Lv 1

Mekanik 1

Med Måns Henningson

kraft, skalärer, vektorer, verkningslinje ...

Kraftsystem

skalärprodukt
vektorprodukt
$\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$
vridmoment
kraftpar

ekvivalenta kraftsystem

Mekanik = läran om sambandet mellan materiella kroppars växelverkan med varandra och deras rörelse.

Några kända mekaniker

hette	levde	gjorde	sade
Archimedes	300-talet f.Kr.	badade, skruv, hävstång	Heureka!
Galileo	1564–1642	fallrörelse, pendel	och likväl rör hon sig
Newton	1642–1727	gravitation, kraftbegreppet	I have been standing on the shoulders of giants
Einstein	1879–1955	relativitetsteorin	Gud spelar inte tärning
Bohr	1885–1961	kvantfysik	den som inte blir illa berörd av kvantfysik har inte förstått den
Hawking	1942–	svarta hål	

Tabell 1.

I mekaniken representerar vi påverkan på en "materiell kropp" (från andra kroppar) genom krafter.

En kraft är alltså en matematisk modell för vissa aspekter av yttre påverkan. En kraft specificeras av sin kraftvektor och sin angreppspunkt.

Vi skiljer noga mellan fysikaliska storheter som är

- skalärer: specificeras av ett enda tal (storlek) Ex. tid, massa, energi, temperatur.
- vektorer: " storlek (som är en skalär) och riktning i rummet.
  Ex. kraft, acceleration, hastighet, ...

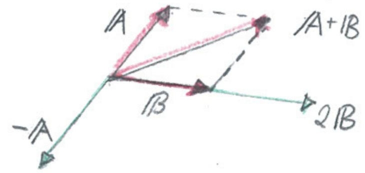
Beteckningar: $\mathbb{F}$, $\mathbf{F}$, $\bar{F}$, $\vec{F}$. Storlek av $\mathbb{F}$ är $F = |\mathbb{F}|$

Vektorer kan multipliceras med skalärer samt adderas med varandra, dvs. vi kan bilda linjärkombinationer av vektorer.

ex: $\mathbb{F} = \alpha \mathbb{P} + \beta \mathbb{T}$

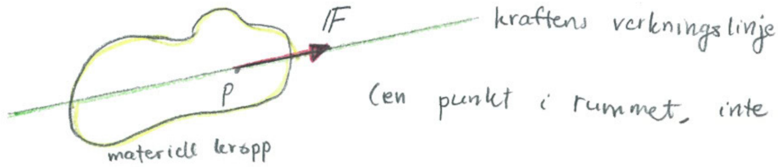
skalära koefficienter

Addition representeras grafiskt enl. nedan:



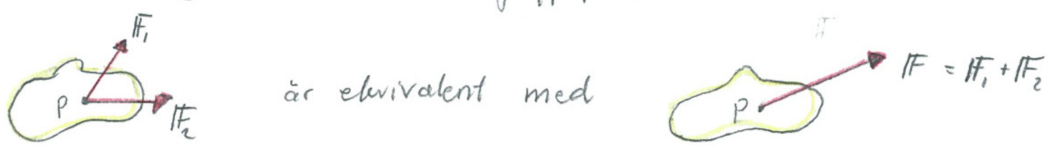
Observera att en vektor i sig inte är lokaliserad till en viss plats i rummet.

Men en kraft är även specifierad av sin angreppspunkt



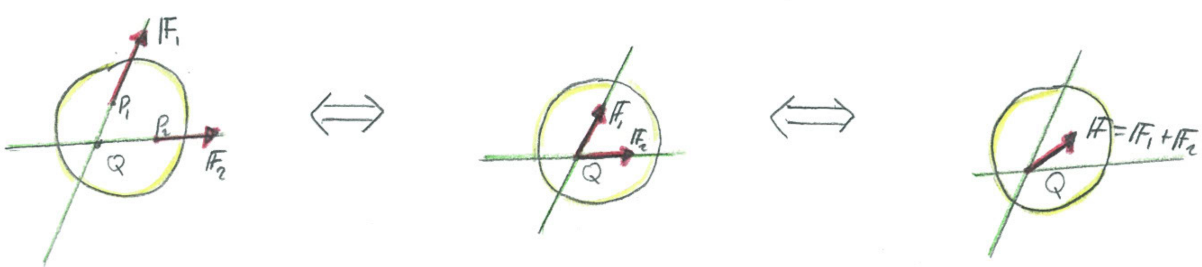
(en punkt i rummet, inte en skalär)

Flera krafter med samma angreppspunkt kan ersättas med en enda kraft (summan) med samma angreppspunkt.



Om kraften angriper en stel kropp så kan dess angreppspunkt förskjutas längs med verkningslinjen och ändå ge samma påverkan.

Dette kan användas för att förenkla ett givet system av krafter som verkar på en stel kropp.



Tisdag 2010-01-19

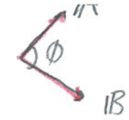
Kraftsystem

Kan man multiplicera två vektorer $\mathbb{A}$ och $\mathbb{B}$?

Ja, på två sätt: Skalärprodukt (dot product) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ är en skalär

$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = |\mathbb{A}||\mathbb{B}| \cos \phi$

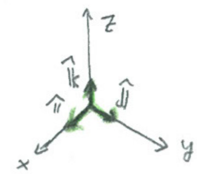
<u>Vektorprodukt</u> (cross product) $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ är en vektor



$$|\mathbb{A} \times \mathbb{B}| = |\mathbb{A}||\mathbb{B}| \sin\phi$$

$\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ är vinkelrät mot $\mathbb{A}$ och mot $\mathbb{B}$, $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ och $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ är ett högersystem

Ofta inför man en HON-bas (höger-ortonormerad) i rummet $\hat{\mathbb{i}}, \hat{\mathbb{j}}, \hat{\mathbb{k}}$ (eller $\mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k}$)
Dessa är alltså inbördes ortogonala enhetsvektorer.
Om man har infört ett Cartesiskt x, y, z koordinatsystem så läggs $\hat{\mathbb{i}}, \hat{\mathbb{j}}, \hat{\mathbb{k}}$ längs de positiva koordinataxlarna.



En godtycklig vektor $\mathbb{A}$ kan nu skrivas som en linjärkombination.

$$\mathbb{A} = A_x \hat{\mathbb{i}} + A_y \hat{\mathbb{j}} + A_z \hat{\mathbb{k}}$$

A_x, A_y, A_z kallas för $\mathbb{A}$'s komponenter.

$A_x \hat{\mathbb{i}}$, $A_y \hat{\mathbb{j}}$, $A_z \hat{\mathbb{k}}$ kallas för $\mathbb{A}$'s komposanter.

Dela upp en vektor $\mathbb{B}$ på samma sätt:

$$\mathbb{B} = B_x \hat{\mathbb{i}} + B_y \hat{\mathbb{j}} + B_z \hat{\mathbb{k}}$$

Skalär- eller vektorprodukten mellan $\mathbb{A}$ och $\mathbb{B}$ kan nu enkelt beräknas genom att multiplicera ihop dessa utvecklingar, och använder multiplikationstabellerna (utantill!)

$\cdot$	$\hat{\mathbb{i}}$	$\hat{\mathbb{j}}$	$\hat{\mathbb{k}}$
$\hat{\mathbb{i}}$	1	0	0
$\hat{\mathbb{j}}$	0	1	0
$\hat{\mathbb{k}}$	0	0	1

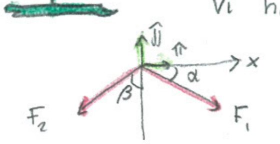
Tabell 2

2:a faktorn

1:a faktorn	$\times$	$\hat{\mathbb{i}}$	$\hat{\mathbb{j}}$	$\hat{\mathbb{k}}$
	$\hat{\mathbb{i}}$	0	$\hat{\mathbb{k}}$	$-\hat{\mathbb{j}}$
	$\hat{\mathbb{j}}$	$-\hat{\mathbb{k}}$	0	$\hat{\mathbb{i}}$
	$\hat{\mathbb{k}}$	$\hat{\mathbb{j}}$	$-\hat{\mathbb{i}}$	0

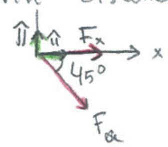
Tabell 3

2|28 Vi har ett givet kraftsystem



$F_1 = 800$ N
$F_2 = 900$ N
$\alpha = 10°$
$\beta = 25°$

Vi vill ersätta detta med ett ekvivalent kraftsystem.



Kraftsummorna: $\underbrace{F_1(\cos\alpha\,\hat{i} - \sin\alpha\,\hat{j})}_{\text{enhetsvektor ...}} + F_2(-\sin\beta\,\hat{i} - \cos\beta\,\hat{j})$

$F_x\hat{i} + F_a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}\right)$

Vi skall ha likhet mellan dessa uttryck för kraftsumman. Detta ger ekvationen

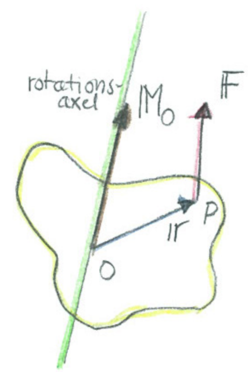
$$(F_1\cos\alpha - F_2\sin\beta)\hat{i} + (-F_1\sin\alpha - F_2\cos\beta)\hat{j} = \left(F_x + \frac{1}{\sqrt{2}}F_a\right)\hat{i} - F_a\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}$$

eller ekvivalent ett linjärt ekvationssystem för F_x och F_a.

$$\begin{cases} F_x + \frac{1}{\sqrt{2}}F_a = F_1\cos\alpha - F_2\sin\beta \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}F_a = -F_1\sin\alpha - F_2\cos\beta \end{cases}$$

Lös!

Vridmoment



Låt O vara en godtycklig referenspunkt. En kraft $\mathbb{F}$ angriper i en annan punkt P. Vi säger att denna kraft utövar ett vridmoment

$$\mathbb{M}_O = \mathbb{r} \times \mathbb{F}$$ med avseende på momentpunkten O.

Här är $\mathbb{r}$ = vektorn <u>från</u> O <u>till</u> P = Punkten P's <u>ortsvektor</u> m.a.p. O

Tolkning av $\mathbb{M}_O$: Kraften $\mathbb{F}$ tenderar att rotera kroppen kring en axel genom O som är parallell med $\mathbb{M}_O$.

I <u>två-dimensionella</u> problem är både $\mathbb{r}$ och $\mathbb{F}$ linjärkombinationer av t.ex. $\hat{i}$ och $\hat{j}$.

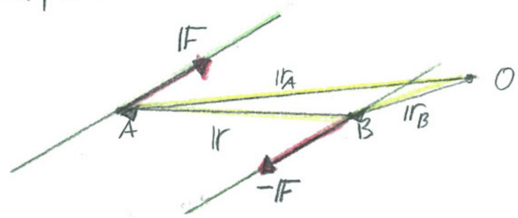
Då är

$$\mathbb{M}_O = \mathbb{r} \times \mathbb{F} = \pm M_O\hat{k} \quad \text{där } M_O = |\mathbb{M}_O|$$

Det gäller att $M_0 = dF$ där $F = |\mathbb{F}|$ och
d = vinkelräta avståndet från kraftens verkningslinje till momentpunkten O.

Kraftpar (couple)

Två motsatta krafter $\mathbb{F}$ och $-\mathbb{F}$ utgör ett kraftpar.



Kraftsumman är naturligtvis $\mathbb{F} + (-\mathbb{F}) = 0$

Vi beräknar kraftsystemets vridmoment $\mathbb{M}_O$ m.a.p. en godtycklig momentpunkt O.

$$\mathbb{M}_O = \mathbb{r}_A \times \mathbb{F} + \mathbb{r}_B \times (-\mathbb{F}) = (\mathbb{r}_A - \mathbb{r}_B) \times \mathbb{F} = \mathbb{r} \times \mathbb{F} = \mathbb{M}$$

skriv ut momentpunkten!

ortsvektor för A och B m.a.p. O

vektorn från B till A

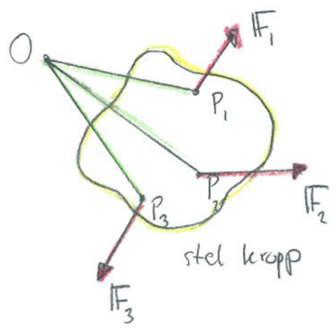
oberoende av O

Ofta representerar vi ett kraftpar med en symbol $\mathbb{M}$ eller i två dimensioner $\circlearrowleft M$

Observera att $\mathbb{M}$ <u>inte</u> är en kraft utan ett vridmoment. Den har ingen särskild "angreppspunkt".

Stelkroppsekvivalenta kraftsystem

Ett kraftsystem karaktäriseras av sin kraftsumma



$$\mathbb{R} = \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 + \mathbb{F}_3$$

och sitt vridmoment m.a.p. en godtycklig referenspunkt O.

$$\mathbb{M}_0 = \mathbb{r}_1 \times \mathbb{F}_1 + \mathbb{r}_2 \times \mathbb{F}_2 + \mathbb{r}_3 \times \mathbb{F}_3$$

Två olika kraftsystem har samma inverkan på en stel kropp omm de har samma $\mathbb{R}$ och $\mathbb{M}_0$.

Detta betyder att det ena systemet kan överföras i det andra genom att förflytta angreppspunkter längs verkningslinjer och addera krafter med samma angreppspunkt.

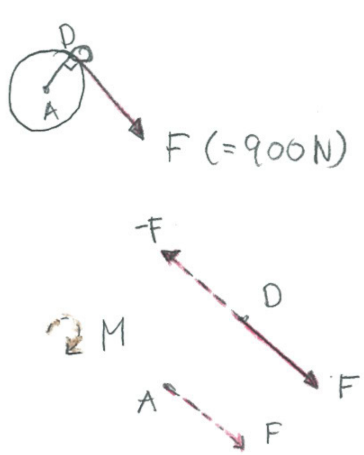
Observera att om $\begin{cases} \mathbb{R} = \mathbb{R}' \\ \mathbb{M}_0 = \mathbb{M}_0' \end{cases}$ för två kraftsystem så

har vi $\mathbb{M}_C = \mathbb{M}_C'$ Bevis: (övning)

en alternativ momentpunkt

2/72

Vi har ett givet kraftsystem (med en kraft).

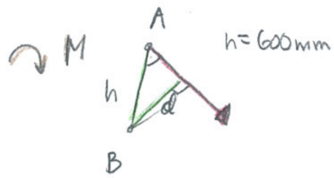


Vi ersätter med ett ekvivalent system bestående av en kraft som angriper i A samt ett kraftparsvridmoment.

Lägg till streckade krafter och ett vridmoment.

Observera att alla tilläggen tar ut varandra.

Låt krafter med samma angreppspunkt D ta ut varandra (och rita resten heldraget)



Detta systems vridmoment m.a.p. B är

$$M_B = dF + M = h\tfrac{\sqrt{3}}{2}F + rF = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}h + r\right)F$$

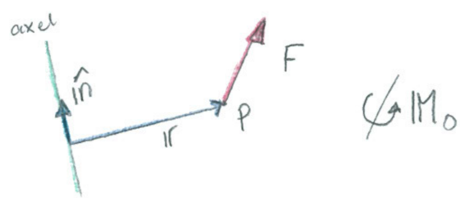
Hur långt kan man förenkla ett givet kraftsystem?

<u>Svar</u>: (I två dimensioner) Till en enda resulterande kraft $\mathbb{R}$ med en viss verkningslinje <u>eller</u> om kraftsumman $\mathbb{R} = 0$ ett visst kraftparsvridmoment $\mathbb{M}$.

Torsdag
2010-01-21

Vi har infört begreppet vridmoment $\mathbb{M}_O$ med avseende på O för en kraft $\mathbb{F}$ som angriper i en punkt P med ortsvektor $\mathbb{r}$ m.a.p. O.

$$\mathbb{M}_O = \mathbb{r} \times \mathbb{F}$$



Om vi har en axel λ genom O specificerad av enhetsvektorn $\hat{\mathbb{n}}$ så inför vi kraftens vridmoment m.a.p. denna <u>axel</u>:

$$M_\lambda = \mathbb{M}_O \cdot \hat{\mathbb{n}} \qquad \text{(skalär)}$$

($M_\lambda > 0$ betyder tendens till positiv vridning kring $\hat{\mathbb{n}}$)

Alt. def.:

$$\mathbb{M}_\lambda = M_\lambda \hat{\mathbb{n}} = \mathbb{M}_O \cdot \hat{\mathbb{n}}\,\hat{\mathbb{n}} = (\mathbb{r} \times \mathbb{F}) \cdot \hat{\mathbb{n}}\,\hat{\mathbb{n}}$$

2.114

Vi söker en kraftvektor $\mathbb{F}$. Den är specifierad av sin storlek $F = |\mathbb{F}|$ och sin riktning $\hat{\mathbb{n}}$ (enhetsvektor) så att $\mathbb{F} = F\hat{\mathbb{n}}$ (notera att $\hat{\mathbb{n}} = \frac{\mathbb{F}}{F}$)

Kraftens storlek är $F = k(r_{AB} - r_0)$ (linjär fjäder)

k: fjäderkonstant; r_{AB}: fjäderns längd; r_0: ospänd längd

Vad är r_{AB}?

Punkten A har ortsvektorn m.a.p. O $\mathbb{r}_A = R\cos\theta_A\hat{\mathbb{i}} + s\hat{\mathbb{j}} + R\sin\theta_A\mathbb{k}$

— " — B — " — $\mathbb{r}_B = r\cos\theta_B\hat{\mathbb{i}} + (s+d)\hat{\mathbb{j}} - r\sin\theta_B\hat{\mathbb{k}}$

Vektorn från A till B är (oberoende av s!):

$$\mathbb{r}_{AB} = \mathbb{r}_B - \mathbb{r}_A = (r\cos\theta_B - R\cos\theta_A)\hat{\mathbb{i}} + d\hat{\mathbb{j}} + (-r\sin\theta_B - R\sin\theta_A)\hat{\mathbb{k}}$$

Avståndet från A till B är $r_{AB} = |\mathbb{r}_{AB}| = \sqrt{\mathbb{r}_{AB}\cdot\mathbb{r}_{AB}}$

$$r_{AB} = |\mathbb{r}_{AB}| = \sqrt{\mathbb{r}_{AB}\cdot\mathbb{r}_{AB}} = \sqrt{(r\cos\theta_B - R\cos\theta_A)^2 + d^2 + (-r\sin\theta_B - R\sin\theta_A)^2}$$

Då $\theta_A = \theta_B = 0$ är avståndet alltså $r_0 = \sqrt{(r-R)^2 + d^2}$ OK

Fjäderkraftens storlek är alltså $F = k(r_{AB} - r_0)$. Riktningen?

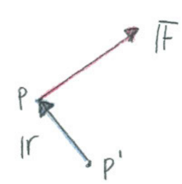
$\mathbb{F}$ är parallell med enhetsvektorn $\hat{\mathbb{n}} = \frac{\mathbb{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{1}{r_{AB}}\mathbb{r}_{AB}$

Kraftvektorn är alltså

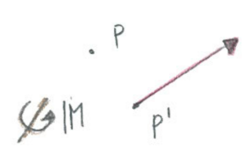
$$\mathbb{F} = F\hat{\mathbb{n}} = \frac{k(r_{AB} - r_0)}{r_{AB}}\mathbb{r}_{AB} = \underline{\underline{(-3{,}12\hat{\mathbb{i}} + 41{,}1\hat{\mathbb{j}} - 7{,}52\hat{\mathbb{k}})\ \text{N}}}$$

En kraft $\mathbb{F}$ med angreppspunkt P kan ersättas med en kraft $\mathbb{F}$ i P' om vi lägger till ett vridmoment $\mathbb{M} = \mathbb{r} \times \mathbb{F}$

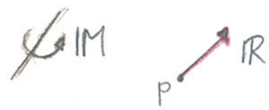
$\mathbb{r}$: vektor från P' till P



Ekvivalent system:



Ett godtyckligt kraftsystem kan alltså förenklas till



(= summan av alla ursprungliga kraftvektorer)

där P är en fritt vald punkt. Kan vi förenkla ytterligare?

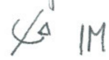
I två dimensioner är $\mathbb{M}$ alltid vinkelrät mot problemets plan. Vi kan då genom att förskjuta P (vinkelrät mot $\mathbb{F}$) ordna så att systemet blir

$\mathbb{M} = M\hat{\mathbb{k}}$

(kallas för resultanten till det ursprungliga systemet)

utan extra kraftparsvridmoment.

Undantag om $\mathbb{R} = 0$ fungerar inte detta.
Då kan vi förenkla till

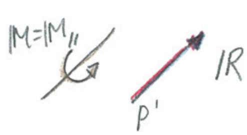


I tre dimensioner

Förflyttning av P ändrar $\mathbb{M}$ med en vektor $\mathbb{r} \times \mathbb{R}$ som är vinkelrät mot $\mathbb{R}$.

Skriv $\mathbb{M} = \underbrace{\mathbb{M}_{\parallel}}_{\text{parallell med } \mathbb{R}} + \underbrace{\mathbb{M}_{\perp}}_{\text{vinkelrät mot } \mathbb{R}}$

Med lämpligt val av P kan vi arrangera så att $\mathbb{M}_{\perp} = 0$,
dvs. $\mathbb{M}$ är parallell med $\mathbb{R}$



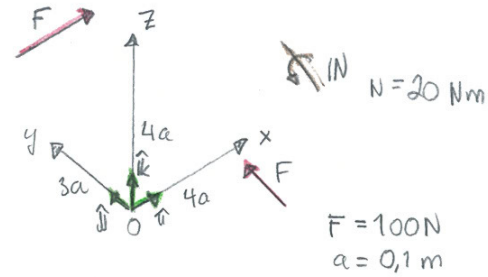
Detta kallas för en kraftskruv (wrench).

Vi kan alltså förenkla till en kraftskruv, men inte ytterligare.

Specialfall: $\mathbb{M} = \mathbb{M}_{\parallel} = 0$ har vi en resulterande kraft med en viss verkningslinje.

$\mathbb{R} = 0$ har vi ett kraftparsvridmoment

2.159 Det givna kraftsystemet är



Kraftsumman är $\mathbb{R} = F\hat{\imath} + F\hat{\jmath}$

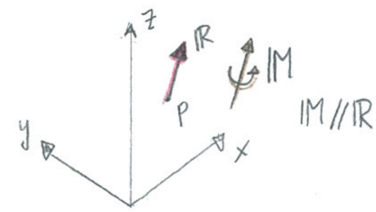
och vridmomentet m.a.p. O är

$$\mathbb{M}_0 = (3a\hat{\jmath} + 4a\hat{k}) \times F\hat{\imath} + 4a\hat{\imath} \times F\hat{\jmath} - N\hat{\jmath}$$

$$= aF(-3\hat{k} + 4\hat{\jmath} + 4\hat{k}) - N\hat{\jmath} =$$

$$= (4aF - N)\hat{\jmath} + aF\hat{k}$$

Vi vill ersätta med en kraftskruv.



Vi har alltså

$$\begin{cases} \mathbb{R} = F\hat{\imath} + F\hat{\jmath} & R = F\sqrt{2} \\ \mathbb{M} = M\dfrac{\mathbb{R}}{R} = M\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\imath} + \hat{\jmath}) \end{cases}$$

Kraftsumman stämmer förstås. Vridmomentet m.a.p. O är

$$\mathbb{M}_0 = \mathbb{r} \times \mathbb{R} + \mathbb{M} = (x\hat{\imath} + z\hat{k}) \times (F\hat{\imath} + F\hat{\jmath}) + M\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\imath} + \hat{\jmath}) =$$

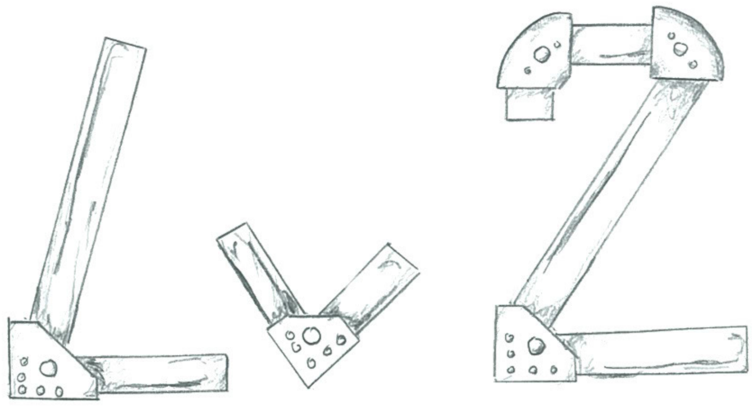
$$= xF\hat{k} + zF\hat{\jmath} - zF\hat{\imath} + M\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\imath} + \hat{\jmath}) = \left(\frac{M}{\sqrt{2}} - zF\right)\hat{\imath} + \left(\frac{M}{\sqrt{2}} + zF\right)\hat{\jmath} + xF\hat{k}$$

De två uttrycken för $\mathbb{M}_0$ skall överensstämma. Detta ger ekvationssystemet:

$$\begin{cases} \dfrac{M}{\sqrt{2}} - zF = 0 \\ \dfrac{M}{\sqrt{2}} + zF = 4aF - N \\ xF = aF \end{cases}$$

3 ekvationer, 3 obekanta (x, z, M)

Lös!



Mekanik 1

Med Måns Henningson

Jämvikt

recept för att lösa nästan
alla mekanikproblem

skånskt exempel

definition: jämvikt

exempel

Friktion

torr friktion:

$F_{max} = \mu_s N$ och $F = \mu_k N$

friktionsvinkel

Olika typer av friktionsproblem

Obs I och Obs II

exempel

Jämvikt (i två dimensioner)

Mekanik är läran om sambandet mellan materiella kroppars ömsesidiga påverkan (växelverkan) och deras rörelse.

Recept för att lösa nästan alla mekanikproblem

1.) Dela upp det givna systemet i väldefinierade delkroppar på lämpligt sätt (beroende på frågeställningen).

2.) Betrakta en delkropp i taget.
(Rita en separat figur för varje delkropp.
T.ex. en "sprängskiss" av det givna systemet.)

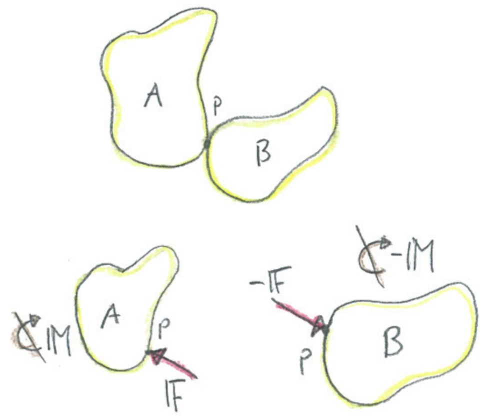
Påverkan på en delkropp från andra delkroppar representeras genom krafter och vridmoment.
Detta kallas för att frilägga delkroppen.

3.) Hur påverkan på en kropp A från en kropp B ser ut beror på hur A och B växelverkar, t.ex. hur de är sammanfogade. Se figur 3/1.

Rita alltid in den mest allmänna kraft och vridmoment som denna typ av förbindelse tillåter.

4.) I den här kursen växelverkar en kropp med andra kroppar som den är i kontakt med samt med resten av jordklotet genom gravitationskraften.

5.) Om en kropp A påverkar en annan kropp B med en kraft $\mathbb{F}$ och ett vridmoment $\mathbb{M}$ så påverkar B A med $-\mathbb{F}$ och $-\mathbb{M}$.
Detta kallas "Newtons tredje lag".



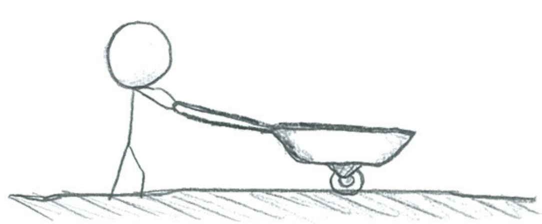
Observera att krafter och vridmoment på en kropp alltid kommer från någon annan kropp i systemet.

Öva på fig 3/A, 3/B och 3/C.

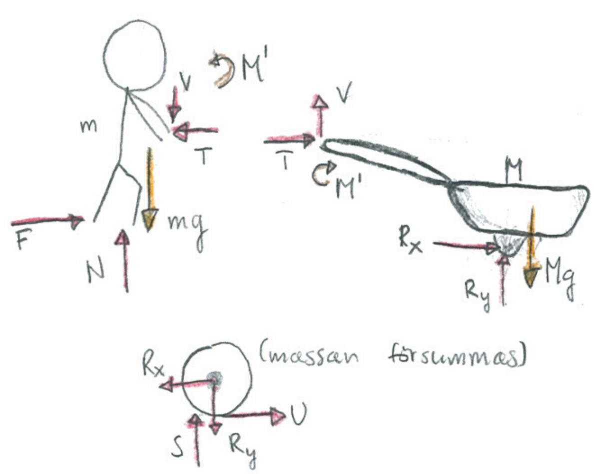
Ett skånskt exempel

Vi delar upp i tre delkroppar: (möjligen fem)

Skåning, rullebör (utan hjul), hjul, (marken, jordklotet)



Systemet



Kommentarer: $M' = 0$ om handleden ses som ett gångjärn.

$F = 0$ om det är väldigt halt.

Jämvikt = rörelse utan acceleration
(viktigt specialfall: en statisk situation)

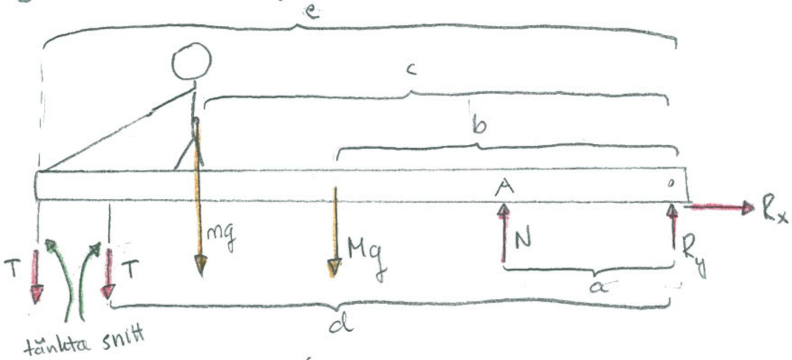
En kropp är i jämvikt $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \text{Kraftsumman} & \mathbb{R} = 0 \\ \text{Vridmoment} & \mathbb{M}_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{M}_{0'} = 0$

en godtycklig referenspunkt

en alternativ referenspunkt

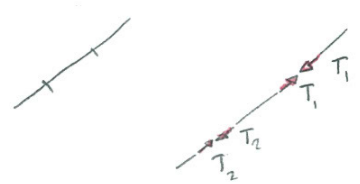
3/52

Frilägg balk med pojke och två repstumpar:



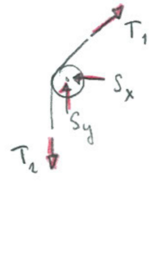
$m = 50\,kg$
$M = 100\,kg$
$T = 150\,N$
$a = 0{,}75\,m$
$b = 2{,}00\,m$

Spännkraften T i en lina är densamma i alla punkter. Dela upp i mindre delar:



Kraftsumman på mittbiten $= 0 \Rightarrow T_1 - T_2 = 0$

Vad händer vid en trissa (fritt vridbar)?



Vridmomentet m.a.p. axeln genom O

$M_0 = r\,T_1 - r\,T_2 = 0 \Rightarrow T_1 = T_2$

radien

Ställ upp jämviktsekvationerna:

$$\begin{cases} \uparrow: & -T - T - mg - Mg + N + R_y = 0 \\ \rightarrow: & R_x = 0 \\ \curvearrowleft O: & eT + dT + c\,mg + b\,Mg - aN = 0 \end{cases}$$

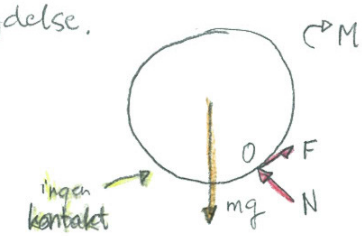
Tre ekvationer, tre obekanta (R_x, R_y, N) Lös! Den sökta kraften är $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = R_y$

<u>Obs:</u> I verkligheten har vi ofta fler obekanta än ekvationer, och alltså inte någon entydig lösning. I räkneuppgifterna har vi dock entydiga lösningar.

Tisdag 2010-01-26

Jämvikt (fortsättning)

3/111 r_0 och θ saknar betydelse. Frilägg hjulet i gränsfallet då rullning precis sker.



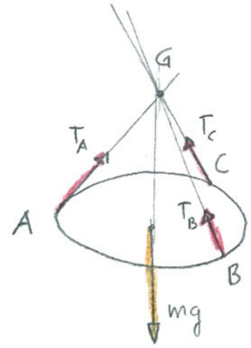
Ställ upp jämviktsekvationerna:

$\uparrow$:
$\rightarrow$:
} behövs om man vill bestämma F och N

$\curvearrowleft O$: $-M + \frac{b}{2}mg = 0$, dvs. $M = \frac{b}{2}mg$ ← oberoende av r förutsatt att $r > \frac{b}{2}$

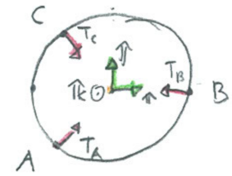
3/68

Frilägg ringen



$M = 50$ kg

Uppifrån:

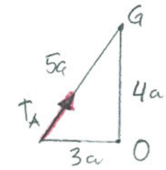


Ställ upp jämviktsekvationerna:

$\mathbb{M}_G \equiv 0$

kroken

Kraftjämvikt:



$$0 = -mg\hat{k} + T_A\left(\frac{4}{5}\hat{k} + \frac{3}{5}\hat{j}\right) + T_B\left(\frac{4}{5}\hat{k} - \frac{3}{5}\hat{i}\right) +$$
$$+ T_C\left(\frac{4}{5}\hat{k} + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j}\right)\right) =$$
$$= \left(-\frac{3}{5}T_B + \frac{3}{10}T_C\right)\hat{i} + \left(\frac{3}{5}T_A - \frac{3\sqrt{3}}{10}T_C\right)\hat{j} +$$
$$+ \left(-mg + \frac{4}{5}T_A + \frac{4}{5}T_B + \frac{4}{5}T_C\right)\hat{k}$$

Vi får ekvationssystemet

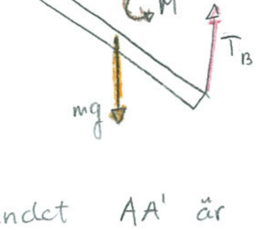
$$\begin{cases} -\frac{3}{5}T_B + \frac{3}{10}T_C = 0 \\ \frac{3}{5}T_A - \frac{3\sqrt{3}}{10}T_C = 0 \\ \frac{4}{5}T_A + \frac{4}{5}T_B + \frac{4}{5}T_C = mg \end{cases}$$

3 ekvationer, 3 obekanta (T_A, T_B, T_C)

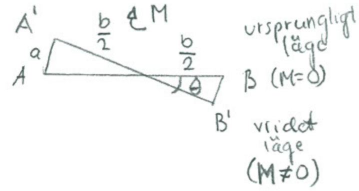
Lös!

3/92

Frilägg balken



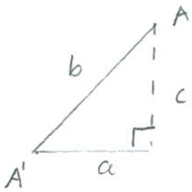
Uppifrån:



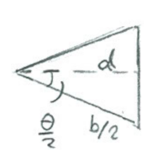
(Horisontella) Avståndet BB' (eller AA') är

$$a = 2\frac{b}{2}\sin\frac{\theta}{2} = b\sin\frac{\theta}{2}$$

Från sidan (A och A' i tavlans plan)



Vertikala avståndet AA' är



$$c = \sqrt{b^2 - a^2} = b\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta}{2}} = b\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d = \frac{b}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

Ställ upp jämviktsekvationerna:

Horisontell kraftjämvikt: $T_A - T_B = 0$ (1)

Vertikal kraftjämvikt: $-mg + T_A \frac{c}{b} + T_B \frac{c}{b} = 0$ (2)

Momentjämvikt: $-M + \underbrace{\frac{b}{2}\cos\frac{\theta}{2}}_{d} \underbrace{\frac{a}{b}T_A}_{\text{horisontal-komponent}} + \frac{b}{2}\cos\frac{\theta}{2}\frac{a}{b}T_B = 0$ (3)

Detta ger $T_A = T_B = \frac{mgb}{2c} = \frac{mg}{2\cos\frac{\theta}{2}}$ (3) ger: $M = a\cos\frac{\theta}{2}\frac{mg}{2\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{mga}{2}$

Balken har höjts $h = b - c = b(1-\cos\frac{\theta}{2})$

$$M = \frac{mg}{2}a = \frac{mgb}{2}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{mgb}{2}\sqrt{1-\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{mgb}{2}\sqrt{1-(1-\frac{h}{b})^2} =$$
$$= \frac{mgb}{2}\sqrt{\frac{2h}{b}-\left(\frac{h}{b}\right)^2} = \frac{mgb}{2}\sqrt{\frac{h}{b}\left(2-\frac{h}{b}\right)}$$

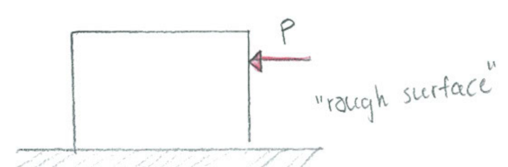
Kontroller:

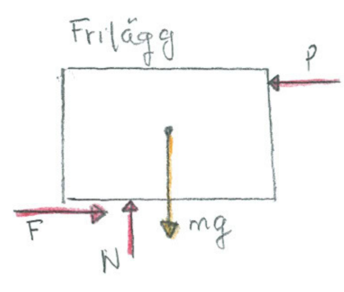
Dimensionsanalys O.k.

$M \to 0$ då $h \to 0$

Torsdag
2010-01-28

Friktion





Vad vet vi om friktionskraften F?

Empiriskt finner vi att friktionskraften F har ett maximalt möjligt värde F_{max} då kropparna inte rör sig i förhållande till varandra.

Vi inför en enkel modell (torr friktion, Coulomb friktion):

$$F_{max} = \mu_s N$$

den statiska friktionskoefficienten (dimensionslös)
Beror på material och utförande av ytorna etc.
Ofta har vi $0 < \mu < 1$
inte alltid

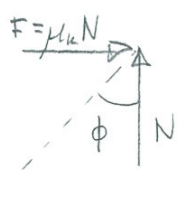
I jämvikt har vi alltså $F < F_{max} = \mu_s N$.
Om $P > F_{max} = \mu_s N$ kan jämvikt inte råda. Kroppar får då en accelererad rörelse. Vi beskriver då friktionskraften med en förenklad modell: (torr friktion, Coulomb friktion)

$$F = \mu_k N$$

den kinetiska friktionskoefficienten.
Vanligtvis är $\mu_k < \mu_s$. Men ibland approximerar vi $\mu_s = \mu_k = \mu$

Friktionsvinkel

I rörelse:



Den resulterande kraften bildar en vinkel $\phi = \arctan \mu_k$ med normalen till kontaktytan.

Olika typer av friktionsproblem

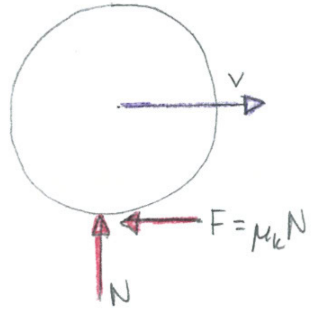
1. Vi vet att glidning sker i en viss kontaktyta.
Sätt då $F = \mu_k N$.

2. Vi söker villkoret för att glidning precis skall inträda.
Sätt då $F = F_{max} = \mu_s N$

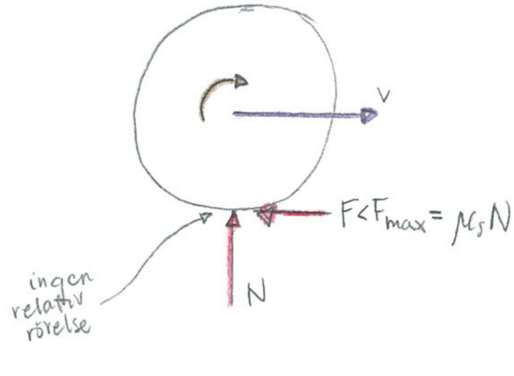
3. Vi vet ej om glidning sker i en viss kontaktyta.
<u>Antag</u> att glidning inte sker. Bestäm F från jämviktsekvationerna.
<u>Om</u> $F < F_{max} = \mu_s N$ så var antagandet riktigt.
<u>Annars</u> var antagandet felaktigt och vi får gå till 1.

Obs !

Skilj på ett hjul som glider



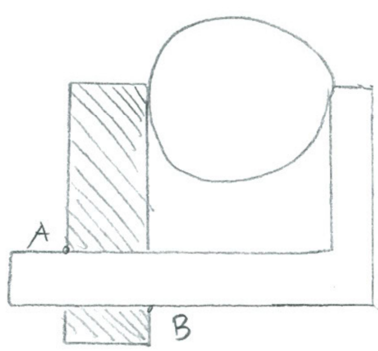
eller rullar



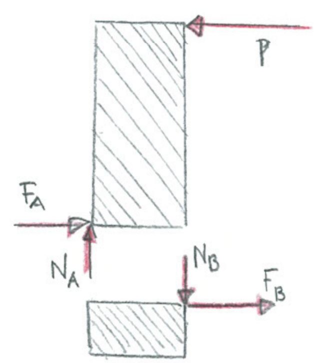
Obs II

I ett komplicerat problem med flera kontaktytor kan man ha glidning i vissa ytor men inte i andra.

6/40



Frilägg den ena delen



Ställ upp jämviktsekvationerna (för givet P):

$$
\begin{cases}
\uparrow : & N_A - N_B = 0 \\
\rightarrow : & F_A + F_B - P = 0 \\
\circlearrowleft A : & xP + bF_B - aN_B = 0
\end{cases}
$$

I gränsfallet då glidning precis sker har vi

$$
\begin{cases}
F_A = \mu_s N_A \\
F_B = \mu_s N_B
\end{cases}
$$

5 ekv, 5 obekanta (F_A, F_B, N_A, N_B, x)

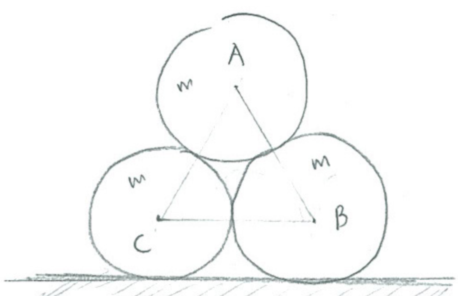
$$F_A = \frac{1}{2}P, \quad F_B = \frac{1}{2}P, \quad N_A = \frac{1}{2\mu_s}P, \quad N_B = \frac{1}{2\mu_s}P$$

$$x = \frac{aN_B - bF_B}{P} = \frac{a}{2\mu_s} - \frac{b}{2}$$

Självhämning

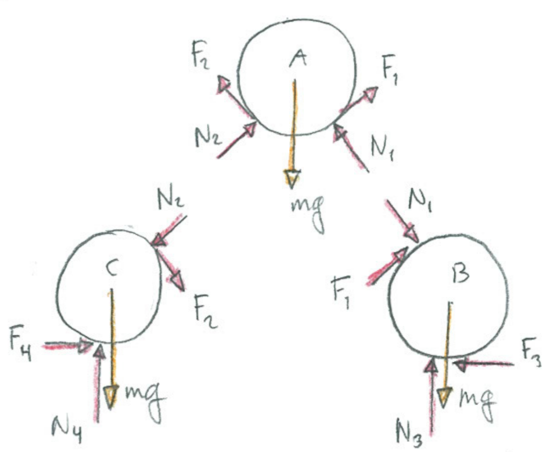
(oberoende av P)

Ex Tre likadana cylindrar ligger på varandra.



Vad är villkoret på friktionskoefficienten μ_s (samma i alla ytor) för att jämvikt skall råda?

Frilägg cylindrarna separat:



Ställ upp jämviktsekvationerna:

$$\begin{cases} \uparrow: & -mg + \frac{\sqrt{3}}{2}N_1 + \frac{1}{2}F_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}N_2 + \frac{1}{2}F_2 = 0 \\ \rightarrow: & -\frac{1}{2}N_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}F_1 + \frac{1}{2}N_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}F_2 = 0 \\ \curvearrowleft A: & rF_1 - rF_2 = 0 \end{cases}$$

A övre cylindern

$$\begin{cases} \uparrow: & -mg - \frac{\sqrt{3}}{2} N_1 - \frac{1}{2} F_1 + N_3 = 0 \\ \rightarrow: & \frac{1}{2} N_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} F_1 - F_3 = 0 \\ \circlearrowleft B: & r F_1 - r F_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \uparrow: \\ \rightarrow: \\ \circlearrowleft C: \end{cases}$$

8 obekanta, 9 ekvationer, men dessa är inte linjärt oberoende

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = F_3 = F_4 \equiv F \\ N_1 = N_2 = (\sqrt{3}+2)F \\ \sqrt{3} N_1 + F_1 = mg \end{cases} \qquad \begin{aligned} N_3 = N_4 &= mg + \tfrac{1}{2}F + \tfrac{\sqrt{3}}{2} N_1 = \\ &= mg + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} + \sqrt{3}\right) F = \\ &= mg + (2+\sqrt{3})F \end{aligned}$$

$$\ldots\ N_3 = N_4 = \frac{3mg}{2} \Rightarrow F = \frac{\frac{3mg}{2} - mg}{(2+\sqrt{3})} = \frac{1/2}{2+\sqrt{3}} mg$$

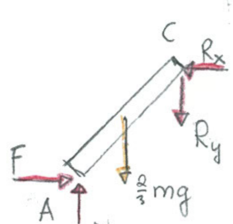
Beräkna nu kvoterna $\frac{F_1}{N_1} = \frac{F_2}{N_2} = \frac{1}{\sqrt{3}+2}$

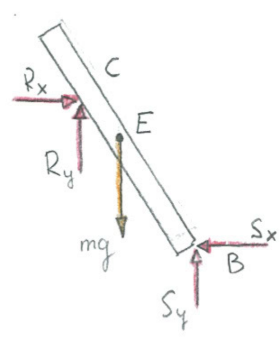
$$\frac{F_3}{N_3} = \frac{F_4}{N_4} = \frac{1/2}{2+\sqrt{3}} \Big/ \frac{3}{2} = \frac{1}{3(2+\sqrt{3})}$$

Om $\mu < \frac{1}{\sqrt{3}+2}$ sker alltså glidning mellan cylindrarna i övre kontaktytorna. Rullning mot underlaget.

6/43

Frilägg stängerna separat.





Ställ upp jämviktsekvationerna separat:

$\uparrow$: (1) $\uparrow$ Bestämmer S_y

$\rightarrow$: (2) $\rightarrow$ Bestämmer S_x

$\circlearrowleft A$: (3) $\circlearrowleft B$ oberoende av S_x, S_y (4)

Friktionsvillkoret då glidning precis sker är

$$F = \mu_s N \qquad (5)$$

5 obekanta (R_x, R_y, F, N, θ) Lös! $\theta = \dots$

Lv3

Mekanik 1

Med Måns Henningson

Kraftfördelningar

tyngdkraftsfördelning

SATS: $\mathbb{r}_G = \frac{1}{m}\int dm\, \mathbb{r}$]]BEVIS[

Balkar

tryckkraft, skjuvkraft, böjmoment, torsionsmoment

$$\begin{cases} V'(x) = -w(x) \\ M'(x) = V(x) \end{cases}$$

Kablar

Fluidstatik

tryck

TEOREM: om tryck i en fluid]]BEVIS[

$p'(z) = \rho(z)\, g$

inkompressibel fluid

Arkimedes princip

Måndag
2010-02-01

Kraftfördelningar

Hittills har vi specifierat en <u>kraft</u> genom dess <u>kraftvektor</u> $\mathbb{F}$ och dess angreppspunkt P.

Verkliga krafter är dock ofta givna av <u>kraftfördelningar</u> vilket betyder att de angriper över ett område av ändlig storlek.

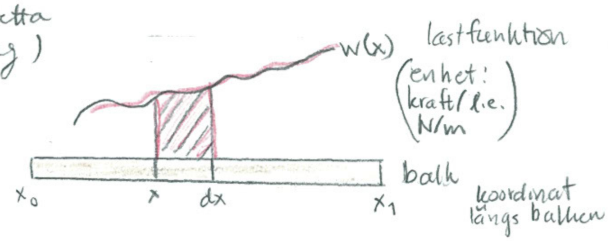
Ofta kan vi approximera en kraftfördelning med en punktkraft.
——— " ——————— punktkraft -"- kraftfördelning!

En kraftfördelning kan angripa över en endimensionell kurva
tvådimensionell yta
tredimensionell volym.

Exempel

En balk med last $w(x)\,dx$ i intervallet mellan x och $x+dx$.

Total last $= \int_{x_0}^{x_1} dx\, w(x)$ (Mer om detta på tisdag)



– en tvådimensionell yta:

Tryck i en fluid (gas eller vätska). Tryck $p = \text{kraft}/\text{ytenhet}$ $1\ \text{N/m}^2 = 1\ \text{Pa}$ (tors.)

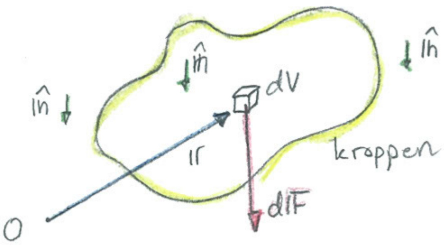
– en tredimensionell volym: Tyngdkraft. Krafttäthet/volymsenhet N/m^3

Tyngdkraftsfördelning

Vi betraktar en kropp med (variabel) densitet $\rho = \rho(\mathbb{r})$ — ortsvektor m.a.p. O för en punkt i kroppen

Det lilla volymselementet

$$dV = \underbrace{dxdydz}_{\text{i Cartesiska koordinater}}$$



har massan

$$dm = \rho(\mathbb{r})\, dV$$

Kroppars totala massa $m = \int_{\text{kroppen}} dm = \int \rho\, dV = \overbrace{\int \rho(x,y,z)\, dxdydz}^{\text{om vi vill använda Cartesiska koordinater}}$

Tyngdkraften på det lilla volymselementet är

$$d\mathbb{F} = dm\ g\ \hat{\mathbb{n}}$$

g: tyngdaccelerationen, $\hat{\mathbb{n}}$: enhetsvektor "neråt"

Totala tyngdkraften blir naturligtvis

$$\mathbb{F} = \int d\mathbb{F} = \int_{\text{kroppen}} dm\ g\ \hat{\mathbb{n}} = g\,\hat{\mathbb{n}} \int_{\text{kroppen}} dm = \underbrace{m}_{\text{totala massan}} g\ \hat{\mathbb{n}}$$

Vi beräknar tyngdkraftsfördelningens vridmoment $\mathbb{M}_O$ m.a.p. O:

$$\mathbb{M}_0 = \int_{\text{kroppen}} d\mathbb{M}_0 = \int \mathbb{r} \times d\mathbb{F} = \int_{\text{kroppen}} \mathbb{r} \times dm\, g\, \hat{\mathbb{n}} = \left(g \int \mathbb{r}\, dm \right) \times \hat{\mathbb{n}}$$

Sats

Detta är lika med vridmomentet för en punktkraft $\mathbb{F}$ som angriper i en punkt G (tyngdpunkten) med ortsvektor

$$\mathbb{r}_G = \frac{1}{m} \int_{\text{kroppen}} dm\, \mathbb{r}$$

Tyngdpunktens ortsvektor $\mathbb{r}_G$ är alltså ett "riktat medelvärde" av ortsvektorerna för alla masselement i kroppen.

Bevis

En sådan punktkraft $\mathbb{F}$ i G har vridmomentet m.a.p. O

$$\mathbb{M}_0 = \mathbb{r}_G \times \mathbb{F} = \left(\frac{1}{m} \int dm\, \mathbb{r} \right) \times mg\, \hat{\mathbb{n}} = \left(g \int dm\, \mathbb{r} \right) \times \hat{\mathbb{n}}$$

precis som för tyngdkraftsfördelningen.

Om kroppen är stel kan vi alltså ersätta tyngdkraftsfördelningen med en punktkraft som angriper i tyngdpunkten G.

5/15

dimensionslöst

Enligt texten: Avståndet = x meter

Bättre: Låt x ha dimension längd så att Avståndet = x.

Formeln för densiteten blir då

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{x}{\ell}\right) \quad \text{där } \ell = 1\,\text{m är stavens längd.}$$

Stavens totala massa är

$$m = \int_{\text{staven}} dm = \int_0^{\ell} \rho\, dx = \int_0^{\ell} \rho_0 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{x}{\ell}\right) dx = \rho_0 \left(\ell - \frac{1}{4}\ell\right) = \rho_0 \frac{3\ell}{4}$$

Tyngdpunktens läge är

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_{\text{staven}} x\, dm = \frac{1}{m}\int_0^{\ell} x \rho_0 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{x}{\ell}\right) dx = \frac{\rho_0}{m}\left(\frac{1}{2}\ell^2 - \frac{1}{6}\ell^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\rho_0 \ell^2}{m} = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\ell = \frac{4}{9}\ell = \underline{\underline{\frac{4}{9}\text{ meter}}}$$

5/42

Obs. att tyngdpunkten har $\bar{y} = \bar{z} = 0$ av symmetriskäl.

Enligt allmänna resonemanget är

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_{\text{kroppen}} x\, dm = \frac{1}{M - \mu}\left(\int_{\text{stor halvsfär}} x\, dm - \int_{\text{liten halvsfär}} x\, dm\right)$$

kroppens massa

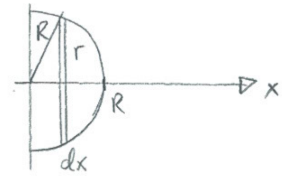
massa för halvsfär med radie R

massa för halvsfär med radie R/2

Betekna kroppens densitet med ρ = konstant (homogen kropp)

Då har vi

$$M = \rho \underbrace{\int dV}_{\text{stor halvsfär}} = \rho \frac{1}{2} \frac{4\pi R^3}{3} = \rho \frac{2\pi R^3}{3}$$



$$\mu = \rho \frac{2\pi (\frac{R}{2})^3}{3} = \rho \frac{2\pi R^3}{3} \frac{1}{8}$$

$$\underbrace{\int x\,dm}_{\text{stor halvsfär}} = \rho \underbrace{\int x\,dV}_{\text{stor halvsfär}} = \rho \int_0^R x\pi(R^2 - x^2)\,dx = \rho\pi R^4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\rho\pi R^4}{4}$$

På samma sätt $\underbrace{\int x\,dm}_{\text{liten halvsfär}} = \frac{\rho\pi(\frac{R}{2})^4}{4} = \frac{\rho\pi R^4}{4} \cdot \frac{1}{16}$

Vi får alltså

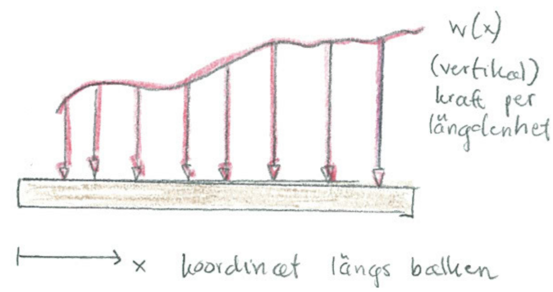
$$\bar{x} = \frac{1}{\rho\frac{2\pi R^3}{3}\left(1 - \frac{1}{8}\right)} \cdot \frac{\rho\pi R^4}{4}\left(1 - \frac{1}{16}\right) = R\,\frac{3}{8} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{15}{16} = R\,\frac{45}{112}$$

tyngdpunktens x-koordinat

Tisdag 2010-02-02

Balkar

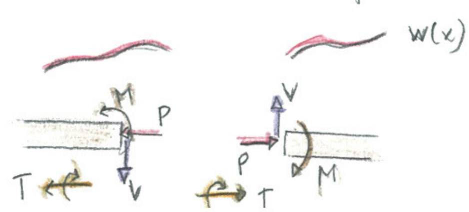
Vi betraktar en belastad balk



Dessutom påverkas balken av krafter och vridmoment från infästningen.

Gör ett tänkt snitt i balken vid koordinaten x.
Hur påverkar de olika delarna varandra?

Svar: med en godtycklig kraft och ett godtyckligt vridmoment.



Benämningar:

Tryckkraft P (dragkraft om $P<0$)

Skjuvkraft V (vinkelrät mot balken, men inte nödvändigtvis i tavlans plan)

Böjmoment M (vrider kring axel vinkelrät mot balken, men inte nödvändigtvis vinkelrät mot tavlan)

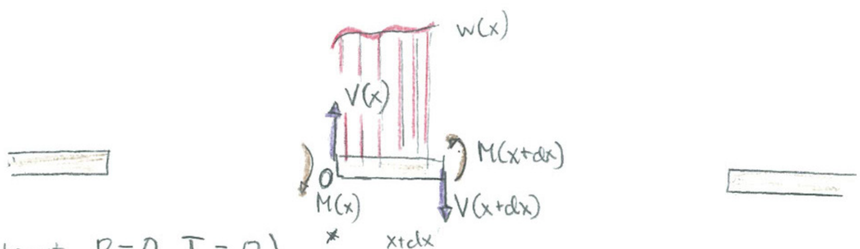
Torsionsmoment T

Storheterna P, V, M och T är i allmänhet funktioner av läget x längs balken.

$$V = V(x),\ M = M(x) \dots$$

Vi vill finna differentialekvationer som, tillsammans med randvärden, bestämmer dessa.

Vi gör två tänkta snitt i balken vid koordinaterna x och $x+dx$ ← liten bit



(Vi har antagit $P \equiv 0$, $T \equiv 0$)

Ställ upp jämviktsekvationerna för den lilla biten balk:

$$\uparrow: \quad V(x) - V(x+dx) - w(x)\,dx = 0$$

$$\circlearrowleft 0: \quad -dx\,V(x+dx) + M(x+dx) - M(x) - \cancel{\underbrace{\frac{dx}{2}}_{\text{hävarmen till origo}} \underbrace{w(x)\,dx}_{\text{kraften}}} = 0$$

[försummas då dx är litet]

Använd Taylors formel: $V(x+dx) = V(x) + V'(x)\,dx + \cancel{\frac{1}{2}V''(x)(dx)^2} + \dots$

$$M(x+dx) = M(x) + M'(x)\,dx + \dots$$

Insättning i jämviktsekvationerna ger

$$\begin{cases} V(x) - V(x) - V'(x)dx - w(x)dx = \mathcal{O}((dx)^2) \\ -dx V(x) + M(x) + M'(x)dx - M(x) = \mathcal{O}((dx)^2) \end{cases}$$

Dividera med dx.

$$\begin{cases} V'(x) = -w(x) \quad (1) \\ M'(x) = V(x) \quad (2) \end{cases}$$

Om vi vill kan vi kombinera
vi kombinera dessa till

$$M''(x) = -w(x)$$

Om $w(x)$ är en känd funktion så bestämmer (1) funktionen $V(x)$ om vi även känner t.ex. $V(x_0)$.

en viss punkt

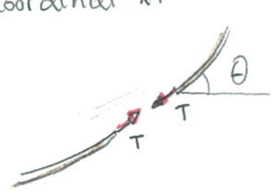
På samma sätt ger (2) tillsammans med $M(x_0)$ funktionen $M(x)$.

Kablar

(ej på tentamen)

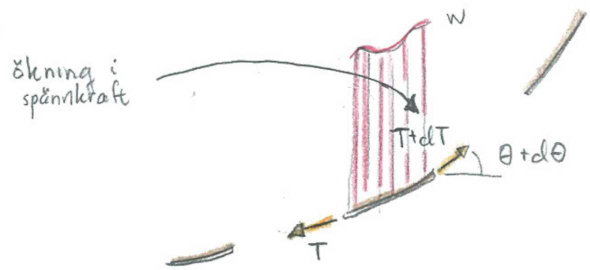
Tänk på Älvborgsbron:

Gör ett snitt i kabeln vid en koordinat x:



Hur varierar T och θ med läget längs kabeln?

Gör två snitt och frilägg delen i mitten:



w vertikal last

Ställ upp kraftjämvikt:

$$\uparrow: \quad (T+dT)\sin(\theta+d\theta) - T\sin\theta - w\,dx = 0$$

$$\rightarrow: \quad (T+dT)\cos(\theta+d\theta) - T\cos\theta = 0$$

$$\begin{cases} \sin(\theta+d\theta) = \sin\theta + \cos\theta \cdot d\theta + \dots \\ \cos(\theta+d\theta) = \cos\theta - \sin\theta \cdot d\theta + \dots \end{cases}$$

Sätt in i ekvationen och försumma högre ordningens termer.

$$\begin{cases} \cancel{T\sin\theta} + T\cos\theta\, d\theta + dT\sin\theta - \cancel{T\sin\theta} = w(dx) \\ \cancel{T\cos\theta} - T\sin\theta\, d\theta + dT\cos\theta - \cancel{T\cos\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T\cos\theta \dfrac{d\theta}{dx} + \dfrac{dT}{dx}\sin\theta = w \\ -T\sin\theta \dfrac{d\theta}{dx} + \dfrac{dT}{dx}\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Se detta som ett linjärt ekvationssystem med obekanta $\dfrac{dT}{dx}$ och $\dfrac{d\theta}{dx}$.

5/141

Lasten ges av funktionen

$w(x) = w_0 \left(1 - \left(\frac{2}{\ell}\right)^2 x^2\right)$

avståndet från A

$V(x)$ och $M(x)$ skall uppfylla differentialekvationerna

$$\begin{cases} V'(x) = -w(x) \\ M'(x) = V(x) \end{cases}$$

Men vi behöver även randvärden:

$$\begin{cases} V\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0 \\ M\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

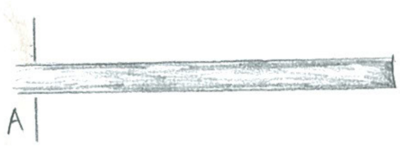
längst till höger

Frilägg sista delen av balken

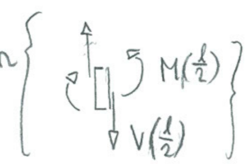
Alternativt kan vi ge randvärden längst till vänster.

$V\left(-\frac{\ell}{2}\right)$ = kraften från infästningen på balken

$M\left(-\frac{\ell}{2}\right)$ = vridmoment från infästningen bestämmes genom att frilägga hela balken



Frilägg liten bit till vänster



$V'(x) = -w(x) = w_0\left(-1 + \frac{4}{\ell^2}x^2\right)$

$\Rightarrow V(x) = w_0\left(-x + \frac{4x^3}{3\ell^2} + \text{konstant}\right) = w_0\left(-x + \frac{4x^3}{3\ell^2} + \frac{\ell}{3}\right)$

$V\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0$

$M'(x) = V(x) = w_0\left(\frac{\ell}{3} - x + \frac{4x^3}{3\ell^2}\right)$

$M\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow M(x) = w_0\left(\frac{\ell}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{3\ell^2} + \text{konstant}\right) = w_0\left(\frac{-\ell^2}{16} + \frac{\ell}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{3\ell^2}\right)$

5/142 Ställ upp jämviktsekvationerna för den frilagda delen:

$$\uparrow: \quad -L + P\sin\theta - V\cos\theta = 0$$

$$\rightarrow: \quad -P\cos\theta - V\sin\theta = 0$$

$$\circlearrowleft O: \quad rP - M = 0$$

Lös dessa ekvationer:

$$\begin{cases} P = L\sin\theta \\ V = -L\cos\theta \\ M = rL\sin\theta \end{cases}$$

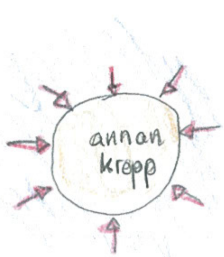
Liten koll:

$\theta \to 0$	$\theta \to \frac{\pi}{2}$
$\to 0$	$\to L$
$\to -L$	$\to 0$
$\to 0$	$\to rL$

Fluidstatik

Torsdag 2010-02-04

En fluid (vätska eller gas) i jämvikt kan bara utöva en normalkraft (inte någon skjuvkraft) på en annan kropp.



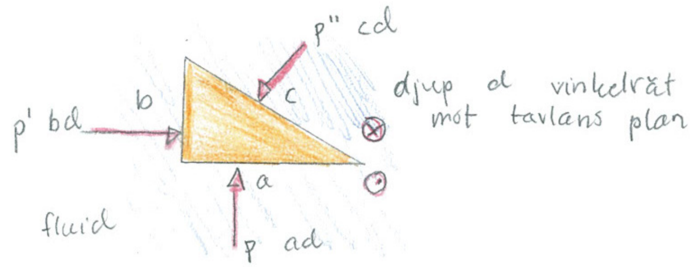
Normalkraft/ytenhet kallas för tryck p.
Enhet $N/m^2 = Pa$ (Pascal)

Teorem

Trycket i en fluid beror bara på läget, inte på kontaktytans orientering.

Bevis

Frilägg ett litet prisma nedsänkt i den omgivande fluiden.



Antag att eventuellt är $p, p', p'', \ldots$ olika. Ställ upp jämviktsekvationerna för prismat.

$$\uparrow: \quad p\,ad - p''\,cd\,\frac{a}{c} = 0$$

vertikala projektionen

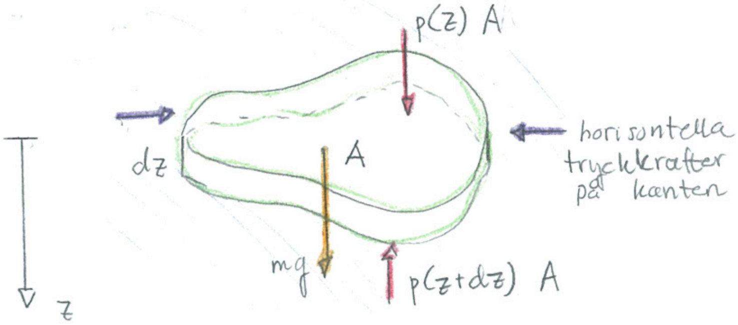
så att $p = p''$. På samma sätt inser vi att trycket $p = p(\mathbf{r})$ bara beror av läget $\mathbf{r}$.

Hur beror trycket p av läget $\mathbf{r}$?

Frilägg en tunn horisontell skiva fluid med area A och tjocklek dz i vertikalled mellan koordinaterna z och $z + dz$.

Skivans massa är

$$m = \underset{\substack{\text{fluidens}\\ \text{densitet}}}{\rho(z)} \underbrace{A\, dz}_{\substack{\text{skivans}\\ \text{volym}}}$$



Ställ upp kraftjämvikt i vertikalled

$$\uparrow: \quad \underbrace{p(z+dz)}_{p(z)+p'(z)dz+\ldots} A - p(z)\,A - \rho(z)\,A\,dz\,g = 0$$

så att $p'(z)\,dz\,A = \rho(z)\,A\,dz\,g$, dvs. $\boxed{p'(z) = \rho(z)\,g}$ ...(1)

I allmänhet finns det för en fluid ett visst samband mellan tryck p och densitet ρ i en punkt.

Exempel Allmänna gaslagen $p = \frac{nR}{V}T$ dvs. $p \sim \rho$

Viktigt exempel i denna kurs

En inkompressibel fluid (en vätska) har ρ = konstant oberoende av p.

Lösningen till (1) blir då

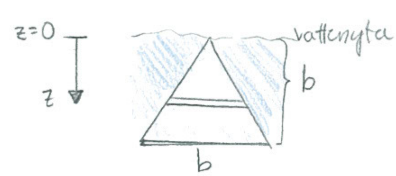
$$p(z) = \rho g z + p_0$$

trycket vid koordinaten $z = 0$

5/192 (annan tolkning)

Vi bestämmer den totala tryckkraften genom att integrera tryckkraftsfördelningen över fönstret.

En strimla på djupet z har bredden



$b = 1$ m
$\rho = 10^3 \, kg/m^3$
(inkompressibelt)

$b \cdot \frac{z}{b} = z$ (horisontellt)

Kraften blir

$$R = \int_{\text{fönstret}} p \, dA = \int_0^b dz \, z \, p(z) = \int_0^b dz \, z \, (\rho g z + p_0)$$

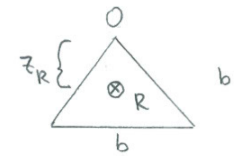
p_0 = yttre lufttrycket

Men om vi är intresserade av tryckskillnaden mellan de två sidorna av glaset så kan vi sätta $p_0 = 0$.

$$= \frac{\rho g b^3}{3}$$

Bestäm det djup z_R där en punktkraft R skall angripa för att vara stelkroppsekvivalent med tryckkraftsfördelningen.

Kraftfördelningens vridmoment m.a.p. O är



$$M_0 = \int_0^b dz\, z\, \rho g z \underbrace{z}_{\text{hävarmen}} = \frac{1}{4}\rho g b^4$$

Detta skall vara lika med punktkraftens vridmoment m.a.p. O som är

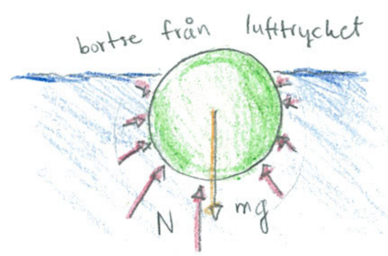
$$M_0 = z_R R = z_R \frac{\rho g b^3}{3}$$ varav fås att $\underline{\underline{z_R = \frac{3}{4} b}}$

Arkimedes princip (Heureka!)

5/188

Frilägg klotet när det ligger på botten.

Det är lite besvärligt att integrera tryckkraften över sfären (olika riktningar i olika punkter).

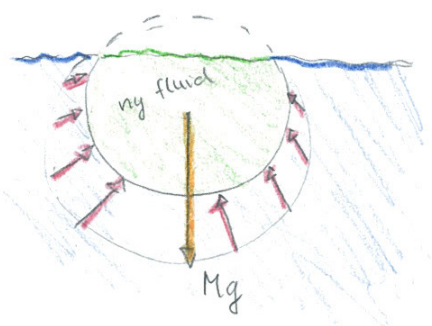


$$m = \rho_s \frac{4\pi r^3}{3}$$

Fantastiskt knep:

Tänk bort sfären och ersätt delvis med mera fluid så att nivån bibehålls:

Frilägg den nya fluiden



$M = \rho_L V$ "den undanträngda vätskans volym"

Tryckkraftsfördelningen från omgivande vätska är oförändrad. Jämvikt säger att

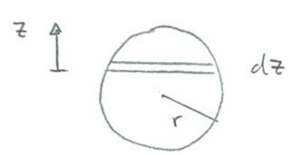
Resultanten till tryckkraftsfördelningen = − (tyngdkraften på den undanträngda fluiden)

Den ursprungliga situationen (kraftjämvikt):

$$\uparrow: \quad N - mg + \underbrace{\rho_L V g}_{\text{vattentryckets resultant}} = 0$$

Vi behöver V uttryckt i h:

$$V = \int_{-r}^{h-r} dz\, \pi(r^2 - z^2) = \pi\left[r^2 z - \frac{1}{3}z^3\right]_{r}^{h-r} =$$



$$= \pi\left(r^2(h-r) - \frac{1}{3}(h-r)^3 + r^3 - \frac{1}{3}r^3\right) =$$

$$= \pi\left(r^2h - r^3 - \frac{1}{3}h^3 + h^2r - hr^2 + \frac{1}{3}r^3 + r^3 - \frac{1}{3}r^3\right) = \pi\left(h^2r - \frac{1}{3}h^3\right)$$

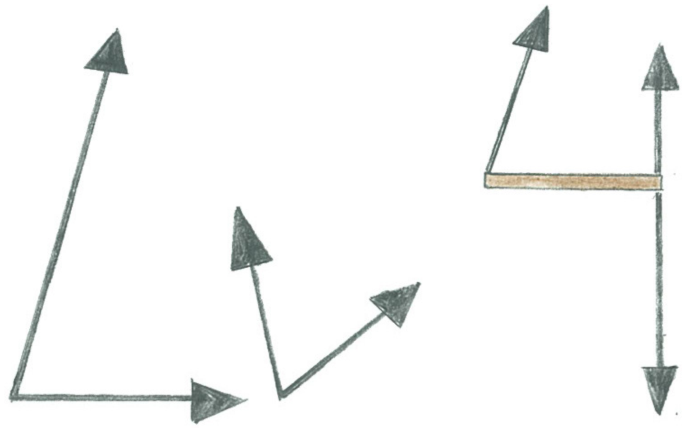
Kontroll: $h = 2r \Rightarrow V = \pi\left(4r^3 - \frac{8}{3}r^3\right) = \frac{4\pi r^3}{3}$

$h = 0 \Rightarrow V = 0$

Insättning ger sambandet

$$N - \rho_s \frac{4\pi r^3}{3} g + \rho_L \pi \left(h^2 r - \frac{1}{3} h^3\right) g = 0$$

Klotet flyter då $N = 0 \Rightarrow \rho_s = \frac{3}{4}\left(\frac{h^2}{r^2} - \frac{1}{3}\frac{h^3}{r^3}\right)\rho_L$



Mekanik 1

Med Måns Henningson

Kinematik

- $\mathbb{r}, \dot{\mathbb{r}}, \ddot{\mathbb{r}}$
- rörelse på en cirkelbana
- Cartesiska koordinater
- polära koordinater
- tangential- och normalkoordinater

Kinematik i tre dimensioner

- $\mathbb{R}, \dot{\mathbb{R}}, \ddot{\mathbb{R}}$
- Cartesiska koordinater
- cylindriska koordinater
- sfäriska koordinater

Relativ rörelse

Tvång

Kraft och acceleration

recept: Hur man löser dynamiktal

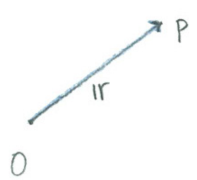
Ett experiment

Måndag
2010-02-08

Kinematik (= rörelsegeometri)

Beskrivning av en kropps rörelse utan att blanda in de krafter som är verksamma.

Vi beskriver läget P för en partikel genom att ge dess ortsvektor $\mathbf{r}$ m.a.p. en "fix" referenspunkt O.



I allmänhet är $\mathbf{r}$ tidsberoende.
Vi definierar hastighetsvektorn

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}$$ och accelerationsvektorn

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} = \ddot{\mathbf{r}}$$

Observera att

$r = |\mathbf{r}|$ = avståndet till O

$v = |\mathbf{v}|$ = farten (hastighetens storlek)

$a = |\mathbf{a}|$ (accelerationens storlek)

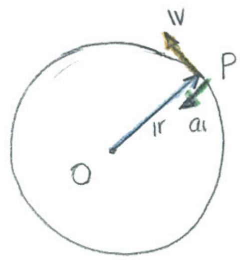
Observera att

$$v = |\mathbf{v}| = |\dot{\mathbf{r}}| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| \neq \frac{d}{dt}|\mathbf{r}| = \frac{d}{dt} r = \dot{r}$$

$$a = |\mathbf{a}| = |\dot{\mathbf{v}}| \neq \frac{d}{dt}|\mathbf{v}| = \frac{d}{dt} v = \dot{v}$$

Exempel

Rörelse på en cirkelbana med radie r och konstant fart v:



$r = |\mathbf{r}| = $ konstant så att $\dot{r} = 0$
men $v = |\mathbf{v}| = $ konstant $\neq 0$
Alltså är $v \neq \dot{r}$

Vidare är $\dot{v} = 0$ men $\mathbf{a} \neq 0$ (riktat mot O)
och alltså är $a = |\mathbf{a}| \neq 0$
Alltså är $a \neq \dot{v}$

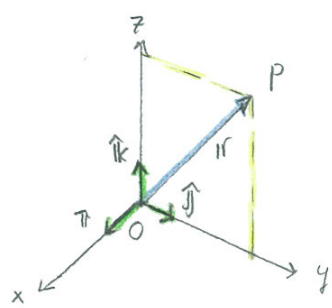
Läs själva om rörelse i en dimension.

I flera dimensioner inför vi basvektorer $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ och $\hat{\mathbf{k}}$ längs koordinataxlarna så att

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

partikelns Cartesiska koordinater

(skriv inte $\mathbf{r} = (x, y, z)$)

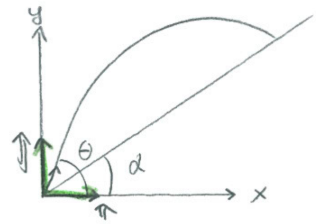


Vi har då

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}} \quad (\text{ty } \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}} \text{ är konstanta})$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

2/100



Givet utgångsfarten v_0, hur skall θ väljas för att stötvidden skall bli så lång som möjligt?

Partikeln har en likformigt accelererad rörelse med

$$\mathbb{a} = -\underbrace{g}_{\text{konstant} = 9{,}8\,\text{m/s}^2}\,\mathbb{j}$$

Hastigheten är

$$\mathbb{v} = -gt\,\mathbb{j} + \underbrace{\mathbb{v}_0}_{\text{hastighet då } t=0 \text{ (utskjutningsögonblicket)}} = -gt\,\mathbb{j} + v_0\underbrace{(\cos\theta\,\mathbb{i} + \sin\theta\,\mathbb{j})}_{\text{enhetsvektor i utgångsriktningen}}$$

Ortsvektorn blir

$$\mathbb{r} = -\frac{g}{2}t^2\,\mathbb{j} + v_0(\cos\theta\,\mathbb{i} + \sin\theta\,\mathbb{j})t + \cancel{\mathbb{r}_0}$$

läge då $t=0$

$$\mathbb{r} = \underbrace{v_0\cos\theta\; t}_{x\text{-koordinat}}\,\mathbb{i} + \underbrace{\left(v_0\sin\theta\, t - \frac{g}{2}t^2\right)}_{y\text{-koordinat}}\mathbb{j}$$

Vid nedslaget är $\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{v_0\sin\theta\, t - \frac{g}{2}t^2}{v_0\cos\theta\, t}$ så att

$$t = \frac{2v_0}{g}(\sin\theta - \tan\alpha\cos\theta)$$

Då är alltså x-koordinaten

$$x_1 = v_0\cos\theta\,\frac{2v_0}{g}(\sin\theta - \tan\alpha\cos\theta)$$

Vi vill välja θ så att x_1 blir så stort som möjligt.

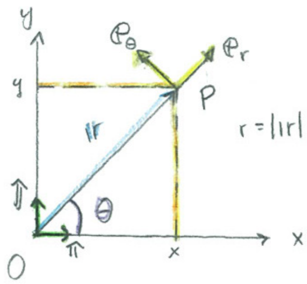
$$\frac{dx_1}{d\theta} = \frac{2v_0^2}{g}\left[-\sin\theta(\sin\theta - \tan\alpha\cos\theta) + \cos\theta(\cos\theta + \tan\alpha\sin\theta)\right] =$$

$$= \frac{2v_0^2}{g}\left[\cos 2\theta + \tan\alpha\sin 2\theta\right] = 0 \quad \text{vid maximum}$$

$$\Rightarrow \tan 2\theta = -\cot\alpha \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{2}$$

Polära koordinater

I <u>två</u> dimensioner kan vi bestämma läget för en punkt P med Cartesiska koordinater (x, y) eller polära koordinater (r, θ) relaterade enligt figuren.



Vi inför även motsvarande basvektorer $\mathbb{i}$, $\mathbb{j}$ respektive $\mathbb{e}_r$, $\mathbb{e}_\theta$

P rör sig alltså i riktningen
- $\mathbb{e}_r$ om r ökar medan θ hålls fix.
- $\mathbb{e}_\theta$ " θ " r "

Vi har $\mathbb{e}_r \cdot \mathbb{e}_r = \mathbb{e}_\theta \cdot \mathbb{e}_\theta = 1$ enhetsvektorer

$\mathbb{e}_r \cdot \mathbb{e}_\theta = 0$ ortogonala

En godtycklig vektor kan skrivas som en linjärkombination av <u>bas</u>vektorerna $\mathbb{i}$ och $\mathbb{j}$. Tillämpa detta på $\mathbb{e}_r$ och $\mathbb{e}_\theta$.

$$\begin{cases} \mathbb{e}_r = \cos\theta\, \mathbb{i} + \sin\theta\, \mathbb{j} \\ \mathbb{e}_\theta = -\sin\theta\, \mathbb{i} + \cos\theta\, \mathbb{j} \end{cases} \quad \text{Eller omvänt:} \quad \begin{cases} \mathbb{i} = \cos\theta\, \mathbb{e}_r - \sin\theta\, \mathbb{e}_\theta \\ \mathbb{j} = \sin\theta\, \mathbb{e}_r + \cos\theta\, \mathbb{e}_\theta \end{cases}$$

I allmänhet rör sig P. r och θ är alltså tidsberoende. Detta gäller även basvektorerna $\mathbb{e}_r$ och $\mathbb{e}_\theta$:

$$\dot{\mathbb{e}}_r = \frac{d}{dt}\left(\cos\theta\,\mathbb{i} + \sin\theta\,\mathbb{j}\right) = \dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\mathbb{i} + \cos\theta\,\mathbb{j}\right) = \dot{\theta}\,\mathbb{e}_\theta$$

konstanta

$$\dot{\mathbb{e}}_\theta = \frac{d}{dt}\left(-\sin\theta\,\mathbb{i} + \cos\theta\,\mathbb{j}\right) = \dot{\theta}\left(-\cos\theta\,\mathbb{i} - \sin\theta\,\mathbb{j}\right) = -\dot{\theta}\,\mathbb{e}_r$$

Vi uttrycker nu vektorerna $\mathbb{r}$, $\mathbb{v}$ och $\mathbb{a}$ i $\mathbb{e}_r$ och $\mathbb{e}_\theta$:

$$\mathbb{r} = r\mathbb{e}_r + \cancel{0\,\mathbb{e}_\theta} = r\mathbb{e}_r$$

$$\mathbb{v} = \frac{d}{dt}\mathbb{r} = \frac{d}{dt}(r\mathbb{e}_r) = \dot{r}\mathbb{e}_r + r\dot{\mathbb{e}}_r = \dot{r}\mathbb{e}_r + r\dot{\theta}\mathbb{e}_\theta$$

$$\mathbb{a} = \frac{d}{dt}\mathbb{v} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\mathbb{e}_r + r\dot{\theta}\mathbb{e}_\theta) = \ddot{r}\mathbb{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbb{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbb{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbb{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbb{e}}_\theta =$$

$$= \ddot{r}\mathbb{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbb{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\mathbb{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbb{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\mathbb{e}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbb{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbb{e}_\theta$$

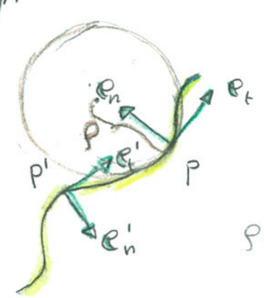
Sammanfattning:

$$\begin{cases} \mathbb{r} = r\mathbb{e}_r \\ \mathbb{v} = v_r\mathbb{e}_r + v_\theta\mathbb{e}_\theta \\ \mathbb{a} = a_r\mathbb{e}_r + a_\theta\mathbb{e}_\theta \end{cases} \quad \text{med} \quad \begin{matrix} v_r = \dot{r} & v_\theta = r\dot{\theta} \\ a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 & a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{matrix}$$

Tabell 4. (Utantill!)

Tangential och normalkoordinater

En partikel rör sig längs en kurva i planet:



ρ = krökningsradie

Vi inför koordinater $\mathbb{e}_t$ i hastighetens riktning

$\mathbb{e}_n$ vinkelrät mot banan riktat mot krökningscentrum

Obs att $\mathbb{e}_n$ byter riktning i banans inflektionspunkter.
Vi uttrycker $\mathbb{v}$ och $\mathbb{a}$ i basen $\mathbb{e}_t$ och $\mathbb{e}_n$:

$$\mathbb{v} = v\mathbb{e}_t$$

se boken

$$\mathbb{a} = \frac{d}{dt}\mathbb{v} = \frac{d}{dt}(v\mathbb{e}_t) = \dot{v}\mathbb{e}_t + v\dot{\mathbb{e}}_t = \frac{v^2}{\rho}\mathbb{e}_n + \dot{v}\mathbb{e}_t$$

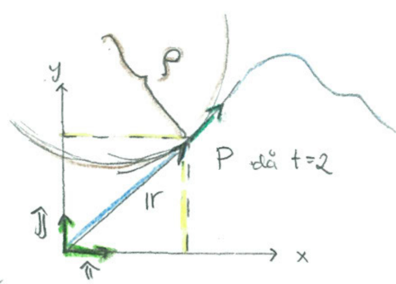
basens momentana krökningsradie

$$\boxed{\begin{cases} \mathbb{v} = v\mathbb{e}_t \\ \mathbb{a} = a_n\mathbb{e}_n + a_t\mathbb{e}_t \end{cases} \quad \text{med } a_n = \frac{v^2}{\rho},\ a_t = \dot{v}}$$

Tabell 5 (utantill!)

2/132

$$\begin{cases} x = 16 - 12t + 4t^2 \\ y = 2 + 15t - 3t^2 \end{cases}$$



Partikelns ortsvektor, hastighet, acceleration är

$$\begin{cases} \mathbb{r} = (16 - 12t + 4t^2)\mathbb{i} + (2 + 15t - 3t^2)\mathbb{j} \\ \mathbb{v} = (-12 + 8t)\mathbb{i} + (15 - 6t)\mathbb{j} \\ \mathbb{a} = 8\mathbb{i} - 6\mathbb{j} \end{cases}$$

vid godtycklig tid.

Då $t=2$: $\begin{cases} \mathbb{v} = 4\mathbb{i} + 3\mathbb{j} \\ \mathbb{a} = 8\mathbb{i} - 6\mathbb{j} \end{cases}$

För att bestämma krökningsradien ρ använder vi tangentiell och normalkoordinater:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_t = \frac{4}{5}\hat{i} + \frac{3}{5}\hat{j} & \text{(enhetsvektor i hastighetens riktning)} \\ \mathbf{e}_n = \frac{3}{5}\hat{i} - \frac{4}{5}\hat{j} & \text{(enhetsvektor } \perp \mathbf{e}_t\text{)} \end{cases}$$

Använd nu $\mathbf{a} = \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n + \dot{v}\,\mathbf{e}_t$ varav följer att

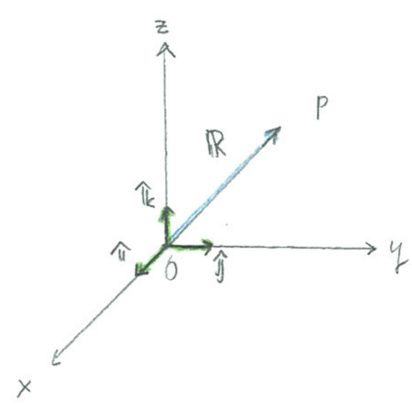
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_n = \frac{v^2}{\rho}$ så att $\rho = \frac{v^2}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_n} = \frac{5^2}{48/5} = \underline{\underline{\frac{125}{48}}}$

Tisdag
2010-02-09

Kinematik (i tre dimensioner)

Välj lämpligt koordinatsystem beroende på problemet

Cartesiska koordinater (x, y, z)



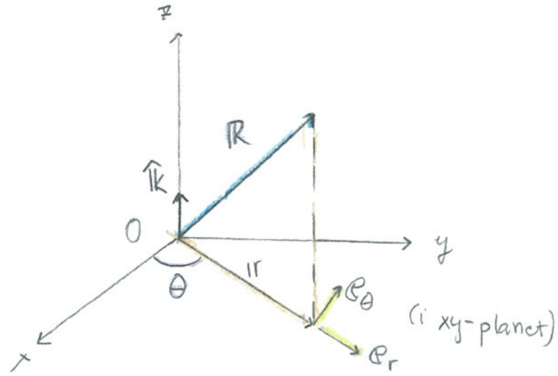
$$\mathbf{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

Cylindriska koordinater (r, θ, z)

$$\begin{cases} \mathbb{R} = \mathbb{r} + z\hat{\mathbb{k}} = r\mathbb{e}_r + z\hat{\mathbb{k}} \\ \mathbb{v} = \dot{r}\mathbb{e}_r + r\dot{\theta}\mathbb{e}_\theta + \dot{z}\hat{\mathbb{k}} \\ \mathbb{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbb{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbb{e}_\theta + \ddot{z}\hat{\mathbb{k}} \end{cases}$$

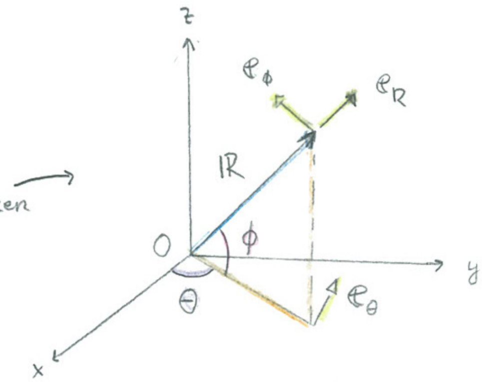


Sfäriska koordinater (R, θ, ϕ) enligt M & K

Vanligare: (r, θ, ϕ)

se matteboken och nästan alla andra böcker.

i boken

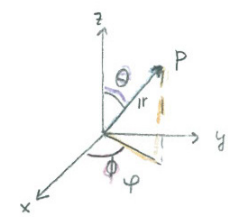


Vi uttrycker $\mathbb{R}$, $\mathbb{v} = \dot{\mathbb{R}}$ och $\mathbb{a} = \mathbb{R}$ i dessa basvektorer:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{R} = R\mathbb{e}_R \\ \mathbb{v} = \dot{R}\mathbb{e}_R + R\dot{\phi}\mathbb{e}_\phi + \dot{\theta}R\cos\phi\,\mathbb{e}_\theta \end{array}\right\}\text{utantill!}$$

$$\mathbb{a} = a_R\mathbb{e}_R + a_\phi\mathbb{e}_\phi + a_\theta\mathbb{e}_\theta$$

se uttryck i boken



"vanligare"

2/178 Bestäm $\dot{R}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ för flygplanet som har den givna rörelsen.

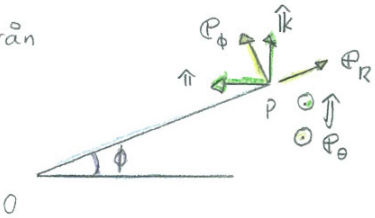
Strategi: uttryck flygplanets hastighet $\mathbf{v}$ i de cartesiska basvektorerna $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ och $\hat{\mathbf{k}}$. Byt sedan bas och uttryck detta $\mathbf{v}$ i de sfäriska basvektorerna $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$

$$\mathbf{v} = (..)\,\mathbf{e}_R + (..)\,\mathbf{e}_\theta + (..)\,\mathbf{e}_\phi$$

Jämför med uttrycket för $\mathbf{v}$ i sfäriska koordinater och bestäm $\dot{R}, \dot{\phi}, \dot{\theta}$

Vi har $\mathbf{v} = v\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\mathbf{k}}\right)$

Framifrån



Basbytet är

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{i}} = \sin\phi\,\mathbf{e}_\phi - \cos\phi\,\mathbf{e}_R \\ \hat{\mathbf{j}} = \mathbf{e}_\theta \\ \hat{\mathbf{k}} = \cos\phi\,\mathbf{e}_\phi + \sin\phi\,\mathbf{e}_R \end{cases}$$

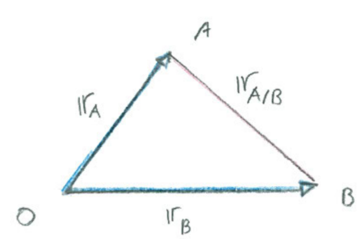
så att $\mathbf{v} = v\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sqrt{5}}(\cos\phi\,\mathbf{e}_\phi + \sin\phi\,\mathbf{e}_R)\right)$

Vi har alltså

$$\begin{cases} \dot{R} = \frac{v}{\sqrt{5}}\sin\phi \\ R\dot{\phi} = \frac{v}{\sqrt{5}}\cos\phi \\ \dot{\theta}R\cos\phi = \frac{2v}{\sqrt{5}} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{R} = \frac{v}{\sqrt{5}}\sin\phi \\ \dot{\phi} = \frac{v}{R\sqrt{5}}\cos\phi \\ \dot{\theta} = \frac{2v}{R\sqrt{5}\cos\phi} \end{cases}$$

Relativ rörelse

Vi har två partiklar A och B med ortsvektor $\mathbf{r}_A$ och $\mathbf{r}_B$ m.a.p. en "fix" punkt O.



Deras (absoluta) hastigheter är $\begin{cases} \mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_A \\ \mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_B \end{cases}$

Absoluta accelerationer $\begin{cases} \mathbf{a}_A = \ddot{\mathbf{r}}_A \\ \mathbf{a}_B = \ddot{\mathbf{r}}_B \end{cases}$

Vi inför A's ortsvektor relativt B $\quad \mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$

" hastighet " $\quad \mathbf{v}_{A/B} = \dot{\mathbf{r}}_{A/B} = \dot{\mathbf{r}}_A - \dot{\mathbf{r}}_B = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$

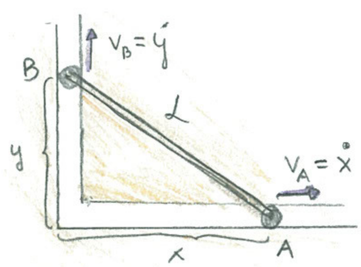
" acceleration " $\quad \mathbf{a}_{A/B} = \dots$

Tvång (constraint)

Ibland är rörelserna för två partiklar A och B relaterade genom ett <u>tvångsvillkor</u>.

Exempel

A och B kan röra sig i horisontella respektive vertikala spår och är förenade genom en stång med längden L.
fixa

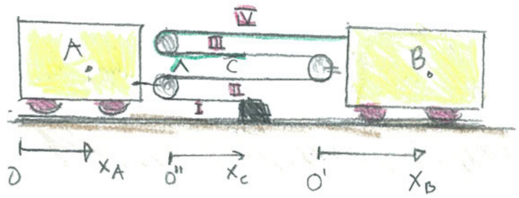


Enligt Pythagoras sats: $x^2 + y^2 = L^2$

Ta tidsderivatan:

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0 \quad \text{så att} \quad v_A = -\frac{y}{x} v_B$$

2/230



0, 0', 0'' fixa

Absoluta hastigheter och accelerationer för A, B och C.

$v_A = \dot{x}_A \qquad v_B = \dot{x}_B \qquad v_c = \dot{x}_c$

$a_A = \ddot{x}_A \qquad a_B = \ddot{x}_B \qquad a_c = \ddot{x}_c$

Tvångsvillkor:

Linans konstanta längd $= \underbrace{\text{konstant} - x_A}_{\text{I}} + \underbrace{x_B - x_A}_{\text{II}} + \underbrace{x_B - x_A}_{\text{III}} + \underbrace{x_B - x_A}_{\text{IV}} =$

$= 3x_B - 4x_A + \text{konstant}$

Konstant längd av andra delen av linan $= \underbrace{x_c - x_A}_{\Lambda} + \underbrace{x_B - x_A}_{\text{IV}} + \text{konstant} =$

$= x_B + x_c - 2x_A + \text{konstant}$

lambda →

Tag tidsderivator: $\begin{cases} 0 = 3v_B - 4v_A \\ 0 = v_B + v_c - 2v_A \end{cases}$ igen: $\begin{cases} 0 = 3a_B - 4a_A \\ 0 = a_B + a_c - 2a_A \end{cases}$

Alltså är $\begin{cases} v_A = \frac{3}{4} v_B \\ v_c = \frac{1}{2} v_B = \frac{1}{2} \cdot 2 m/s = 1 m/s \end{cases}$

$\begin{cases} a_A = \frac{3}{4} a_B \\ a_c = \frac{1}{2} a_B \end{cases}$

$v_{B/A} = v_B - v_A = \frac{1}{4} v_B =$

$= \frac{1}{4} 2m/s = 0{,}5 m/s$

$a_{B/A} = a_B - a_A = \frac{1}{4} a_B = \frac{1}{4} 3m/s^2 = 0{,}75 m/s^2$

Torsdag
2010-02-11

Kraft och acceleration

Mekanik = läran om sambandet mellan materiella kroppars rörelse och deras ömsesidiga växelverkan.

En kropp med massa $\underline{m}$ växelverkar med andra kroppar och utsätts därvid för en resulterande kraft $\mathbb{F}$ (tidsberoende). Den rör sig med accelerationen $\underline{\mathbb{a}}$. Då gäller Newtons andra lag

$$\mathbb{F} = m\mathbb{a}$$

Hur man löser dynamiktal:

1) Dela upp systemet i lämpliga delkroppar.
2) Frilägg delkropparna separat.

precis som i statiken

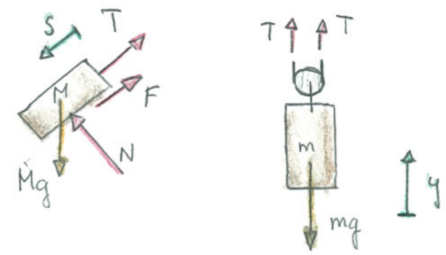
3) Ställ upp Newton II för varje delkropp separat.
4) Ställ upp eventuella tvångsvillkor och friktionsvillkor (kinetisk friktion).

ger ett antal ekvationer

5) Lös ut de efterfrågade storheterna.

3/27

Frilägg A och B separat.



Ställ upp Newton II för A och för B.

$\nearrow$: $T + F - \frac{1}{2}Mg = M(-\ddot{s})$

$\nwarrow$: $N - \frac{\sqrt{3}}{2}Mg = 0$

$\uparrow$: $2T - mg = m\ddot{y}$

Tvångsvillkor: $s + 2y =$ konstant (Linans längd $= s - 2y +$ konstant)
så att $\ddot{s} - 2\ddot{y} = 0$

Antag att jämvikt råder. Sätt $\ddot{s} = \ddot{y} = 0$.
3 ekvationer, 3 obekanta (T, F, N). Lös! Kontrollera om $\frac{F}{N} < \mu_s$.
Med givna data är detta inte fallet. Antagandet var alltså felaktigt. Kropparna rör sig.

Friktionsvillkor: $F = \mu_k N$. (förutsatt att $\ddot{s} > 0$) 5 ekvationer, 5 obekanta $(T, F, N, \ddot{s}, \ddot{y})$. Lös!

$$\begin{cases} N = \frac{\sqrt{3}}{2}Mg \\ F = \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_k Mg \end{cases} \qquad \begin{cases} T + F - \frac{1}{2}Mg = -2M\ddot{y} \\ 2T - mg = m\ddot{y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad m(T + F - \tfrac{1}{2}Mg) + 2M(2T - mg) = 0$$

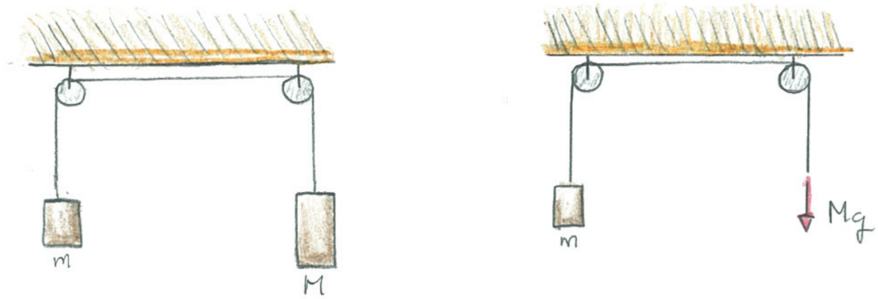
$$\Rightarrow \quad (4M + m)T = \tfrac{5}{2}mMg - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mu_k mMg$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{mM}{4M+m}g\left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_k\right)$$

?

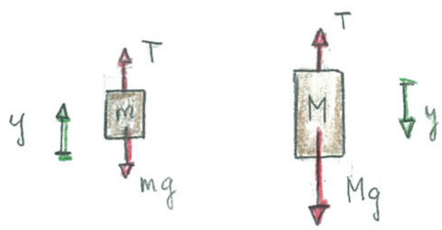
Glöm inte att kontrollera att $\ddot{s} > 0$.
I annat fall är rörelsen åt andra hållet.
(Använd då friktionsvillkoret $F = -\mu_k N$ istället.)
Kontrollera även att $T > 0$ (spännkraft i linan).

Ett experiment



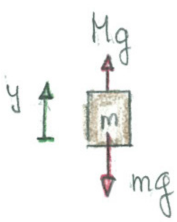
Båda systemen startar i vila. Vilket rör sig snabbast?

Frilägg:



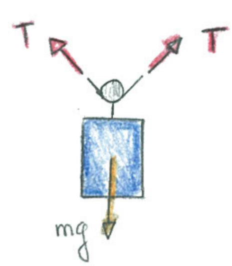
$$\uparrow: \ T - mg = m\ddot{y}$$
$$\uparrow: \ T - Mg = M(-\ddot{y})$$
$$\Rightarrow -mg + Mg = m\ddot{y} + M\ddot{y}$$

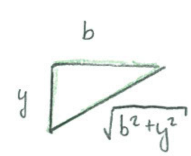
$$\Rightarrow \ddot{y} = \frac{M-m}{M+m} g$$ långsammare



$$\uparrow: \ Mg - mg = m\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} = \frac{M-m}{m} g$$ snabbare

3/48 Frilägg massan och trissan med två linstumpar:





Ställ upp Newton II för denna kropp.

$\uparrow$: $-mg + 2T\dfrac{y}{\sqrt{b^2+y^2}} = m(-\ddot{y})$

Vi behöver bestämma $\ddot{y}$. Linans längd till kanten $= 2\sqrt{b^2+y^2} + s$

Ta tidsderivata: $0 = \dfrac{2y\dot{y}}{\sqrt{b^2+y^2}} + v$

En gång till: $0 = \dfrac{2\dot{y}^2}{\sqrt{b^2+y^2}} + \dfrac{2y\ddot{y}}{\sqrt{b^2+y^2}} - \dfrac{2y^2\dot{y}^2}{(b^2+y^2)^{3/2}}$

Alltså är

$$\dot{y} = -\frac{\sqrt{b^2+y^2}}{2y}v$$

$$\ddot{y} = \frac{\sqrt{b^2+y^2}}{2y}\left(\frac{2y^2\dot{y}^2}{(b^2+y^2)^{3/2}} - \frac{2\dot{y}^2}{\sqrt{b^2+y^2}}\right) = \frac{\sqrt{b^2+y^2}}{2y}\,\frac{2y^2-2(b^2+y^2)}{(b^2+y^2)^{3/2}}\,\dot{y}^2 =$$

$$= \frac{-2b^2}{2y(b^2+y^2)}\dot{y}^2 = \frac{-2b^2}{2y(b^2+y^2)}\,\frac{b^2+y^2}{4y^2}v^2 = -\frac{b^2}{4y^3}v^2$$

Insättning i Newton II ger

$$T = \frac{\sqrt{b^2+y^2}}{2y}m(g-\ddot{y}) = \frac{m}{2y}\sqrt{b^2+y^2}\left(g + \frac{b^2}{4y^3}v^2\right) \sim \frac{mb^3}{8y^4}v^2 \text{ för små } y$$

Lv5

Mekanik 1

Med Måns Henningson

Kroklinjig rörelse

massa massa exempel

Arbete och kinetisk energi

$$\Delta K = U = \int_{\gamma} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}, \quad \frac{d}{dt} K = \mathbb{F}\cdot \mathbb{v}, \quad dK = \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = dU$$

effekt
verkningsgrad
exempel

Potentiell energi

konservativa kraftfält

$\mathbb{F}(\mathbb{r}) = -\nabla U(\mathbb{r})$

Exempel på konservativa kraftfält med tillhörande potentialer

1) homogent tyngdkraftsfält
2) inhomogent tyngdkraftsfält
3) linjär fjäder

$K_A + U_A = K_B + U_B$ ($E_A = E_B$: energiprincipen!)

exempel

Måndag
2010-02-15

Kroklinjig rörelse

Repetition:

massan för en viss kropp

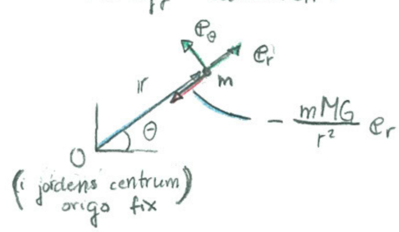
$$\mathbb{F} = m\,\mathbb{a}$$ ← kroppens acceleration

summan av alla krafter som verkar på kroppen genom dess växelverkan med <u>andra kroppar.</u>

Denna vektorekvation kan analyseras i olika koordinatsystem (Cartesiska, polära, cylindriska, sfäriska, ...)

3/70

Friläqq satelliten:



(I en annan formalism tar man även med så kallade "fiktiva" krafter t.ex. "centrifugalkraften".)

Ställ upp Newton II för satelliten:

$$\underbrace{-\frac{mMG}{r^2}e_r}_{\mathbb{F}} = m\left((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})e_\theta\right)$$

Vi får alltså ekvationerna

$$\begin{cases} -\dfrac{mMG}{r^2} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ 0 = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \end{cases}$$

Vi inskränker oss till cirkulära banor, $r = r_0 =$ konstant

Ekvationerna förenklas till

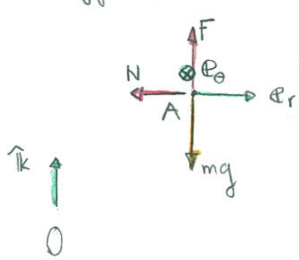
$$\begin{cases} -\dfrac{MG}{r_0^2} = -r_0\dot{\theta}^2 & \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \omega = \sqrt{\dfrac{MG}{r_0^3}} \\ 0 = mr\ddot{\theta} & \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \omega = \text{konstant} \end{cases}$$

vinkelhastighet

fart $v = r\omega$

omloppstiden $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

3/75 Frilägg partikeln A:



Ställ upp Newton II i cylindriska koord.

$$-Ne_r + (F - mg)\hat{k} = m\left((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})e_\theta + \ddot{z}\hat{k}\right)$$

Då partikeln inte glider har vi

$$\begin{cases} r = \text{konstant} & \text{(tunnans radie)} \\ \dot{\theta} = \omega = \text{konstant} & \text{(den sökta vinkelhastigheten)} \\ z = \text{konstant} & \text{(höjden)} \end{cases}$$

I gränsfallet gå glidning precis sker har vi friktionsvillkoret

$F = \mu_s N$

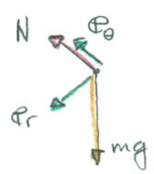
Vi får ekvationerna:

$$\begin{cases} -N = -mr\omega^2 \\ \mu_s N - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{N}{mr}} = \sqrt{\frac{g}{\mu_s r}}$$

3/100

Frilägg partikeln i röret

$\cdot\ O$



Ställ upp Newton II :

$$-N e_\theta + mg(e_\theta \cos\theta + e_r \sin\theta) = m\left((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})e_\theta\right)$$

dvs.

$$\begin{cases} -N + mg\cos\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \\ g\sin\theta = \ddot{r} - r\omega_0^2 \end{cases}$$

Lös differentialekvationen

$$\ddot{r} - r\omega_0^2 = g\sin\omega_0 t \qquad \text{(start vid } t=0\text{)}$$

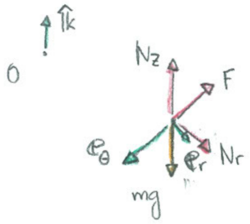
Den allmänna lösningen är $r = \underbrace{A}_{\text{godtyckliga konstanter}} e^{\omega_0 t} + B e^{-\omega_0 t} - \frac{g}{2\omega_0^2}\sin\omega_0 t$

$r = 0$ och $\dot{r} = 0$ då $t = 0$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{g}{2\omega_0^2}(\sinh\omega_0 t - \sin\omega_0 t)$$

3/101

Frilägg ringen:



Ställ upp Newton II: cylindriska koordinater

$$N_r e_r \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vid rörelse i} \\ \text{positiv } \theta\text{-led}}}{-} F e_\theta + (N_z - mg)\hat{k} =$$

$$= m\left((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})e_\theta + \ddot{z}\hat{k}\right)$$

Vi har $\begin{cases} r = \text{konstant} \\ z = \text{konstant} \end{cases}$ Vi får ekvationerna $\begin{cases} N_r = -mr\dot{\theta}^2 \\ -F = mr\ddot{\theta} \\ N_z - mg = 0 \end{cases}$

Vidare har vi kinetisk friktion

$$F = \mu_k N = \mu_k \sqrt{N_r^2 + N_z^2}$$

Vi får alltså $\ddot{\theta} = -\frac{F}{mr} = -\frac{\mu_k \sqrt{N_r^2 + N_z^2}}{mr} = -\frac{\mu_k}{mr}\sqrt{(mg)^2 + (-mr\dot{\theta}^2)^2}$

$$= -\frac{\mu_k}{r}\sqrt{g^2 + r^2\dot{\theta}^4}$$

Med $\dot{\theta} = \omega$ (vinkelhastigheten) har vi

$$\dot{\omega} = -\frac{\mu_k}{r}\sqrt{g^2 + r^2\omega^4}$$

Den sökta båglängden är $s = r\underbrace{\theta}_{\text{totala vridningsvinkeln}} = r\int_{\text{start}}^{\text{slut}} d\theta = r\int \omega\, dt$

$$\frac{d\omega}{\dot{\omega}} = \frac{d\omega}{d\omega/dt} = dt$$

$$\dot{\omega} = \frac{v_0}{r} \text{ vid start}$$

$$= r\int \omega \frac{d\omega}{\dot{\omega}} = -\frac{r^2}{\mu_k}\int \frac{\omega\, d\omega}{\sqrt{g^2 + r^2\omega^4}}$$

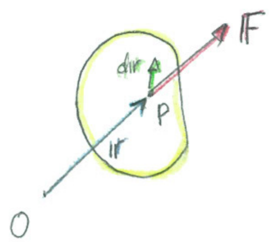
$$= -\frac{r^2}{\mu_k}\left[\frac{1}{2r}\ln\frac{r\omega^2 + \sqrt{g^2 + r^2\omega^4}}{g}\right]_{\text{start}}^{\text{slut}} = -\frac{r}{2\mu_k}\left(0 - \ln\frac{v_0^2/r + \sqrt{g^2 + v_0^4/r^2}}{g}\right) =$$

$$= \frac{r}{2\mu_k}\ln\frac{v_0^2 + \sqrt{(gr)^2 + v_0^4}}{gr}$$

Tisdag
2010-02-16

Arbete och kinetisk energi

En materiell kropp påverkas av en kraft $\mathbb{F}$.



Om angreppspunkten P's ortsvektor ändras med $d\mathbb{r}$ så säger vi att kraften uträttar ett infinitesimalt arbete

$$dU = \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$

på kroppen.

Observera att

$dU > 0$ om $d\mathbb{r}$ har en komponent i $\mathbb{F}$'s riktning
$dU < 0$ ——— " ——— $-\mathbb{F}$'s riktning
$dU = 0$ om $d\mathbb{r}$ är vinkelrät mot $\mathbb{F}$.

Under ett helt förlopp säger vi att en (tids- och/eller rumsberoende) kraft $\mathbb{F}$ uträttar ett arbete

$$U = \int dU = \int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} \overset{\text{i Cartesiska koord.}}{=} \int_\gamma \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right) = \int_{s_0}^{s_1} ds \left(F_x \frac{dx}{ds} + F_y \frac{dy}{ds} + F_z \frac{dz}{ds} \right)$$

γ ges av funktioner $x(s), y(s), z(s)$, $s_0 \leq s \leq s_1$

på kroppen då angreppspunkten P förflyttas längs en kurva γ i rummet.

Vi säger att en materiell kropp med massa m och hastighet $\mathbb{v}$ har den kinetiska energin

$$K = \frac{1}{2} m \mathbb{v} \cdot \mathbb{v} = \frac{1}{2} m v^2$$

Vi beräknar tidsderivatan av den kinetiska energin:

$$\boxed{\frac{d}{dt}K = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\mathbb{v}\cdot\mathbb{v}\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbb{v}}{dt}\cdot\mathbb{v} + \mathbb{v}\cdot\frac{d\mathbb{v}}{dt}\right) = m\dot{\mathbb{v}}\cdot\mathbb{v} = m\mathbb{a}\cdot\mathbb{v} = \mathbb{F}\cdot\mathbb{v}}$$

där $\mathbb{F}$ = totala yttre kraften som verkar på kroppen.
Vi multiplicerar med dt:

$$dK = \mathbb{F}\cdot\mathbb{v}\,dt = \mathbb{F}\cdot \underbrace{d\mathbb{r}}_{\text{kroppens infinitesimala förflyttning}} = dU$$

Alltså:

Ändring av kroppens kinetiska energi =

= Av yttre krafter på kroppen uträttat arbete

Under ett förlopp från tillstånd 0 till tillstånd 1 har vi

$$\underbrace{K_1 - K_0}_{\substack{\text{ändring av}\\ \text{kinetisk energi}}} = \Delta K = \int_{\text{förloppet}} dK = \int dU = \int_{\gamma} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$$

vid förflyttning längs kurva γ.

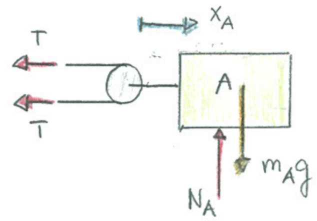
Storleken $\mathbb{F}\cdot\mathbb{v} = P$ kallas för tillförd <u>effekt</u> (power).
(Enhet Nm/s = J/s = W watt)

Effekt = Ändring av energi / tidsenhet

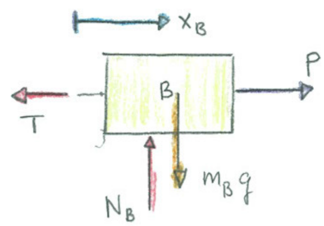
$$\text{Verkningsgrad} = \frac{\text{Nyttig energi}}{\text{Tillförd energi}}$$

3/139

Frilägg vagnarna separat.



<u>Vagn A</u>: Endast spännkraften $2T$ uträttar arbete på A. (N_A och $m_A g$ är $\perp$ mot dir)



<u>Vagn B</u>: Endast spännkraften T och dragkraften P uträttar arbete på B.

Men $dx_B = -2dx_A$ p.g.a. tvångsvillkoret

Så av spännkrafter uträttat arbete på A +
———— " ———— på B = 0

För det <u>sammansatta systemet</u> A+B gäller alltså att

Ändring i kinetisk energi = Av dragkraften P uträttat arbete

Detta arbete är $U = P\Delta x_B = P(-2\Delta x_A)$

Ursprunglig kinetisk energi $= 0$ (start i vila)
Slutlig ———— " ———— $= \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B(-2v_A)^2 =$

$$= \left(\frac{1}{2}m_A + 2m_B\right)v_A^2$$

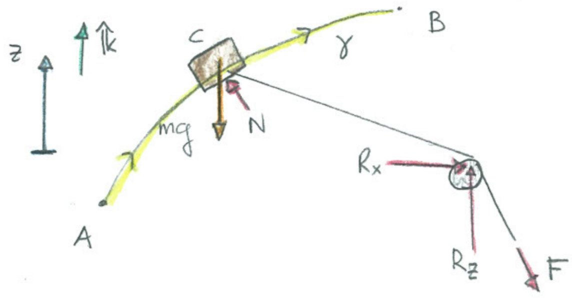
Ändring i kinetisk energi = Uträttat arbete, dvs.

$$P(-2\Delta x_A) = \left(\frac{1}{2}m_A + 2m_B\right)v_A^2 \Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{P(-2\Delta x_A)}{\frac{1}{2}m_A + 2m_B}}, \quad v_B = 2v_A$$

Sätt
$$\begin{cases} \Delta x_A = -0{,}4\,\text{m} \\ P = 40\ \text{N} \\ m_A = 6\ \text{kg} \\ m_B = 10\ \text{kg} \end{cases}$$

3/143

Frilägg ringen med linan och trissan i ett godtyckligt ögonblick under förloppet.



Endast tyngdkraften mg och dragkraften F uträttar arbete på systemet.
(Angreppspunkten för R_x och R_y ligger stilla, N är alltid $\perp$ mot förflyttningen.)

Av tyngdkraften uträttat arbete

$$U_{tyngd} = \int_\gamma (-mg \Uparrow k) \cdot (\Uparrow i\, dx + \cancel{\Uparrow j\, dy} + \Uparrow k\, dz) = \int_\gamma (-mg)\, dz = -mg(z_B - z_A) < 0$$

i planet

Av dragkraften uträttat arbete

$$U_{drag} = F s = F(\sqrt{17}\, a - \sqrt{2}\, a) = F(\sqrt{17} - \sqrt{2})a \qquad \text{där } a = 200 \text{ mm}$$

indragen snörlängd

Ändring i kinetisk energi $= K_B - K_A = \frac{1}{2} m v_B^2 - 0$

kroppen C's hastighet i läge B

start i vila

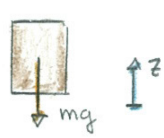
Det skall alltså gälla att

$$-mg\, 2a + F(\sqrt{17} - \sqrt{2})a = \frac{1}{2} m v_B^2 \quad \Rightarrow \quad F = \ldots$$

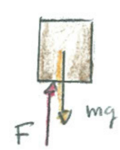
$z_B - z_A$

3/140

Frilägg cylindern under fritt fall



och under den senare fasen



z = 0 då vikten träffar plattan

Av tyngdkraften uträttat arbete (under hela förloppet)

$$U_{tyngd} = \int (-mg)\, dz = mg(d + \delta)$$

> 0 tillför energi

($d = 100$ mm)

Av fjädern uträttat arbete (under den senare fasen)

$$U_{\text{fjäder}} = \int_0^{-\delta} F(z)\,dz = \int_0^{-\delta} k(-z+a)\,dz = \left[k\left(-\tfrac{1}{2}z^2 + az\right)\right]_0^{-\delta} = k\left(\tfrac{-1}{2}\delta^2 - a\delta\right)$$

kraften minskar med ökande z (kraften = 0 då $z = a$ (ospänd fjäder))

($a = 50$ mm) < 0 upptar energi

Kinetisk energi är noll vid både start och slut. Vi får alltså

$$0 = U_{\text{tyngd}} + U_{\text{fjäder}} = mg(d+\delta) - k\left(\tfrac{1}{2}\delta^2 + a\delta\right)$$ varur δ bestäms.

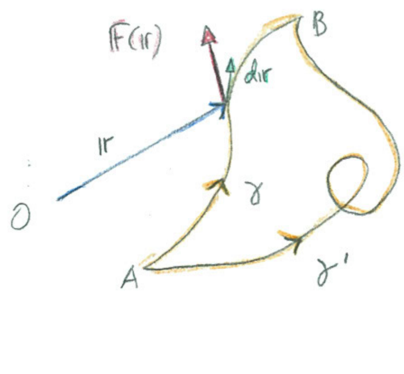
(Använd den positiva lösningen.)

Potentiell energi

Torsdag 2010-02-18

Ett kraftfält, dvs. en lägesberoende kraft $\mathbb{F}(\mathbb{r})$, uträttar vid förflyttning av angreppspunkten längs en kurva γ från A till B ett arbete

$$U_\gamma = \int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$



I allmänhet beror U_γ av kurvan γ.

Men för vissa speciella kraftfält $\mathbb{F}(\mathbb{r})$ beror arbetet bara på start- och slutpunkterna A och B.

$$U_\gamma = U_{\gamma'}$$

Sådana kraftfält kallas för <u>konservativa</u> eller <u>exakta</u>.

Dåliga nyheter: De flesta kraftfält är <u>inte</u> konservativa.

Goda nyheter: Många intressanta kraftfält <u>är</u> konservativa.

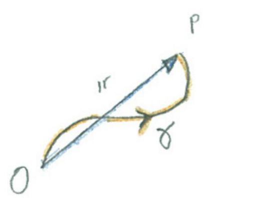
<u>Om</u> $\mathbb{F}(\mathbb{r})$ är ett konservativt kraftfält, så kan vi införa en skalär funktion $U(\mathbb{r})$ som kallas för kraftfältets potentiella energi. Det skall gälla att

$$\mathbb{F}(\mathbb{r}) = -\nabla U(\mathbb{r}) = -\operatorname{grad} U(\mathbb{r})$$

Vi tar nämligen $U(\mathbb{r}) = -\int_0^{\mathbb{r}} \mathbb{F}(\mathbb{r}')\cdot d\mathbb{r}'$

[integral längs godtycklig kurva från referenspunkt O till punkt P med ortsvektor $\mathbb{r}$.]

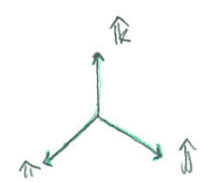
Byte av referenspunkt lägger en konstant till $U(\mathbb{r})$ som alltså bara är väldefinierad upp till en additiv konstant.



Exempel på konservativa kraftfält med tillhörande potentialer

"uppåt"

1) Det homogena tyngdkraftfältet $\mathbb{F} = -mg\hat{\mathbb{k}}$

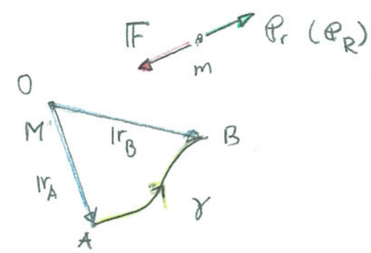


Potential $U(\mathbb{r}) = -\int_\gamma (-mg\hat{\mathbb{k}})\cdot(dx\hat{\mathbb{i}} + dy\hat{\mathbb{j}} + dz\hat{\mathbb{k}})$ [γ = kurva från O till punkten P med ortsvektor $\mathbb{r}$]

$$= mg\int_\gamma dz = mg(\underbrace{z_p}_{\text{z-koordinaten för } \mathbb{r}} - z_0) = mgz + \text{konstant}$$

2) Det inhomogena tyngdkraftsfältet $\mathbb{F}(\mathbb{r}) = -\frac{mMG}{r^2}\mathbb{e}_r$

Arbete vid förflyttning från $\mathbb{r}_A$ till $\mathbb{r}_B$ längs kurva γ



$$U_\gamma = \int_\gamma \mathbb{F}(\mathbb{r})\,d\mathbb{r} =$$

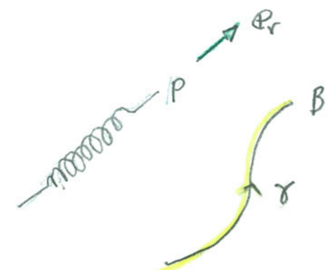
$$= -mMG\int_\gamma \frac{1}{r^2}\mathbb{e}_r\cdot(dr\,\mathbb{e}_r + r\,d\theta\,\mathbb{e}_\theta)$$

$$= -mMG\int_\gamma \frac{1}{r^2}dr = -mMG\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = mMG\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

oberoende av γ. Potentiell energi $U(\mathbb{r}) = -\frac{mMG}{r} + \text{konstant}$ väljs ofta $=0$

3) En linjär fjäder med fjäderkonstant k och ospänd längd l_0 fäst i origo. Kraft på föremål i P:

$$\mathbb{F}(\mathbb{r}) = -\underbrace{k(r-l_0)}_{\substack{\text{fjäderns förlängning} \\ \text{(eller förkortning)}}}\mathbb{e}_r$$



Beräkna arbetet $U_\gamma = -k\int_\gamma (r-l_0)\,dr =$

$$= -\frac{k}{2}\left((r_B-l_0)^2 - (r_A-l_0)^2\right)$$

Potentiell energi $U(\mathbb{r}) = \frac{k}{2}(r-l_0)^2 + \cancel{\text{konstant}}$

En partikel med massa m påverkas enbart av ett konservativt kraftfält $\mathbb{F}(\mathbb{r})$ med potentiell energi $U(\mathbb{r})$. Vid förflyttning längs kurva γ från A till B gäller att

$$\underbrace{K_B - K_A}_{\text{ändring i kinetisk energi}} = \int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = -U_B + U_A \qquad \left[K = \frac{m}{2} v^2\right]$$

samband mellan arbete och kinetisk energi

konservativt kraftfält

Alltså gäller $K_B + U_B = K_A + U_A$, det vill säga $E_B = E_A$ där

$E = K + U$ = kroppens totala mekaniska energi

"Energiprincipen"

Mer allmänt: En kropp påverkas dels av ett konservativt kraftfält med potential U och dels av övriga krafter $\mathbb{F}_{\text{övr}}$ (godtyckliga). Då har vi

$$\underbrace{\int_\gamma \mathbb{F}_{\text{övr}} \cdot d\mathbb{r}}_{\text{Av } \mathbb{F}_{\text{övr}} \text{ uträttat arbete}} = E_B - E_A = \text{ändring i kroppens totala mekaniska energi}$$

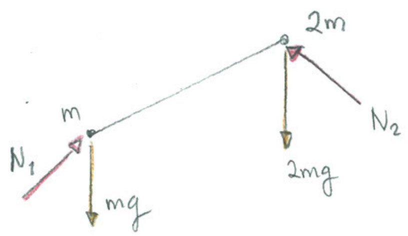
där $E = K + U$

kinetisk

potential för konservativa krafter

3/182

Frilägg de båda massorna och stången tillsammans:



Endast de konservativa tyngdkrafterna uträttar arbete på systemet.

Med nollnivå då $\theta = 0$ har vi potentiell energi

$$U = mgr(1-\cos\theta) - 2mgr\sin\theta .$$

och kinetisk energi $K = \frac{m}{2}v^2 + \frac{2m}{2}v^2 = \frac{3m}{2}v^2$

Total mekanisk energi $E = K + U = \text{konst.}$

Enligt begynnelsevillkor är $E = 0$

Alltså är $v = \sqrt{gr\frac{2}{3}(\cos\theta + 2\sin\theta - 1)}$

Då $\theta = 45°$: $v = \sqrt{gr}\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)} = \sqrt{gr}\sqrt{\sqrt{2} - \frac{2}{3}} =$

$= \sqrt{gr}\sqrt{1{,}414 - 0{,}667} = \sqrt{gr}\sqrt{0{,}747} = \sqrt{gr}\sqrt{1 - 0{,}253} =$

$= \sqrt{gr}\left(1 - \frac{1}{2}0{,}253 + \dots\right) = \sqrt{gr}(1 - 0{,}126) = \sqrt{gr}\ 0{,}874$

c) Maximalt utslag då $v = 0 \Rightarrow U = 0 \Rightarrow 2\sin\theta + \cos\theta = 1$

$2\sin\theta \pm \sqrt{1-\sin^2\theta} = 1 \Rightarrow 1 - \sin^2\theta = 1 - 4\sin\theta + 4\sin^2\theta$

$\Leftrightarrow \sin\theta = 0$ eller $\sin\theta = \frac{4}{5}$

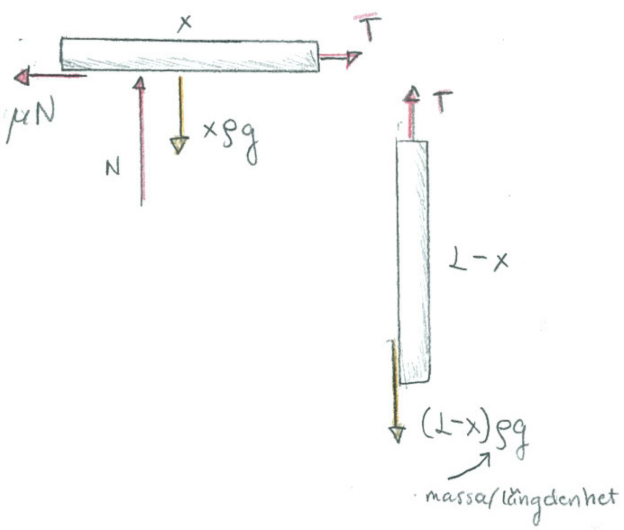
$\uparrow$ start $\qquad \uparrow$ vändläget $\Rightarrow \theta = 127°$

b) Maximal hastighet $v = \sqrt{gr}\sqrt{\frac{2}{3}(\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi) - 1)}$

$$\leq \sqrt{gr}\sqrt{\frac{2}{3}(\sqrt{5}-1)} = 0{,}908\sqrt{gr}$$

3/179

Frilägg horisontell och vertikal del separat då det återstår en längd x på bordet.



Vid starten skall vi ha gränsfall för jämvikt, dvs.

$$\begin{cases} T = (L-x)\rho g \\ T = \mu x \rho g \end{cases} \Rightarrow L - x = \mu x$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{L}{1+\mu}$$

Kontroll:

$\mu = 0 \Rightarrow x = L$

$\mu \to \infty \Rightarrow x \to 0$

$L - b = \frac{L}{1+\mu}$ så att

$b = \frac{\mu L}{1+\mu}$ från början nedanhängande del

Betrakta hela systemet. Endast friktionskraften och $\underbrace{\text{tyngdkraften på vertikala delen}}_{\text{konservativ}}$ uträttar arbete.

Av friktionskraften uträttat arbete under hela förloppet

$$U_{frik} = -\int^{\frac{L}{1+\mu}} \mu x \rho g \, dx = -\mu \rho g \frac{1}{2} \left(\frac{L}{1+\mu}\right)^2$$

Ändring i potentiell energi $= \underbrace{L\rho g\left(-\frac{L}{2}\right)}_{\text{slutlig potentiell energi relativt bordet}} - \underbrace{b\rho g\left(-\frac{b}{2}\right)}_{\text{ursprunglig potentiell energi}} =$

$$= \frac{\rho g}{2}(b^2 - L^2) = \frac{\rho g}{2}\left(\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^2 - 1\right)L^2 = -\frac{\rho g}{2}\frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2}L^2$$

Ändring av kinetisk energi är $\frac{1}{2}L\rho v^2 - 0 = \frac{1}{2}L\rho v^2$

Det skall enligt energiprincipen gälla att

$$-\mu\rho g \frac{1}{2}\frac{L^2}{(1+\mu)^2} = \frac{1}{2}L\rho v^2 - \frac{1}{2}\rho g \frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2}L^2$$

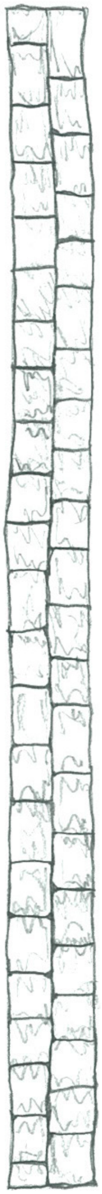
Varur fås att

$$v = \sqrt{gL\left(\frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2} - \frac{\mu}{(1+\mu)^2}\right)} = \sqrt{\frac{gL}{1+\mu}}$$

Lv6

Mekanik 1

Med Måns Henningson



Rörelsemängd, stötförlopp

tillämpning på stötförlopp

typexempel

relativa hastigheter

e : stötkoefficient

exempel

Rörelsemängdsmoment

$\mathbb{H}_0 = \mathbb{r} \times (m\mathbb{v})$

$\dot{\mathbb{H}}_0 = \mathbb{M}_0$

jämförelse: arbete, impuls, ..

Centralrörelse

centralkraft

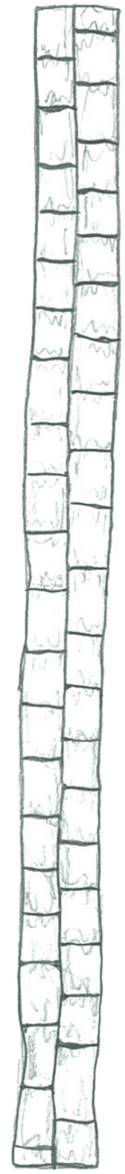
Reduktion av tvåkropparsproblemet

Partikelsystem

$\mathbb{r}_G = \frac{1}{m_1 + m_2 + ..} (m_1 \mathbb{r}_1 + m_2 \mathbb{r}_2 + ..)$

$\mathbb{P} = m\mathbb{v}_G$

$\dot{\mathbb{H}}_G = \mathbb{M}_G$



Måndag
2010-02-22

Rörelsemängd, stötförlopp

En partikel med massa m har hastighet $\mathbb{v}$.
Den har då rörelsemängden ((linear) momentum)

$$\mathbb{G} = m\mathbb{v} \qquad \text{(vanligare beteckning: } \mathbb{P})$$

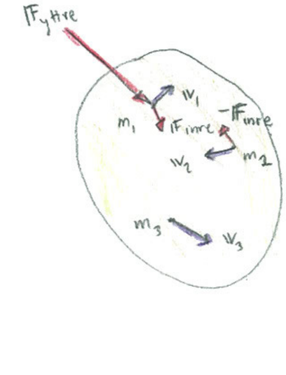
Antag att partikeln påverkas av en resulterande kraft $\mathbb{F}$.
Eftersom massan m är konstant kan Newton II skrivas

$$\mathbb{F} = \dot{\mathbb{G}} \qquad \left(= \frac{d}{dt}\mathbb{G} = \frac{d}{dt}(m\mathbb{v}) = m\dot{\mathbb{v}} = m\mathbb{a}\right)$$

Detta gäller i varje ögonblick.
Integrera m.a.p. tiden t under ett förlopp från $t = t_0$ till $t = t_1$:

$$\underbrace{I}_{\text{av kraften } \mathbb{F} \text{ tillförd impuls}} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbb{F}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbb{G}}\,dt = \Big[\mathbb{G} + 666\Big]_{t=t_0}^{t=t_1} = \mathbb{G}(t_1) - \mathbb{G}(t_0) = \underbrace{\Delta\mathbb{G}}_{\text{ändring i partikelns rörelsemängd under förloppet}}$$

Betrakta nu ett system bestående av flera partiklar:



Partiklarna påverkas av krafter,

dels inre krafter (beroende på växelverkan med andra partiklar i systemet)

dels yttre krafter (beroende på växelverkan med kroppar utanför systemet.)

Partiklarnas rörelsemängder $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \mathbb{G}_3$ ändras därför med tiden.

Betrakta nu systemets <u>totala</u> rörelsemängd $\mathbb{G} = \mathbb{G}_1 + \mathbb{G}_2 + \mathbb{G}_3 + \ldots$
Dess tidsutveckling uppfyller

$$\dot{\mathbb{G}} = \dot{\mathbb{G}}_1 + \dot{\mathbb{G}}_2 + \dot{\mathbb{G}}_3 + \ldots = (\mathbb{F}_1^{inre} + \mathbb{F}_1^{yttre}) + \mathbb{F}_2^{inre} + \mathbb{F}_2^{yttre} + (\mathbb{F}_3^{inre} + \mathbb{F}_3^{yttre}) + \ldots$$

$$= \mathbb{F}_1^{yttre} + \mathbb{F}_2^{yttre} + \mathbb{F}_3^{yttre} = \text{totala } \underline{\text{yttre}} \text{ kraften som verkar på systemet}$$

enligt Newton III

Viktigt specialfall: För ett <u>isolerat</u> system, som inte påverkas av några <u>yttre</u> krafter gäller alltså att den totala rörelsemängden $\mathbb{G}$ = konstant under ett förlopp.

Tillämpning på stötförlopp:

Vid en kollision som varar under ett kort tidsintervall kan yttre krafter (t.ex. tyngdkraft, friktion, ...) försummas eftersom de tillför en obetydlig impuls. Systemet av kolliderande partiklar kan då approximeras med ett isolerat system och har bevarad rörelsemängd under förloppet.

Observera att den <u>mekaniska</u> energin i allmänhet inte är bevarad: En del kommer att förvandlas till värme.

Exempel

Före stöten   Efter stöten

Det gäller alltså att $\underbrace{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}_{\text{total rörelsemängd före stöten}} = \underbrace{m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2'}_{\text{efter stöten}}$

men $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \neq \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$

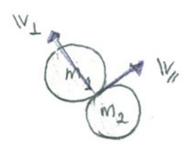
kinetisk energi behöver inte bevaras.

Vi inför relativa hastigheter före och efter stöten

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_{rel}' = \mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2' \end{cases}$$

Dela upp dessa i komponenter $\perp$ och $\parallel$ mot/med kontaktytan i stötögonblicket

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel \\ \mathbf{v}_{rel}' = \mathbf{v}_\perp' + \mathbf{v}_\parallel' \end{cases}$$



En enkel modell för stötförloppet säger att

$\mathbf{v}_\parallel' = \mathbf{v}_\parallel$ (bevarad relativ hastighet parallellt med kontaktytan)

$\mathbf{v}_\perp' = -\mathbf{v}_\perp e$

coefficient restitution (beror t.ex på material och utförande av kropparna)

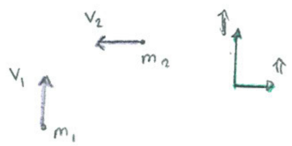
Vi har $0 \leq e \leq 1$

fullständig plastisk stöt Om $\mathbf{v}_\parallel = 0$ så fastnar kropparna i varandra maximal minskning av total kinetisk energi

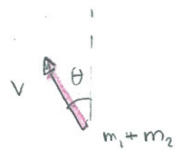
fullständigt elastisk stöt bevarar total kinetisk energi

3/208

Under det kortvariga stötförloppet (0,1 s) kan systemet bestående av A och B betraktas som isolerat och har alltså bevarad rörelsemängd.



Före



Efter

$$G_{\text{före}} = m_1 v_1 \mathbf{j} + m_2 v_2 (-\mathbf{i}) \qquad G_{\text{efter}} = (m_1+m_2)\, v\, (-\mathbf{i}\sin\theta + \mathbf{j}\cos\theta)$$

$G_{\text{före}} = G_{\text{efter}}$ ger ekvationerna (två ekvationer, två obekanta)

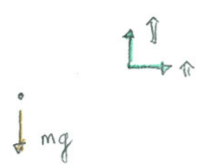
$$\begin{cases} -(m_1+m_2)v\sin\theta = -m_2 v_2 \\ (m_1+m_2)v\cos\theta = m_1 v_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta = \arctan \dfrac{m_2 v_2}{m_1 v_1} \\ \left[(m_1+m_2)v\right]^2 = (m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{m_1+m_2}$$

3/264

[e= stötkoefficient]

Friläggning
Under förloppet från A till B



Om ursprunglig hastighet är $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$ så har vi för tiden t $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} - gt\mathbf{j}$
och $\mathbf{r} = (v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j})t - \frac{g}{2}t^2\mathbf{j}$

Omedelbart <u>före</u> nedslaget i B har vi (energiprincipen)
$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} - v_y\mathbf{j}$

Detta sker efter tiden $t = \dfrac{2v_y}{g}$ och vi har $L_1 = v_x t = \dfrac{2v_x v_y}{g}$

Omedelbart efter stöten i B har vi

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\imath} + e v_y \hat{\jmath}$$

Vi kan nu analysera förloppet från B till C på samma sätt, men med utgångshastigheten $\mathbf{v} = v_x \hat{\imath} + e v_y \hat{\jmath}$

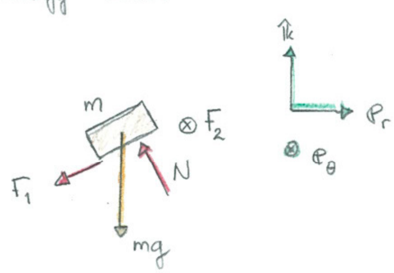
Vi finner då att $L_2 = \dfrac{2 v_x e v_y}{g}$ dvs. $L_2 = e L_1$

3/79

Lastbilens fartökning per tidsenhet $\dot v$ är given.

När börjar lådan att glida på flaket??

Frilägg lådan



Ställ upp Newton II:

$$-mg\hat{k} + N(-\sin\alpha\, e_r + \cos\alpha\, \hat{k}) + F_1(-\sin\alpha\, \hat{k} - \cos\alpha\, e_r) + F_2 e_\theta =$$
$$= m(\ddot r - r\dot\theta^2) e_r + m(r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta) e_\theta + m\ddot z \hat{k}$$

Det gäller att $z = \text{konstant}$, $r = \rho = \text{konstant}$, $\ddot\theta = \dfrac{\dot v}{\rho} = \text{konstant}$

$\Rightarrow \dot\theta = \dfrac{\dot v}{\rho} t$ efter tiden t

Vi får ekvationerna

$$\begin{cases} -mg + N\cos\alpha - F_1\sin\alpha = 0 & \hat{k} \quad (1) \\ -N\sin\alpha - F_1\cos\alpha = -m\dfrac{(\dot v t)^2}{\rho} & \hat e_r \quad (2) \\ F_2 = m\dot v & \hat e_\theta \quad (3) \end{cases}$$

Då glidning precis börjar har vi dessutom

$$\underbrace{\sqrt{F_1^2 + F_2^2}}_{\text{totala friktionskraften}} = \mu_s N \qquad (4)$$

Betrakta (1) och (4) som ekvationssystem med obekanta F_1 och N. (F_2 känd från (3)).

Lös detta. Ger 2:a gradsekvation för N

$$(\ldots)N^2 + (\ldots)N + (\ldots) = 0$$

besvärliga koefficienter som bör bestämmas numeriskt

Bestäm N och F_1. Sätt in i (2) och bestäm t.

Tisdag
2010-02-23

Rörelsemängdsmoment (angular momentum)

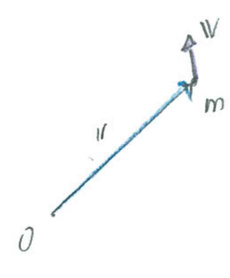
En partikel har massan m, ortsvektorn $\mathbf{r}$ m.a.p. en fix punkt O och hastigheten $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$. Vi säger då att partikeln har rörelsemängdsmomentet m.a.p. O

$$\mathbf{H}_O = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{G}$$

vanligare: $\mathbf{L}_O$ eller $\mathbf{H}_O$

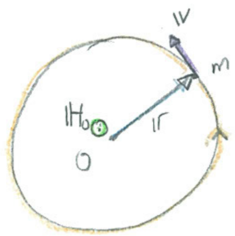
partikelns rörelsemängd

$\mathbf{H}_O$ är alltså $\perp$ mot $\mathbf{r}$ och $\mathbf{v}$.



Exempel

Partikel som rör sig på cirkelbana kring origo



Mer allmänt:

En stel kropp som roterar har rörelsemängdsmoment (se Mekanik 2)

Hur ändras $\mathbf{H}_O$ med tiden?

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \overset{\text{konstant}}{m}\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \cancel{\mathbf{v} \times m\mathbf{v}} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a} =$$

$$= \mathbf{r} \times \underset{\text{den resulterande kraften på partikeln}}{\mathbf{F}} = \mathbf{M}_O$$

yttre krafters vridmoment m.a.p. O

Integrera under ett förlopp:

$$\text{tillfört impulsmoment} = \int_{t_0}^{t_1} dt\, \mathbf{M}_O = \int_{t_0}^{t_1} dt\, \dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{H}_O(t_1) - \mathbf{H}_O(t_0) = \Delta \mathbf{H}_O = \text{ändring av rörelsemängdsmoment}$$

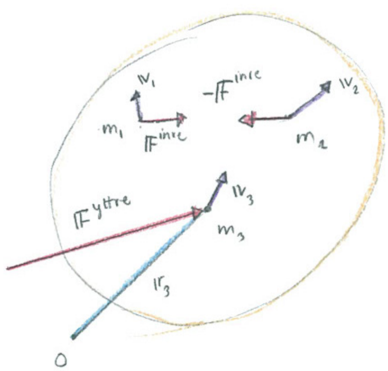
Jämför

Av yttre krafter uträttat arbete = ändring av kinetisk energi

— " — tillförd impuls = — " — rörelsemängd

— " — tillfört impulsmoment = — " — rörelsemängdsmoment

Betrakta nu ett system av partiklar:



Inre krafter leder bara till omfördelning av rörelsemängdsmoment mellan partiklarna. Alltså är

yttre krafters vridmoment m.a.p. O = Tidsderivatan av <u>systemets</u> totala rörelsemängdsmoment m.a.p. O

$$\mathbb{M}_0^{yttre} = \dot{\mathbb{H}}_0^{systemet}$$

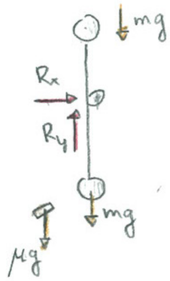
Speciellt har ett <u>isolerat</u> system $(\mathbb{M}_0^{yttre} = 0)$ ett konstant rörelsemängdsmoment $\mathbb{H}_0$.

3/248

Vi delar upp förloppet i

1) stöten mellan pistolkulan och pendeln
2) pendelns (med pistolkulans) fortsatta rörelse

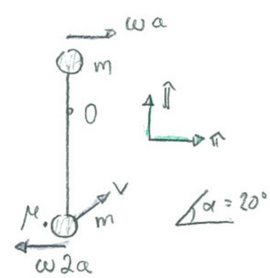
Under stöten är
- energin <u>inte</u> bevarad (plastisk stöt)
- rörelsemängden <u>inte</u> bevarad (stora reaktionskrafter i O)
- rörelsemängdsmomentet m.a.p. O för pendel + pistolkula bevarat



Reaktionskrafterna R_x och R_y är stora under stöten men utövar inget vridmoment m.a.p. O.

Tyngdkrafterna tillför ett försumbart impulsmoment under en kort stöt.

Före:



$$\mathbb{H}_O^{\text{före}} = a\hat{j} \times (m\omega a\hat{i}) + (-2a\hat{j}) \times (-m\omega 2a\hat{i}) + \mu(-2a\hat{j}) \times v(\cos\alpha\,\hat{i} + \sin\alpha\,\hat{j}) =$$
$$= (-5ma^2\omega + 2\mu a v \cos\alpha)\hat{k}$$

Efter:

$$\mathbb{H}_O^{\text{efter}} = a^2\omega'(m + 4(m+\mu))\hat{k}$$

Sätt $\mathbb{H}_O^{\text{efter}} = \mathbb{H}_O^{\text{före}}$ och bestäm ω!

<u>Den fortsatta rörelsen</u>:
- Den totala mekaniska energin (inklusive potentiell energi för tyngdkraften) är bevarad

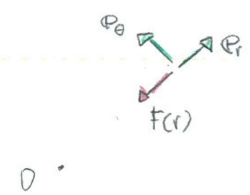
$\Rightarrow$ Bestäm utgångsvinkeln θ

- Rörelsemängden är <u>inte</u> bevarad
- Rörelsemängdsmomentet m.a.p. O är <u>inte</u> bevarat.
  (Tyngdkrafter utövar vridmoment m.a.p. O då $\theta \neq 0$.)

Centralrörelse

En <u>centralkraft</u> är ett kraftfält $\mathbb{F}(\mathbb{r})$ som alltid är riktat mot origo $O^{(\text{fixt})}$ och vars storlek $F = |\mathbb{F}|$ bara beror på avståndet $r = |\mathbb{r}|$ till origo. I polära koordinater (sfäriska koordinater)

$$\mathbb{F}(\mathbb{r}) = -F(r)\,\mathbb{e}_r$$



En centralkraft är alltid konservativ.
Potentiell energi

$$U(r) = \int_{r_0}^{r} ds\, F(s)$$

godtyckligt referensvärde som påverkar $U(r)$ med en additiv konstant

Ofta väljs konstanten så att $U(r) \to 0$ då $r \to \infty$

Exempel

tyngdkraften $F(r) = \dfrac{MmG}{r^2}$

$$U(r) = -\frac{MmG}{r} \quad (+\text{ konstant})$$

Betrakta en partikel med massa m som rör sig i en centralkraft.
Newton II i polära koordinater

$$\begin{cases} -F(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) & \quad \ldots (1) \\ 0 = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) & \quad \ldots (2) \end{cases}$$

Tolkning av (2):

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) \overset{\text{enligt (2)}}{=} m(2r\dot{r}\dot{\theta} - 2r\dot{r}\dot{\theta}) = 0$$

Alltså är $mr^2\dot{\theta} = mr(r\dot{\theta}) =$ konstant = partikelns rörelsemängdsmoment m.a.p. O

$$\left(\mathbb{H}_0 = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = m(r\mathbf{e}_r) \times (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\,\mathbb{k} \right)$$

Tolkning av (1):

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}mv^2 + U(r)\right)}_{\text{totala mekaniska energi}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r)\right) = m(\dot{r}\ddot{r} + r\dot{r}\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}\ddot{\theta}) + F(r)\dot{r}$$

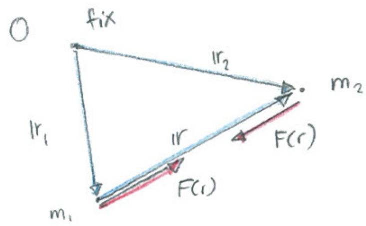
$$\overset{\text{enligt (2)}}{=} m(\dot{r}\ddot{r} + r\dot{r}\dot{\theta}^2 - 2r\dot{r}\dot{\theta}^2) + F(r)\dot{r} = \dot{r}\underbrace{\left(m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + F(r)\right)}_{=0}$$

Så (1) säger att energin är bevarad
(2) — " — $\mathbb{H}_0$ — " —

Reduktion av tvåkropparsproblemet

Två partiklar med massor m_1 och m_2 påverkar varandra med en attraktiv avståndsberoende kraft $F(r)$

$\uparrow$ avståndet mellan partiklarna



$\mathbb{r} = \mathbb{r}_2 - \mathbb{r}_1$

Är detta ett centralrörelseproblem?

Ställ upp Newton II för partiklarna separat.

enhetsvektor // $\mathbb{r}$

systemets totala massa

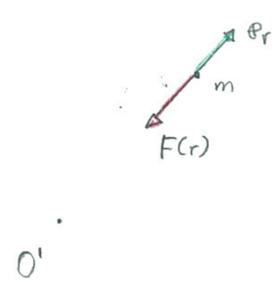
$$\begin{cases} F(r)\dfrac{\mathbb{r}}{r} = m_1\ddot{\mathbb{r}}_1 \\ -F(r)\dfrac{\mathbb{r}}{r} = m_2\ddot{\mathbb{r}}_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = m_1\ddot{\mathbb{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbb{r}}_2 = (m_1+m_2)\dfrac{m_1\ddot{\mathbb{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbb{r}}_2}{m_1+m_2} = M\ddot{\mathbb{R}} \\ (m_1+m_2)F(r)\dfrac{\mathbb{r}}{r} = m_2m_1(\ddot{\mathbb{r}}_1 - \ddot{\mathbb{r}}_2) = m_1m_2(-\ddot{\mathbb{r}}) \end{cases}$$

relativa ortsvektorn

ortsvektor för systemets tyngdpunkt

$$\iff \begin{cases} 0 = M\ddot{\mathbb{R}} \quad \text{(tyngdpunkten rör sig likformigt)} \\ -F(r)\underbrace{\dfrac{\mathbb{r}}{r}}_{= \mathbb{e}_r} = m\ddot{\mathbb{r}} \quad \text{där } m = \underbrace{\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}}_{< m_1,\ < m_2} = \text{den reducerade massan} \end{cases}$$

Den andra ekvationen ser ut som en centralrörelse för en <u>fiktiv</u> partikel med massa m i centralkraftsfältet $-F(r)\,\mathbb{e}_r$



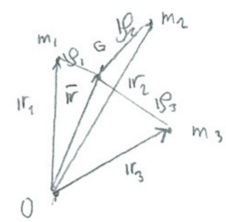
O' = utgångspunkt för den relativa rörelsen

Torsdag
2010-02-25

Partikelsystem

Vi betraktar ett system av partiklar med massor $m_1, m_2, \dots$ och ortsvektor $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$ relativt en <u>fix</u> punkt O.

(Antalet massor kan vara oändligt, eller en kontinuerlig massfördelning)



Systemets tyngdpunkt G har ortsvektorn

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{m_1 + m_2 + \dots}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \dots) \qquad m_1 + m_2 + \dots = m = \text{systemet totala massa}$$

Vi skriver partiklarnas "absoluta" ortsvektorer på formen

$$\mathbf{r}_1 = \bar{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\rho}_1 \qquad \mathbf{r}_2 = \bar{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\rho}_2$$

Vi uttrycker systemets kinetiska energi, rörelsemängd och rörelse-mängdsmoment m.a.p. O i variablerna $\bar{\mathbf{r}}$ och $\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \dots$

Observera att

$$m_1\boldsymbol{\rho}_1 + m_2\boldsymbol{\rho}_2 + \dots = m_1(\mathbf{r}_1 - \bar{\mathbf{r}}) + m_2(\mathbf{r}_2 - \bar{\mathbf{r}}) + \dots =$$
$$= m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \dots - (m_1 + m_2 + \dots)\bar{\mathbf{r}} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \dots - (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \dots) = 0$$

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_1 + \frac{m_2}{2}\dot{\mathbf{r}}_2 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 + \dots = \frac{m_1}{2}(\dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_1) \cdot (\dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_1) + \frac{m_2}{2}(\dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_2) \cdot (\dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_2) + \dots =$$
$$= \frac{m_1}{2}(\dot{\bar{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}} + 2\dot{\bar{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_1 + \dot{\boldsymbol{\rho}}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_1) + \frac{m_2}{2}(\dot{\bar{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}} + 2\dot{\bar{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_2 + \dot{\boldsymbol{\rho}}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_2) + \dots =$$
$$= \frac{m_1 + m_2 + \dots}{2}\dot{\bar{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}} + \frac{m_1}{2}\dot{\boldsymbol{\rho}}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_1 + \frac{m_2}{2}\dot{\boldsymbol{\rho}}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_2 + \dots + \dot{\bar{\mathbf{r}}}(m_1\dot{\boldsymbol{\rho}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{\rho}}_2 + \dots) =$$
$$= \underbrace{\frac{m}{2}\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}}}_{\text{kinetisk energi från tyngdpunktens rörelse}} + \underbrace{\frac{m_1}{2}\dot{\boldsymbol{\rho}}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_1 + \frac{m_2}{2}\dot{\boldsymbol{\rho}}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_2 + \dots}_{\text{kinetisk energi från partiklarnas rörelse relativt tyngdpunkten.}}$$

totala massa

tyngdpunktens hastighet

Systemets totala rörelsemängd är

$$\underset{\mathbb{P}}{\mathbb{G}} = m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 + \ldots = m_1(\dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_1) + m_2(\dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_2) + \ldots =$$

$$= (m_1 + m_2 + \ldots)\dot{\bar{\mathbf{r}}} + (m_1\dot{\boldsymbol{\rho}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{\rho}}_2 + \ldots) = \underset{\text{totala massa}}{m}\,\underset{\text{tyngdpunktens hastighet}}{\bar{\mathbf{v}}}$$

Rörelsemängdsmoment m.a.p. O

$$\underset{\mathbb{L}_0}{\mathbb{H}_0} = m_1\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2 + \ldots = m_1\mathbf{r}_1 \times (\dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_1) + m_2\mathbf{r}_2 \times (\dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_2) + \ldots =$$

$$= (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots) \times \dot{\bar{\mathbf{r}}} + m_1\mathbf{r}_1 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_1 + m_2\mathbf{r}_2 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_2 + \ldots =$$

$$= m\bar{\mathbf{r}} \times \dot{\bar{\mathbf{r}}} + m_1\mathbf{r}_1 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_1 + m_2\mathbf{r}_2 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_2 + \ldots = m\bar{\mathbf{r}} \times \dot{\bar{\mathbf{r}}} + m_1(\bar{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\rho}_1) \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_1 +$$

$$+ m_2(\bar{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\rho}_2) \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_2 + \ldots = \underbrace{m\bar{\mathbf{r}} \times \dot{\bar{\mathbf{r}}}}_{\text{tyngdpunktens rörelse}} + \underbrace{m_1\boldsymbol{\rho}_1 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_1 + m_2\boldsymbol{\rho}_2 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_2 + \ldots}_{\text{bidrag från partiklarnas rörelse kring tyngdpunkten}} + \bar{\mathbf{r}} \times (m_1\dot{\boldsymbol{\rho}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{\rho}}_2 + \ldots)$$

Som vanligt är

$$\dot{\mathbb{G}} = \mathbb{F}$$
$$\dot{\mathbb{H}} = \mathbb{M}_0$$

ΔT = av <u>yttre</u> krafter på systemet uträttat arbete $\int \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}$

$\Delta \mathbb{G}$ = —— " —— tillförd impuls $\int \mathbb{F}\, dt$

$\Delta \mathbb{H}_0$ = —— " —— tillfört impulsmoment $\int \mathbb{M}_0\, dt$

Man kan betrakta rörelsemängdsmomentet $\mathbb{H}_P$ med avseende på en godtycklig punkt P som inte behöver vara fix.

Vi nöjer oss med specialfallet att P = G = tyngdpunkten

$$\underset{\text{med absoluta hastigheter } \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \ldots}{\mathbb{H}_G} = m_1\boldsymbol{\rho}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\boldsymbol{\rho}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2 + \ldots = m_1\boldsymbol{\rho}_1 \times (\dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_1) + m_2\boldsymbol{\rho}_2 \times (\dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_2) + \ldots =$$

$$\underset{\text{med relativa hastigheter } \dot{\boldsymbol{\rho}}_1, \dot{\boldsymbol{\rho}}_2, \ldots}{=} m_1\boldsymbol{\rho}_1 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_1 + m_2\boldsymbol{\rho}_2 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_2 + \ldots$$

Vi beräknar tidsderivatan

$$\dot{\mathbb{H}}_G = m_1 \dot{\rho}_1 \times \dot{\mathbb{r}}_1 + m_1 \rho_1 \times \ddot{\mathbb{r}}_1 + m_2 \dot{\rho}_2 \times \dot{\mathbb{r}}_2 + m_2 \rho_2 \times \ddot{\mathbb{r}}_2 + \dots =$$

$$= \rho_1 \times \mathbb{F}_1 + \rho_2 \times \mathbb{F}_2 + m_1 \dot{\rho}_1 \times (\dot{\mathbb{r}} + \dot{\rho}_1) + m_2 \dot{\rho}_2 \times (\dot{\mathbb{r}} + \dot{\rho}_2) + \dots = \mathbb{M}_G$$

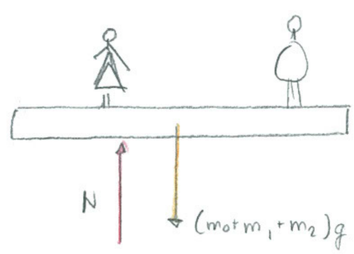
Newton II

kraft på första partikeln

yttre krafters vridmoment m.a.p. G

4/20

Frilägg systemet bestående av Emil, Emilia och vagnen:



Inga horisontella krafter $\Rightarrow$ systemets tyngdpunkt accelererar inte

Tyngdpunkten är i vila vid starten

Systemets tyngdpunkt ligger stilla under hela förloppet

$$\theta = \underbrace{\text{Tyngdpunktens läge relativt kanten}}_{\text{skall vara konstant under rörelsen } \theta} = \frac{1}{m_0 + m_1 + m_2}\left(m_0(s + x_0) + m_1(s + l - x_1) + m_2(s + x_2)\right)$$

konstant. beror på var vagnens tyngdpunkt ligger

Vid start

$$\theta = \frac{1}{m_0 + m_1 + m_2}\left(m_0 x_0 + m_1 l\right)$$

Då E möter E

$$\theta = \frac{1}{m_0 + m_1 + m_2}\left(m_0(s + x_0) + m_1(s + l - x_1) + m_2(s + l - x_1)\right)$$

Dessa uttryck ska vara lika.

$$m_0x_0 + m_1 l = m_0(s+x_0) + m_1(s+l-x_1) + m_2(s+l-x_1)$$

$$s = \frac{1}{m_0+m_1+m_2}\left((m_1+m_2)x_1 + x_2 l\right)$$

motivering till varför tyngdpunkten ej rör sig

Systemets totala rörelsemängd $\mathbb{G} = (m_0+m_1+m_2)\bar{\mathbb{v}}$

tyngdpunktens hastighet

$$\dot{\mathbb{G}} = \mathbb{F} = 0$$

totala yttre kraften

4/22 Systemet bestående av de båda massorna har <u>från början</u>
rörelsemängden $= 0$.
rörelsemängdsmomentet m.a.p. tyngdpunkten $= 0$ } start i vila

<u>Stöten</u> tillför:

Impulsen $\mathbb{I} = I\Uparrow$ där $I = 10$ Ns
Impulsmomentet $a\Uparrow \times I\Uparrow$ m.a.p. G där $a = 300$ mm

Omedelbart <u>efter stöten</u> har systemet alltså rörelsemängd $\mathbb{G} = I\Uparrow$
Rörelsemängdsmomentet m.a.p. G $\mathbb{H}_G = aI\Uparrow\!\!k$

I det <u>streckade läget</u> har vi <u>fortfarande</u> $\mathbb{G} = I\Uparrow$
$\mathbb{H}_G = aI\Uparrow\!\!k$

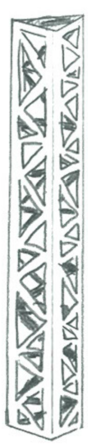
(Inga yttre krafter utom mg och N som tar ut varandra)

Vi får då tyngdpunktens hastighet

$$\bar{\mathbb{v}} = \frac{\mathbb{G}}{2m} = \frac{I}{2m}\Uparrow \qquad v_y = \frac{I}{2m} \qquad m = 1{,}5 \text{ kg}$$

$$\mathbb{H}_G = \underbrace{ma\Uparrow \times (\omega a(-\Uparrow))}_{\text{bidrag från främre massan}} + \underbrace{m(-a\Uparrow)\times(\omega a\Uparrow)}_{\text{bakre massan}} = 2ma^2\omega\Uparrow\!\!k \Rightarrow \omega = \frac{aI}{2ma^2} = \frac{I}{2ma}$$

Lv 7



Mekanik

Med Måns Henningson

FFM 515

Stationärt massflöde

exempel

Variabel massa

Planetrörelser

tvåkropparsproblemet

Kepler II

$E>0$, $E<0$

Tentamen mars 2006 (saknas)

Stationärt massflöde

Måndag
2010-03-01

Situationer där massa (ofta en fluid) flyter genom en konstruktion.

Följ det vanliga receptet.

1) Dela upp lämpliga delkroppar ← observera att en delkropp skall bestå av en viss uppställning atomer.
2) Frilägg dessa separat
3) Ställ upp jämviktsekvationerna (Newton II)

Avstå från att memorera "färdiga" formler och resonemang. Betrakta istället en viss mängd materia (fluid) vid två närbelägna tidpunkter t och $t+\Delta t$.

Bestäm ändringen i rörelsemängd $\Delta \mathbb{G}$ och rörelsemängdsmoment $\Delta \mathbb{H}_0$ för denna delkropp. Det gäller då att denna materia har påverkats av kraften

$$\mathbb{F} = \frac{\Delta \mathbb{G}}{\Delta t} \quad \text{och vridmomentet} \quad \mathbb{M}_0 = \frac{\Delta \mathbb{H}_0}{\Delta t}$$

m.a.p. fixt O

4/51

Betrakta den regnmängd som träffar flygplanet under tidsintervallet Δt.

Dess massa är $\Delta m = \rho \Phi \Delta t = \rho A \varphi \Delta t$

vattnets densitet 1000 kg/m^3

flöde (volym/tidsenhet)

flygplanets area 275 m^2

nederbörd/tidsenhet $\frac{0{,}025 \text{ m}}{3600 \text{ s}}$

Dess vertikala hastighet har ändrats från $v_0 = 6$ m/s till $v_1 = 0$
Ändringen i rörelsemängd är alltså $\Delta G = \Delta m(v_1 - v_0) = \rho A \varphi \Delta t + v_0$

Kraften (från flygplanet på regnet) är

$$F = \frac{\Delta G}{\Delta t} = \rho A \varphi v_0 = \frac{1000 \cdot 275 \cdot 0{,}025}{3000} \cdot 6 \text{ N} = \frac{412{,}5}{36} = 11{,}459 \text{ N}$$

[Lite om skalärprodukt: $\langle \psi_1 , \psi_2 \rangle$

$\langle \psi_1 | \; c \; | \psi_2 \rangle$

bra c ket]

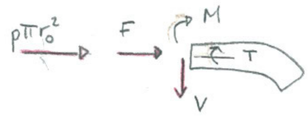
4/65

Betrakta en mängd vatten vid tiden t:
Vattnet i det avbildade röret plus lite till som just är på väg in.

Vid tiden $t + \Delta t$:
Vattnet i det avbildade röret plus lite till som just sprutat ut.

Frilägg detta (sett ovanifrån) samt röret:

vid t: 



vid t+Δt: 

$\varrho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$
$\Phi = \frac{1{,}3\ \mathrm{m^3}}{60\ \mathrm{s}}$
$r_0 = 0{,}025\ \mathrm{m}$
$r_1 = 0{,}0125\ \mathrm{m}$
$\alpha = 40°$
$a = 0{,}062\ \mathrm{m}$
$d = 0{,}050\ \mathrm{m}$
$p = 10^6\ \mathrm{N/m^2}$

$$\boxed{\Delta m = \varrho \Phi \Delta t}$$

Inloppshastighet $\mathbb{v}_0 = \frac{\Phi}{\pi r_0^2}\Uparrow$

Utloppshastighet $\mathbb{v}_1 = \frac{\Phi}{\pi r_1^2}\left(\Rightarrow \cos\alpha + \Uparrow \sin\alpha\right)$

Ändring i rörelsemängd

$$\Delta \mathbb{G} = \Delta m(\mathbb{v}_1 - \mathbb{v}_0) = \varrho \Phi \Delta t \frac{\Phi}{\pi}\left(\Rightarrow \frac{\cos\alpha}{r_1^2} + \Uparrow\left(\frac{\sin\alpha}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}\right)\right)$$

Ändring i rörelsemängdsmoment m.a.p. O:

Slutligt rörelsemängdsmoment = 0

Ursprungligt —— " ——— $= \underbrace{(-a\Uparrow - d\Uparrow\!\!\mathbb{k})}_{\text{ortsvektor } \mathbb{r}} \times \underbrace{\frac{\Phi}{\pi r_0^2}\Uparrow}_{\mathbb{v}_0} \underbrace{\varrho\Phi\Delta t}_{\Delta m}$

$$= \frac{-\varrho\Phi^2 d\Delta t}{\pi r_0^2}\Rightarrow$$

Ändringen är $\Delta \mathbb{H}_0 = -\frac{\varrho \Phi^2 d}{\pi r_0^2}\Delta t \Rightarrow$

Det skall gälla att

$$(p\pi r_0^2 + F)\Uparrow + V\Rightarrow = \frac{\Delta \mathbb{G}}{\Delta t}$$

varur fås att

$$V = \frac{\varrho\Phi^2\cos\alpha}{\pi r_1^2} = 733\ \mathrm{N}$$

$$F = \frac{\varrho\Phi^2}{\pi}\left(\frac{\sin\alpha}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}\right) - p\pi r_0^2 = -1588\ \mathrm{N}$$

Det skall även gälla att

$$\underbrace{\mathbb{M} + T\,\mathbb{j}}_{\text{kraftparsvridmoment}} + (-a\,\mathbb{j} - d\,\mathbb{k}) \times \left(V\,\mathbb{i} + (F + p\pi r_0^2)\,\mathbb{j}\right) = \frac{\Delta \mathbb{H}_0}{\Delta t}$$

varur fås att

$$T = \frac{\varrho \Phi^2 d\cos\alpha}{\pi r_1^2} \approx 36{,}6\ \mathrm{Nm}$$

$$M = |\mathbb{M}| = \frac{\varrho \Phi^2}{\pi r_1^2}\sqrt{(a\cos\alpha)^2 + (d\sin\alpha)^2} = 54{,}8\ \mathrm{Nm}$$

vektor i xz-planet

Variabel massa

$\boxed{\text{Tisdag } 2010\text{-}03\text{-}02}$

System som avger (eller upptar) massa under ett förlopp.

Var noga med att dela upp i väldefinierade delkroppar (precis vilka atomer ingår?).
Betrakta sedan situationen vid tiderna t och $t+\Delta t$.

Tillförd impuls = ändring i rörelsemängd osv.

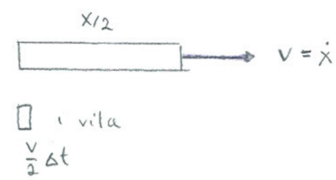
Avstå från "färdiga formler".

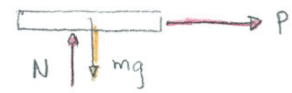
4/81

Betrakta delkropp enligt nedan:

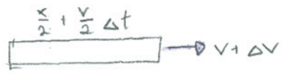
Friläggning:

Vid tid t:





Vid tid t+Δt:



$$\underbrace{P\Delta t}_{\text{tillförd impuls}} = \rho \underbrace{\left(\frac{x}{2} + \frac{v}{2}\Delta t\right)(v + \Delta v)}_{\text{slutlig rörelsemängd}} - \underbrace{\rho \frac{x}{2} v}_{\text{ursprunglig rörelsemängd}} = \rho\left(\frac{x}{2}\Delta v + \frac{v^2}{2}\Delta t\right)$$

↑ massa/längdenhet (ρ)

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \left(\frac{P}{\rho} - \frac{v^2}{2}\right)\frac{2}{x} = \frac{2P}{\rho x} - \frac{v^2}{x}$$

a) $\rho = \frac{48\,kg}{8\,m} = 6\,kg/m$, $v = 1{,}5\ m/s$, $a = 0$

$$\Rightarrow \quad P = \rho\frac{v^2}{2} = 6 \cdot \frac{2{,}25}{2}\ N = 6{,}75\ N$$

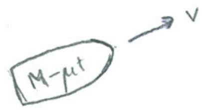
b) $P = 20\ N$, $v = 1{,}5\ m/s$, $x = 4\ m$

$$\Rightarrow \quad a = \left(\frac{2 \cdot 20}{6 \cdot 4} - \frac{1{,}5^2}{4}\right) m/s^2 = 1{,}104\ m/s^2$$

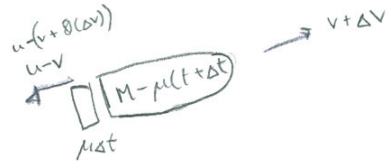
4/82

Betrakta delkropp enligt nedan

Vid tiden t
efter start :



Vid tiden t+Δt :



relativ hastighet! → $u = 120\,m/s$

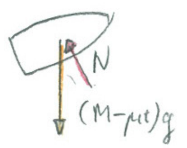
$M = 60\,kg$

$\mu = 1\,kg/s$

$u = 120\,m/s$

$\theta = 10° = 10 \cdot \frac{\pi}{180}$ ← dimensionslös

Friläggning:



Impulslagen lyder (i ↗ riktningen)

$$\underbrace{-(M-\mu t)\, g \sin\theta \,\Delta t}_{\text{tillförd impuls}} =$$

$$= \underbrace{(M-\mu(t+\Delta t))(v+\Delta v) - \mu\Delta t(u-v)}_{\text{slutlig rörelsemängd}} - \underbrace{(M-\mu t)v}_{\text{ursprunglig rörelsemängd}} =$$

$$= (M-\mu t)\Delta v - \mu\Delta t\, v - \mu\Delta t\, u + \mu\Delta t\, v$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -g\sin\theta + \frac{\mu u}{M-\mu t} \Rightarrow v = -gt\sin\theta - u \ln\frac{M-\mu t}{M} \quad (+\text{ konstant})$$

vid start i vila

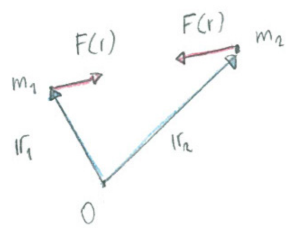
$$v_{slut} = v(t_{slut}) \qquad t_{slut} = 10\,s$$

Undersök om $a > 0$ för $0 < t < 10\,s$

Planetrörelser

Torsdag
2010-03-04

Betrakta tvåkroppsproblemet:



Byt variabler från $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$ till

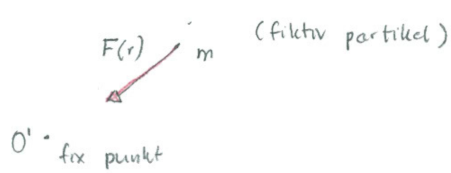
$$\begin{cases} \mathbf{R} = \dfrac{1}{m_1 + m_2}(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) = \text{tyngdpunktens ortsvektor} \\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \text{relativ rörelse} \end{cases}$$

Newton II ger:

$$0 = (m_1 + m_2)\ddot{\mathbf{R}}$$ tyngdpunkten rör sig likformigt

$$-F(r)\,\mathbf{e}_r = m\ddot{\mathbf{r}}$$ där $m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ = "reducerande massan"

Vi har alltså ett centralkraftsproblem



Som vanligt är den totala mekaniska energin bevarad

$$E = \frac{m}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + U(r)$$

potentiell energi för F(r)

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{du}{d\theta}\frac{H_{O'}}{m}\right) = -\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{H_{O'}}{m}\dot{\theta} = -\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{H_{O'}}{m}\frac{H_{O'}}{mr^2} = -\left(\frac{H_{O'}}{m}\right)^2 u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

Sätt in allting i (1).

$$-Ku^2 = m\left(-\left(\frac{H_O}{m}\right)^2 u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - \left(\frac{H_O}{m}\right)^2 u^3\right)$$ dvs.

$$\left(\frac{H_O}{m}\right)^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = K \iff \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{Km^2}{H_O^2}$$

med lösningen $$u = A\cos(\theta + \varphi) + \frac{Km^2}{H_O^2}$$

godtyckliga

u (och alltså r) är periodisk funktion av θ. Slutna banor!