1 ?

Tentamen i Mekanik F del A FFM052

Tid och plats: Lördagen den 12 januari 2002 kl 8.45 - 12.45 i M.
Jourhavande assistent: Henrik Larsson, ankn 3184.
Hjälpmedel: Valfria tabellsamlingar, valfri räknedosa samt egenhändigt skriven A4-sida.
Lösningarna anslås på institutionens anslagstavla i trapphuset samt på entrédörren omedelbart efter skrivningens slut.
Poängberäkning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För betyg 3, 4 och 5 krävs 30, 40 respektive 50 poäng.
Tänk på att rita figur i förekommande fall, förklara införda storheter, motivera ekvationer och avsluta varje uppgift med ett tydligt svar. Gör dimensionsanalys. Även ofullständiga lösningar kan poängsättas.

1. a) Svängningstiden för en matematisk pendel vid *små* utslagsvinklar är som bekant $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, där g är tyngdaccelerationen och l är pendelns längd. Ökar eller minskar svängningstiden om utslagsvinkeln ökas? (5 p)

   b) Om man släpper en ihålig blykula och en massiv aluminiumkula med samma radie och massa så faller de som bekant lika fort. Vilken rullar fortast utför ett lutande plan? (5 p)

2. En kropp påverkas av krafterna $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ som angriper i punkter med ortsvektorerna $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ relativt origo O. Situationen är sådan att kroppen är i jämvikt, det vill säga den totala kraften och det totala vridmomentet med avseende på O är båda lika med noll. Visa att det totala vridmomentet med avseende på en godtycklig punkt O' (som har ortsvektorn $\mathbf{R}$ med avseende på O) också är lika med noll.

3. En trappstege består av två homogena sidor som vardera har längden 150 cm och massan 5 kg samt ett tvärstag med längden 40 cm och försumbar massa. Delarna är fästa vid varandra med friktionsfria gångjärn så att konstruktionen från sidan ser ut som bokstaven A. Toppvinkeln (d v s vinkeln mellan de två sidorna) är 40^0. Beräkna spänningen (enhet N) i tvärstaget när trappstegen står på ett mycket glatt golv och en person som väger 75 kg står högst upp.

4. Efter ett lätt slag glider en ishockeypuck 14 m under 4 s innan den stannar. Bestäm friktionskoefficienten mellan pucken och isen.

Vänd!

5. En alfapartikel med massan m skjuts med hastigheten $\mathbf{v}$ mot en guldatom med massan M i vila. Efter stöten, som är elastisk, har alfapartikeln en hastighet $\mathbf{v}'$ som bildar vinkeln 30^o med $\mathbf{v}$. Bestäm farten $v' = |\mathbf{v}'|$.

6. En homogen stång med längden b och massan m är horisontellt upphängd i sina ändpunkter med två vertikala masslösa linor med längden l. Linorna är fästa i två fixa punkter på samma höjd och på avståndet b från varandra. Systemet kan utföra en svängningsrörelse kring detta jämviktsläge genom att stången vrider sig fram och tillbaka kring en vertikal axel genom sin mittpunkt och samtidigt rör sig upp och ner så att linorna hela tiden är sträckta.

   a) Bestäm systemets potentiella energi U som funktion av stångens vridningsvinkel ϕ relativt jämviktsläget. (Sätt $U = 0$ då $\phi = 0$.) (5 p)

   b) Bestäm systemets kinetiska energi K med antagandet att vridningsvinkeln ϕ är liten. (Detta betyder att det är tillåtet att försumma den kinetiska energin för den vertikala translationsrörelsen jämfört med den kinetiska energin för rotationsrörelsen.) Bestäm sedan periodtiden för små svängningar kring jämviktsläget. (*Ledning:* En harmonisk oscillator med $U = \frac{1}{2}kx^2$ och $K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$ har periodtiden $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$.) (5 p)

Lycka till!

Tentamen i Mekanik F del A 020112

Lösningsskiss med svar.

Uppgift 1a

SVAR: Vid stora vinklar så kommer svängningstiden att öka, ty $\sin\phi << \phi$, dvs approximationen $\sin\phi \sim \phi$ skulle ge en för liten svängningstid.

Uppgift 1b

SVAR: Den massiva kulan rullar snabbast ty den ihåliga kulan har ett större tröghetsmoment.

Uppgift 2

Givet: $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$ och $\sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i = 0$, där $\tau_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ med avseende på origo O. Tröghetsmomentet är nu med avseende på O' (O och O' är relaterade med den konstanta ortsvektorn $\vec{R}$), vilket ger att man har krafterna $\vec{F}_i$ och ortsvektorer $\vec{r}_i'$. Detta ger att

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i' = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i - \vec{R}) \times \vec{F}_i = 0 - \vec{R} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \ . \qquad (1)$$

SVAR: Se ovan.

Uppgift 3

Pga symmetri räcker det med att studera endast den ena sidan. Vi börjar med att sätta upp kraftekvationer i x och y led, samt att det ska vara momentjämvikt. F är kraften från tvärsteget (dvs den kraft vi söker), N är normalkraften från backen, α är vinkel mellan sidan och golvet dvs $\alpha = 90^o - 20^o = 70^o$. F_1 är kraften från den andra sidan högst upp. $L = 0.4m$, $L_1 = 1.5m$, $M = 75$ kg och $m = 5$ samt L_2 är höjden från golvet till tvärsteget. Detta ger följande kraft och momentekvationer:

$$\begin{aligned} x: &\quad F - F_1 = 0 \\ y: &\quad N - \frac{Mg}{2} - mg = 0 \qquad (2) \\ \text{Momentekvation}: &\quad \frac{mgL_1}{2}\cos\alpha + \frac{MgL_1}{2}\cos\alpha - F_1 L_1 \sin\alpha - FL_2 = 0 \ , \end{aligned}$$

Insättning av x-ekvationen i momentekvationen ger

$$F = \frac{gL_1(M+m)\cos\alpha}{2(L_1\sin\alpha - L_2)} \ . \qquad (3)$$

Mha trigometri ser man att $L_1 \sin\alpha - L_2 = \frac{L}{2}\tan\alpha$, vilket ger att

$$F = \frac{gL_1(M+m)(\cos\alpha)^2}{L\sin\alpha} = 367\text{N} \ . \qquad (4)$$

SVAR: $F = 367$ N.

Uppgift 4

Givet: $S = 14$ m och $t = 4$ s. Friktionskraften på pucken är $F = -\mu mg$. Vilket ger att totala friktionsenergin är $E_f = \mu mgS$. Från början var energin $E_b = \frac{mv_0^2}{2}$. $E_f = E_b$ ger

$$\frac{v_0^2}{2} = \mu gS \ . \tag{5}$$

Använder nu att $F = ma = \frac{dv}{dt}m = -\mu mg$. Integration ger

$$v_0 = \mu gt \ . \tag{6}$$

Insättning av ekvationen ovan ger nu följande friktionskoefficient

$$\mu = \frac{2S}{gt^2} = 0.18 \ . \tag{7}$$

SVAR: Friktionskoefficienten är $\mu = 0.18$.

Uppgift 5

Sökt $v' =| \vec{v}' |$. Vi använder att energin och rörelsemängden är bevarade. Detta ger:

$$\begin{aligned} P_{fx} &= mv_x \ , \quad v_x =| \vec{v} | \ , \quad P_{fy} = 0 \ , \\ P_{ex} &= mv' \cos\alpha + Mv_{2x} \ , \quad \alpha = 30^o \quad P_{ey} = mv' \sin\alpha + Mv_{2y} \ , \quad (8) \\ E_f &= \frac{mv_x^2}{2} \ , \quad E_e = \frac{mv'^2}{2} + \frac{m(v_{2x}^2 + v_{2y}^2)}{2} \ . \end{aligned} \tag{9}$$

$E_f = E_e$, $P_{fx} = P_{ex}$ och $P_{fy} = P_{ey}$ samt lite räknande ger att

$$v' = \frac{v_x}{M+m}\left(m\cos\alpha + \sqrt{M^2 - m^2(1-(\cos\alpha)^2)}\right) \ . \tag{10}$$

SVAR: Farten blir $v' = \frac{v_x}{M+m}\left(m\cos\alpha + \sqrt{M^2 - m^2(1-(\cos\alpha)^2)}\right)$.

Uppgift 6a

Sökt: Potentiella energin $U(\phi)$. Där ϕ är stångens vridningsvinkel. Som vanligt är $U = mgh$ där höjden h är en funktion av vridningsvinkel. Höjden ges av

$$h = \ell(1 - \sqrt{1 - \ell_2^2/\ell^2}) \ , \quad \ell_2 = b\sin(\phi/2) \ . \tag{11}$$

Detta ger att den potentiella energin är

$$U(\phi) = mg\ell(1 - \sqrt{1 - (b^2/\ell^2)[\sin(\phi/2)]^2}) \ . \tag{12}$$

SVAR: $U(\phi) = mg\ell(1 - \sqrt{1 - (b^2/\ell^2)[\sin(\phi/2)]^2})$.

Uppgift 6b

Sökt: kinetiska energin för små vinklar samt periodtiden T. Små vinklar ger att rörelsen i vertikalled kan försummas då den kinetiska energin K beräknas. Detta ger att

$$K = \frac{I\dot{\phi}^2}{2} , \quad I = \frac{1}{12} m b^2 . \qquad (13)$$

Vi använder nu att den totala energin $E = K + U$ är konstant, dvs $\frac{dE}{dt} = 0$. Detta medför att vi får följande svängningsekvation:

$$\ddot{\phi} + \frac{3g}{\ell}\phi = 0 . \qquad (14)$$

Notera att

$$U \approx \frac{mgb^2\phi^2}{8\ell} , \qquad (15)$$

för små vinklar. Ekvation (14) ger nu att $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{3g}}$.

SVAR Periodtiden blir $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{3g}}$ medans den kinetiska energin blir $K = \frac{mb^2\dot{\phi}^2}{24}$.