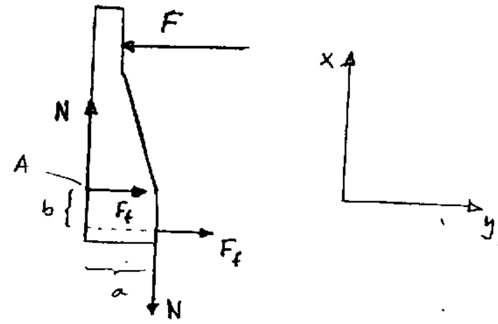
$$-h\cdot T\sin\theta + dF_{Bx} = 0$$

$$\Rightarrow F_{Bx} = \frac{h}{d}\cdot\frac{M\cancel{\sqrt{b^2+e^2}}}{b\cancel{e}}\cdot\frac{\cancel{e}}{\cancel{\sqrt{b^2+e^2}}} = \frac{h}{bd}M \quad (= 680\ \text{N})$$

Den totala kraften $F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} =$

$$= \sqrt{\left(\frac{hM}{bd}\right)^2 + \left(\frac{bmg}{2d} + \frac{hM}{de}\right)^2} = 2360{,}78\ \text{N}$$

4) Precis innan glidning inträffar så är $F_f = \mu_s N$.



Kraftjämvikt i x-led ger att att de båda normalkrafterna är lika stora och motriktade.

Momentjämvikt kring A :

$$\curvearrowright : \quad -x \cdot F + a \cdot N - b \cdot F_f = 0$$

$$\Rightarrow \quad aN - b\mu_s N = xF$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{xF}{a - b\mu_s}$$

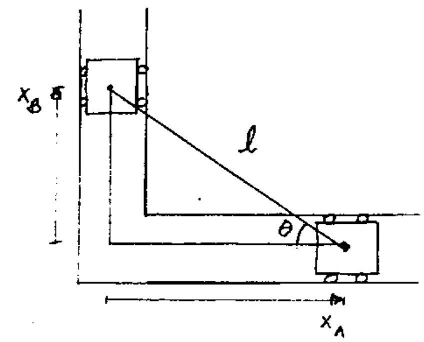
Kraftjämvikt i y-led :

$$\Rightarrow \quad 2F_f = F \quad , \text{ där } F_f = \mu_s N = \frac{\mu_s x F}{a - b\mu_s}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\mu_s x \cancel{F}}{a - b\mu_s} = \cancel{F} \qquad \Rightarrow \quad x = \frac{a - b\mu_s}{2\mu_s} = \frac{a}{2\mu_s} - \frac{b}{2}$$

Svar: För $x \geq \dfrac{a}{2\mu_s} - \dfrac{b}{2}$ sker ingen glidning.

5) Ta först fram ett samband mellan kropparnas accelerationer:



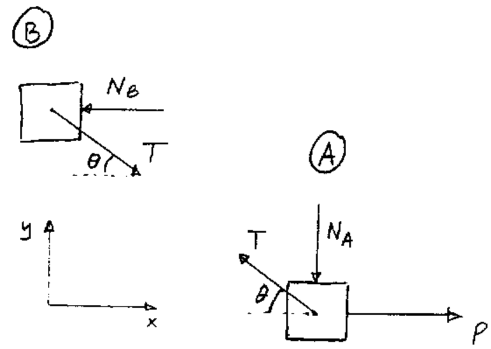
Pythagoras sats $\Rightarrow x_B = \sqrt{l^2 - x_A^2}$

$$\frac{d}{dt}: \quad \dot{x}_B = \frac{-x_A \dot{x}_A}{\sqrt{l^2 - x_A^2}}$$

$$\frac{d}{dt}: \quad \ddot{x}_B = \frac{(-x_A\ddot{x}_A - \dot{x}_A^2)\sqrt{l^2 - x_A^2} - x_A\dot{x}_A \cdot x_A\dot{x}_A / \sqrt{l^2 - x_A^2}}{l^2 - x_A^2} =$$

$$= \frac{-l^2\dot{x}_A^2 + x_A\ddot{x}_A(x_A^2 - l^2)}{(l^2 - x_A^2)^{3/2}}$$

Frilägg båda kropparna:



Newtons 2:a lag för kropp B:

$$\uparrow: \; -T\cdot\sin\theta = m_B\ddot{x}_B$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{l^2 - x_A^2}}{l} \; ; \; \cos\theta = \frac{x_A}{l}$$

$$\Rightarrow T = -\frac{m_B l}{\sqrt{l^2 - x_A^2}}\cdot\ddot{x}_B = m_B l \; \frac{l^2\dot{x}_A^2 + x_A\ddot{x}_A(l^2 - x_A^2)}{(l^2 - x_A^2)^2}$$

Newtons 2:a lag för kropp A:

$$\longrightarrow: \; P - T\cos\theta = m_A\ddot{x}_A$$

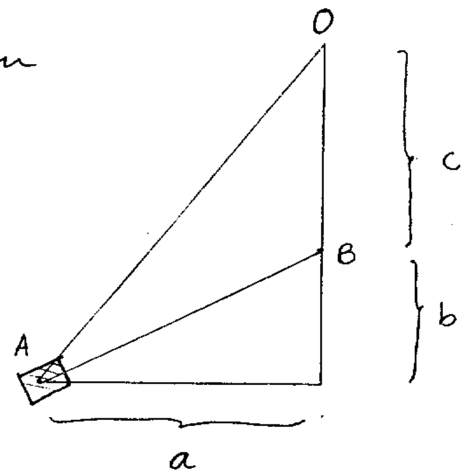
$$\Rightarrow m_A\ddot{x}_A = P - \frac{m_B l^3 \dot{x}_A^2}{(l^2 - x_A^2)^2}\cdot\frac{x_A}{l} - \frac{m_B \cancel{l} x_A\ddot{x}_A}{l^2 - x_A^2}\cdot\frac{x_A}{\cancel{l}} \quad , \; \dot{x}_A \equiv V_A$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_A = \frac{1}{m_A + m_B\frac{x_A^2}{l^2 - x_A^2}}\left(P - \frac{m_B l^2 x_A V_A^2}{(l^2 - x_A^2)^2}\right)$$

Mek A TENTA 020315

6) Avståndet $\overline{OA} = \sqrt{a^2+(b+c)^2}$

Systemets totala energi då massan befinner sig i läge A:



$$E_A = E_A^{kin} + E_A^{grav} + E_A^{fjäder} =$$

$$= 0 + 0 + \frac{k}{2}\left(\overline{OA} - \ell\right)^2 =$$

$$= \frac{k}{2}\left(\sqrt{a^2+(b+c)^2} - \ell\right)^2$$

Totala energin i B:

$$E_B = E_B^{kin} + E_B^{grav} + E_B^{fjäder} =$$

$$= \frac{mv_B^2}{2} + mgb + \frac{k}{2}\left(c-\ell\right)^2$$

Systemets totala energi är bevarad:

$$\Rightarrow E_A = E_B$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2}\left(\sqrt{a^2+(b+c)^2} - \ell\right)^2 = \frac{mv_B^2}{2} + mgb + \frac{k}{2}(c-\ell)^2$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{k}{m}\cdot\left[\left(\sqrt{a^2+(b+c)^2}-\ell\right)^2 - (c-\ell)^2\right] - 2gb} =$$

$$= 1{,}15563 \text{ m/s}$$