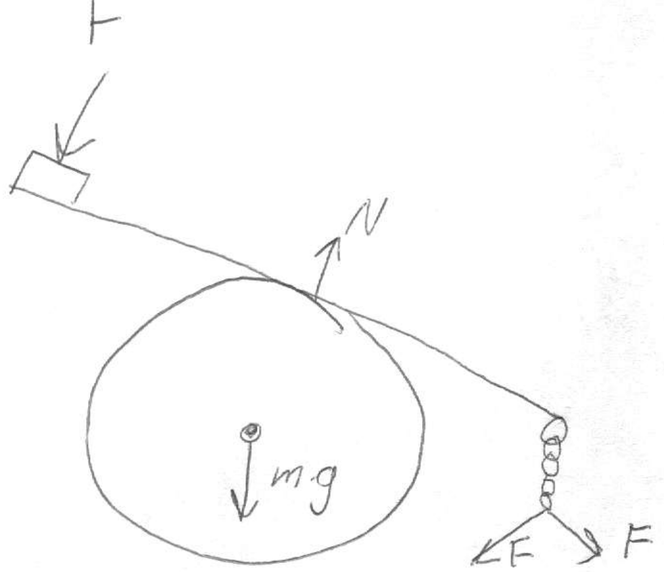
FÖRELÄSNINGAR

MEK A



35:- för 71 sidor

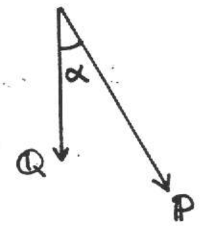
Tredimensionella kraftsystem

Först lite om vektorer...

Givet två vektorer $\mathbb{P}$ och $\mathbb{Q}$ kan vi bilda deras skalärprodukt. (skalär!)

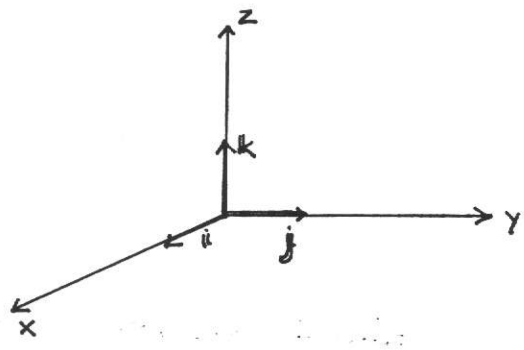
$\mathbb{P}\cdot\mathbb{Q} = PQ\cos\alpha$

vinkeln mellan $\mathbb{P}$ och $\mathbb{Q}$



För enhetsvektorerna $\mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k}$

$\cdot$	$\mathbb{i}$	$\mathbb{j}$	$\mathbb{k}$
$\mathbb{i}$	1	0	0
$\mathbb{j}$	0	1	0
$\mathbb{k}$	0	0	1



Vi kan även bilda kryssprodukten $\mathbb{P}\times\mathbb{Q}$ (vektor!).

Den har längden

$|\mathbb{P}\times\mathbb{Q}| = PQ\sin\alpha$

$\mathbb{P}\times\mathbb{Q}$ är $\perp$ mot $\mathbb{P}$ och $\mathbb{Q}$

$\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ och $\mathbb{P}\times\mathbb{Q}$ bildar ett högersystem.

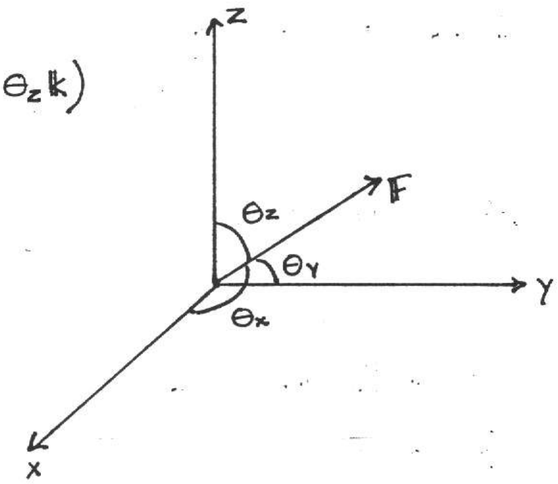
Obs att $\mathbb{P}\times\mathbb{Q} = -\mathbb{Q}\times\mathbb{P}$

1:a faktorn	$\times$	$\mathbb{i}$	$\mathbb{j}$	$\mathbb{k}$
	$\mathbb{i}$	0	$\mathbb{k}$	$-\mathbb{j}$
	$\mathbb{j}$	$-\mathbb{k}$	0	$\mathbb{i}$
	$\mathbb{k}$	$\mathbb{j}$	$-\mathbb{i}$	0

2.7. Cartesiska komponenter

En godtycklig vektor $\mathbb{F}$ kan uppdelas i sina xyz-komponenter:

$$\mathbb{F} = F_x \mathbb{i} + F_y \mathbb{j} + F_z \mathbb{k}$$
$$= F(\cos\theta_x \mathbb{i} + \cos\theta_Y \mathbb{j} + \cos\theta_z \mathbb{k})$$



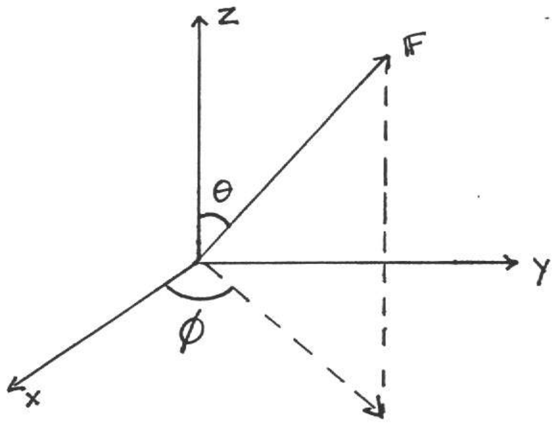
Riktningen för en vektor $\mathbb{F}$ i tre dimensioner kan t.ex specificeras genom

två punkter (x_1, y_1, z_1) och (x_2, y_2, z_2) på verkningslinjen. Vi har då

$$\mathbb{F} = F\mathbb{n} = F\,\frac{(x_2 - x_1)\mathbb{i} + (y_2 - y_1)\mathbb{j} + (z_2 - z_1)\mathbb{k}}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}}$$

enhetsvektor i kraftens riktning

två lämpligt valda vinklar. T.ex enligt figuren



(Polära koordinater)

$$F_x = F\sin\theta\cos\phi$$
$$F_Y = F\sin\theta\sin\phi$$
$$F_z = F\cos\theta$$

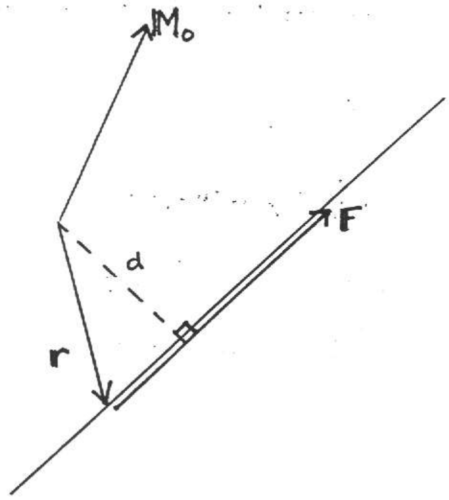
2.8 Vridmoment och kraftpar

Vi säger att en kraft $\mathbb{F}$ med verkningslinje utövar ett vridmoment med avseende på en punkt O som är

$$\mathbb{M}_o = \mathbb{r} \times \mathbb{F}$$

obs vektor

vektor från O till en punkt på verkningslinjen



Nu kan vi förstå varför vridmomentet är en vektor: Antag att $\mathbb{F}$ angriper en stel kropp som fritt kan vridas kring O. (kulled). Kroppen kommer då att tendera att vrida sig kring en axel parallell med $\mathbb{M}_o$.

Med $\begin{cases} \mathbb{F} = F_x \mathbb{i} + F_y \mathbb{j} + F_z \mathbb{k} \\ \mathbb{r} = x\mathbb{i} + y\mathbb{j} + z\mathbb{k} \end{cases}$

har vi $\mathbb{M}_o = M_x \mathbb{i} + M_y \mathbb{j} + M_z \mathbb{k}$

med

$$\begin{cases} M_x = yF_z - zF_y \\ M_y = zF_x - xF_z \\ M_z = xF_y - yF_x \end{cases}$$

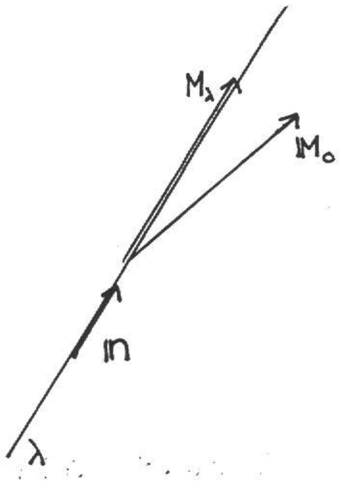
ty $\mathbb{r} \times \mathbb{F} = (x\mathbb{i} + \ldots) \times (F_x \mathbb{i} + \ldots) =$
$= (\quad)\mathbb{i} + (\quad)\mathbb{j} + (\quad)\mathbb{k}$

Om vår stela kropp bara kan vrida sig fritt kring en viss axel λ genom O behöver vi känna komponenten av $\mathbb{M}_0$ längs λ-axeln

Vi har

$\mathbb{M}_\lambda = (\mathbb{M}_0 \cdot \mathbb{n})\mathbb{n}$

där $\mathbb{n}$ = enhetsvektor längs λ-axeln

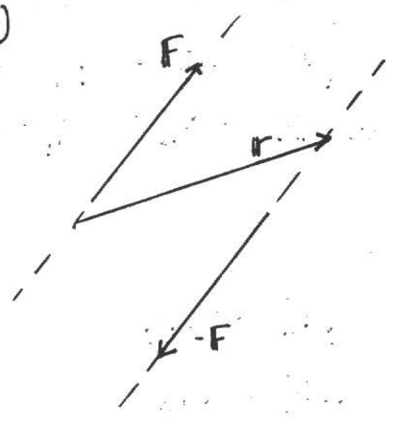


$\mathbb{M}_0 \cdot \mathbb{n}$ kallas för vridmoment m.a.p λ-axeln

Två motsatta krafter $\mathbb{F}$ och $-\mathbb{F}$ vars verkningslinjer är parallella utgör ett <u>kraftpar</u> med vridmomentet

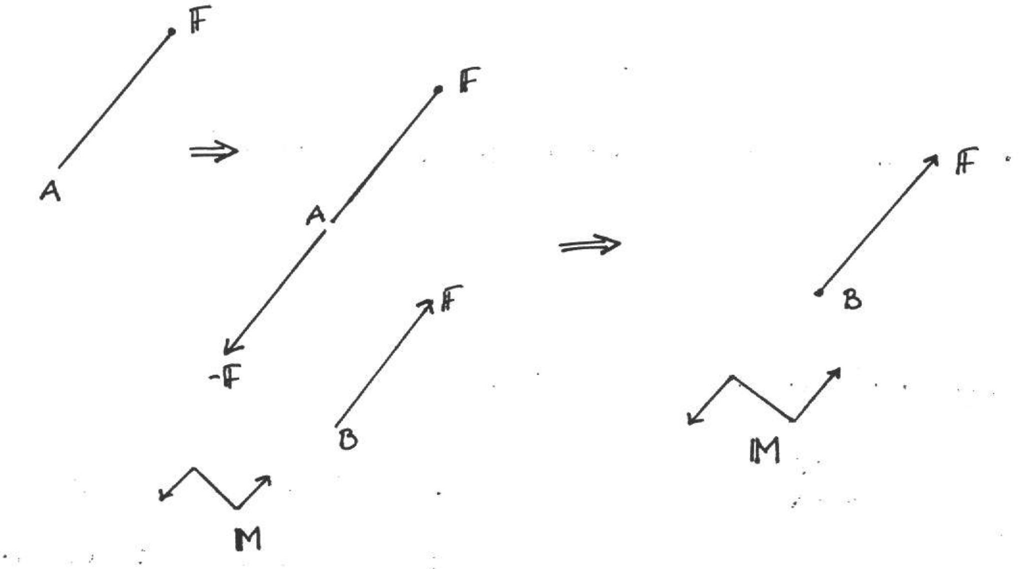
$\mathbb{M} = \mathbb{r} \times \mathbb{F}$ (fri vektor)

enl. figuren



2.9. Resultanter

Precis som i två dimensioner kan vi flytta en krafts verkningslinje om vi lägger till ett lämpligt kraftpar.



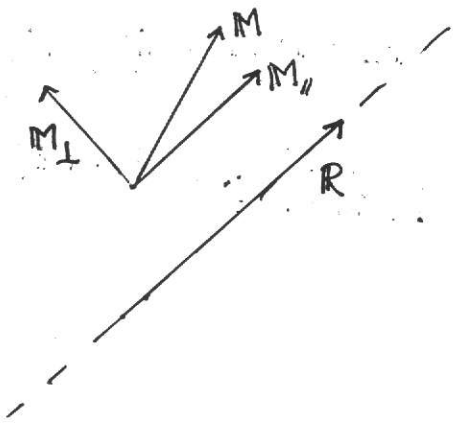
På detta sätt kan vi förenkla ett kraftsystem till en enda resulterande kraft $\mathbb{R}$ med en viss verkningslinje och ett kraftpar med vridmoment $\mathbb{M}$.

I två dimensioner kan vi förenkla ytterligare till en kraft $\mathbb{R}$ med en viss verkningslinje (figuren ovan baklänges)

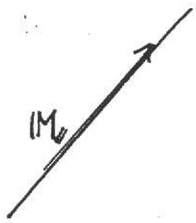
I tre dimensioner fungerar inte detta i allmänhet:

Skriv $\mathbb{M} = \mathbb{M}_{\parallel} + \mathbb{M}_{\perp}$

parallell med $\mathbb{R}$ $\qquad$ $\perp$ mot $\mathbb{R}$

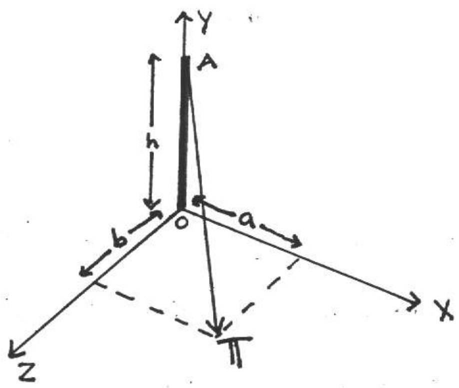


Vi kan eliminera $\mathbb{M}_\perp$ genom att flytta kraftens verkningslinje.



Detta kallas för en <u>kraftskruv</u>. (wrench)

Ex 2.10. (fast algebraiskt)



Bestäm vridmomentet för $\mathbb{T}$ m a p z-axeln.

Vi börjar med att bestämma $\mathbb{T}$.

$$\mathbb{T} = T \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+h^2}} (a\mathbb{i} - h\mathbb{j} + b\mathbb{k})$$

Vektorn från momentpunkten O till angreppspkt A

$$\mathbb{r} = h\mathbb{j}$$

Vridmomentet m a p O är

$$\mathbb{M}_o = \mathbb{r} \times \mathbb{T} = h\mathbb{j} \times T \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+h^2}} (a\mathbb{i} - h\mathbb{j} + b\mathbb{k}) =$$

$$\frac{hT}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} (-a\mathbb{k} + b\mathbb{i})$$

Dess projektion på z-axeln är

$$M_z = M_o \cdot \mathbb{k} = -\frac{ahT}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Kontroll: enhet [kraft x sträcka] = Nm

$\mathbb{M}_z \to 0$ då $a \to 0$
" $h \to 0$

$\mathbb{M}_z$ växer då $b \to 0$

Tecknet? OK

3 JÄMVIKT

31 Introduktion

En stel kropp är i jämvikt omm den totala kraften $\mathbb{R}$ och det totala momentet $\mathbb{M}$ som verkar på den båda är noll.

$\mathbb{M} = 0, \quad \mathbb{R} = 0$

Anm Villkoret att $\mathbb{R} = 0$ gör att vridmomentet $\mathbb{M}_o$ inte beror på momentpunkten O.
Därför behövs inte O anges (men det kan ändå vara lämpligt att göra det).

3.2. Jämvikt i två dimensioner. Friläggning

För att kunna tillämpa jämviktsekvationerna måste vi noga specificera vilken kropp vi betraktar och ange alla krafter och vridmoment som verkar på denna.

Man gör detta genom att isolera kroppet i ett diagram och markera alla yttre krafter och vridmoment (Friläggning, free-body diagram)

En korrekt friläggning är avgörande för att analysera ett mekaniskt system.

<u>Anm.</u> I princip kan ett givet mekaniskt system uppdelas i godtyckliga delkroppar som friläggs. Glöm dock inte Newtons tredje lag:

Delkropparna A och B påverkar varandra med motsatta krafter

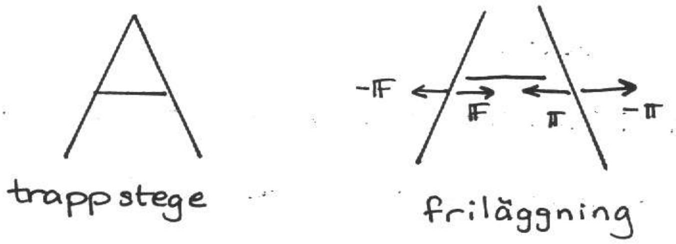


Fig 3.1 i boken ger några exempel på kroppar i kontakt och motsvarande krafter.

- I nummer 6 är tecknen inte givna på förhand
- I t.ex nummer 7 kan gränsen mellan de två delkropparna definieras på olika sätt.
- Kraften i en fjäder är en funktion av förlängningen x. Vanligt antagande i Hooks lag.
  $F = kx$ k kallas fjäderkonstanten.

Procedur att följa vid friläggning:

1. Definiera vilken delkropp som skall friläggas
2. Rita ett schematiskt diagram över denna delkropp.
3. Markera alla krafter och vridmoment som verkar på denna delkropp. Inför variabler för okända storheter.
4. Rita in koordinataxlarna och relevanta mått.

Figur 3.2. ger fyra exempel på friläggning.

3.3 Jämviktsvillkor

I två dimensioner innehåller jämviktsvillkoren

$\mathbf{R}=0, \quad \mathbf{M}=0$

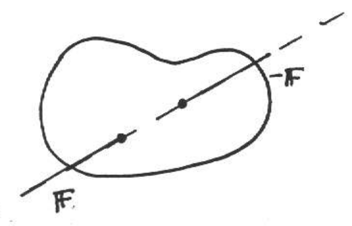
tre oberoende ekvationer:

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases} \qquad M_z = 0$$

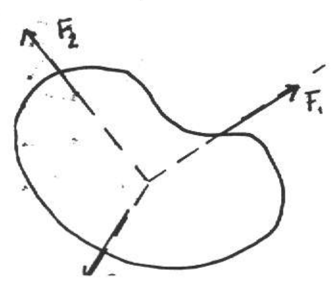
Ibland räcker det med färre ekvationer.

Två viktiga specialfall:

- En kropp påverkas bara av två krafter. Dessa måste vara motsatta och ha samma verkningslinje.

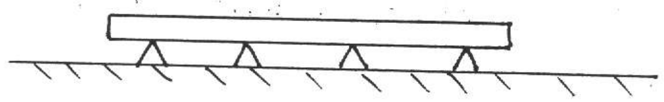


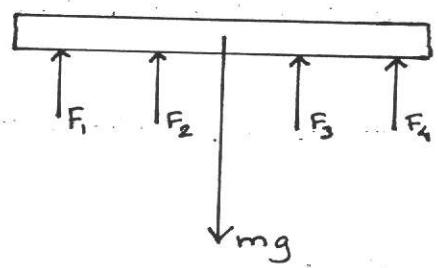
- En kropp påverkas av tre krafter. Deras summa måste vara noll och verkningslinjerna mötas i en gemensam punkt.



Räkna alltid antalet obekanta och antalet ekvationer.

Ofta i verkligheten men sällan i boken har vi fler än tre obekanta. (Statiskt obestämt problem)



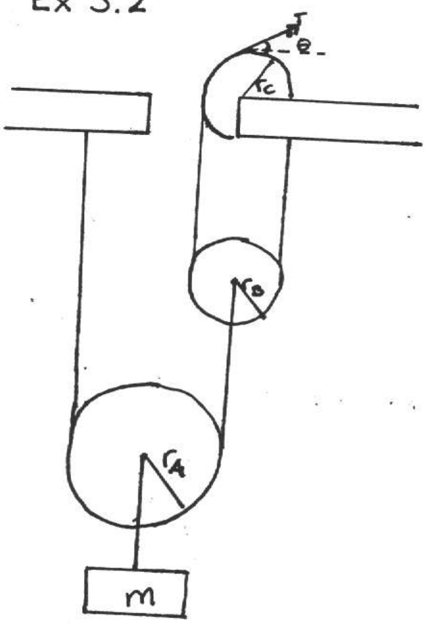


Även vid färre antal obekanta är det ibland inte möjligt att entydigt bestämma dessa.

<u>Procedur för problemlösning:</u>

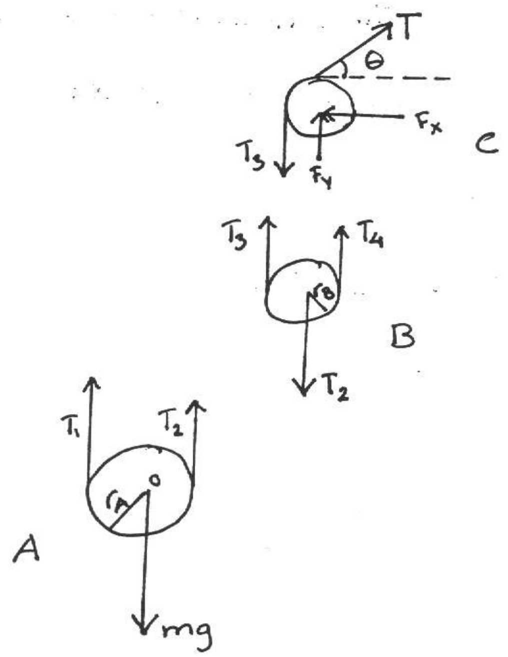
1
:
6. } boken

Ex 3.2



Bestäm kraften T och krafterna på den översta trissan från upplaget!

Vi frilägger de tre trissorna



Ställ upp jämviktsekvationerna

$$A\begin{cases}\uparrow: & T_1 + T_2 - mg = 0\\ \rightarrow: & 0 = 0\\ \curvearrowleft: & T_1 \cdot r_A - T_2 r_A = 0\end{cases}$$

$$B\begin{cases}\uparrow: & T_3 + T_4 - T_2 = 0\\ \rightarrow: & 0 = 0\\ \curvearrowleft: & T_3 \cdot r_B - T_4 r_B = 0\end{cases}$$

$$C\begin{cases}\uparrow: & T\sin\theta + F_Y - T_3 = 0\\ \rightarrow: & T\cos\theta - F_x = 0\\ \curvearrowleft: & T_3 r_c - T r_c = 0\end{cases}$$

Lös detta:

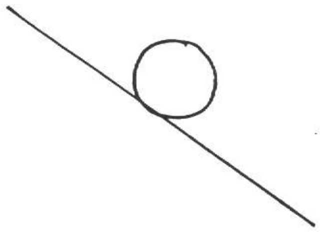
$T_1 = T_2 = \frac{mg}{2}$

$T_3 = T_4 = \frac{mg}{4}$

$T = \frac{mg}{4}$

$$\begin{cases}F_x = \frac{mg}{4}\cos\theta\\ F_Y = \frac{mg}{4}(1-\sin\theta)\end{cases}$$

Först ett förtydligande ...



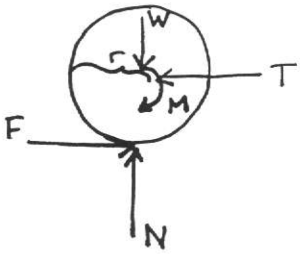
Vilka krafter verkar mellan planet och hjulet.

I allmänhet frilägges ett hjul

så här

Beroende på vilka andra krafter och vridmoment som påverkar hjulet $F = 0$ eller $F \neq 0$.

T.ex. med ett vridmoment från en motor



Jämviktsekv. ger här att

$$\begin{cases} F = T \\ W = N \end{cases}$$

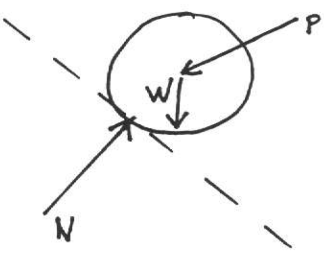
Med momentpunkten i hjulets mitt:

$Fr = M$

Med ett pålagt M får vi alltså $F = \dfrac{M}{r} \neq 0$.

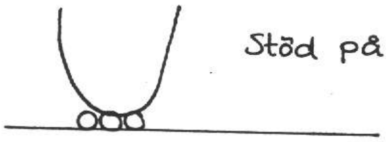
Kraften F kommer att driva bilen ~~ett~~ framåt.

Men i vårt ursprungliga exempel har vi istället



Momentjämvikt kring hjulets centrum ger nu att

$F = 0$



Jämvikt i tre dimensioner

För att en stel kropp som påverkas av ett kraftsystem med resultanten $\mathbb{R}$ och vridmomentet $\mathbb{M}$ (med avseende på någon punkt o) skall vara i jämvikt åste

$\mathbb{R} = 0$ (3 ekv $R_x = R_y = R_z = 0$)

$\mathbb{M} = 0$ (3 ekv $M_x = M_y = M_z = 0$)

totalt 6 ekvationer

Friläggning sker på samma sätt som i två dimensioner. Figurer (obligatoriska) kan vara i perspektiv eller projektion.

Fig 3.8 i boken ger exempel på krafter mellan kroppar.

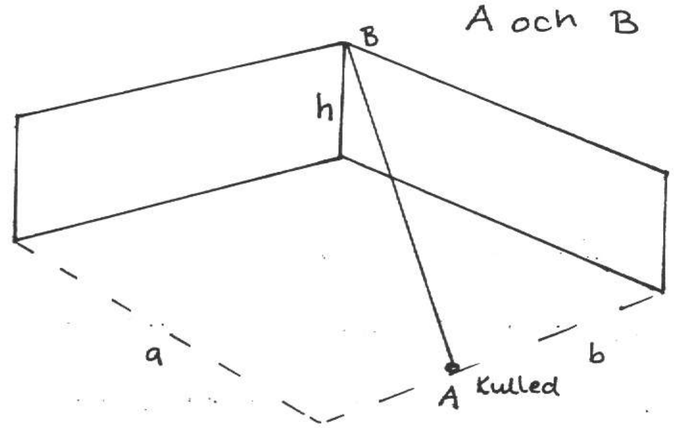
Ibland räcker det med färre än sex ekvationer för att beskriva en stel kropp i jämvikt (Fig. 3.9. Detta brukar dock vara uppenbart.

Ibland (ofta i verkligheten, sällan i boken) räcker inte ekvationerna för att bestämma alla obekanta . (Satiskt obestämt problem).

Ekvationerna läses som i två dimensioner, men M's vektoregenskaper är viktigare (kryssprodukt!)

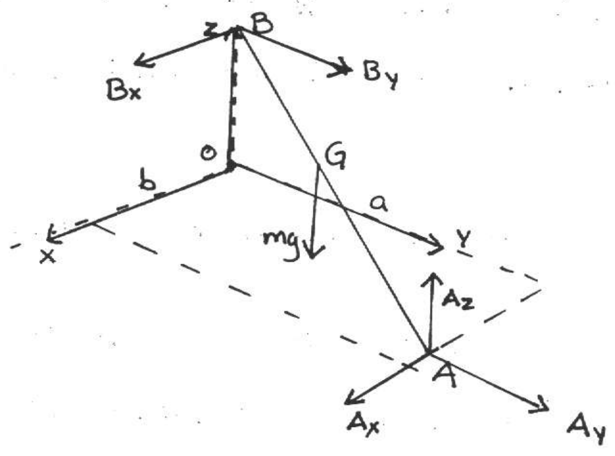
Exempel 3.5

En stång är i sin nedre ände fritt vridbar kring en kulled. Den övre änden vilar mot glatta vertikala väggar. se figur. Bestäm krafterna på stången i A och B



Stången är homogen och har tyngden mg. Mått enligt figuren.

Lösn. Vi frilägger stången



Obs att i bokens lösning har några krafter definierats med motsatt tecken. Jag har dock valt alla komponenter i de positiva koordinatriktningarna.

Vi har alltså fem obekanta A_x, A_y, A_z, B_x och B_y, men i princip sex jämviktsekvationer.

Fysikalisk intuition säger att det bör finnas en (entydig) lösning.

Alla momentpunkter är i princip lika bra, men vi väljer A.

Vi räknar med vektorer i komponentform.

Vektorerna från A till G och A till B är

$$\mathbf{r}_{AB} = -b\mathbf{i} - a\mathbf{j} + h\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_{AG} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{AB}) = -\frac{b}{2}\mathbf{i} - \frac{a}{2}\mathbf{j} + \frac{h}{2}\mathbf{k}$$

Kraftjämvikt ger

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{R} &= A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} + B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} - mg\mathbf{k} \\ &= (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z - mg)\mathbf{k} \end{aligned}$$

dvs

$$\begin{cases} A_x + B_x = 0 \\ A_y + B_y = 0 \\ A_z - mg = 0 \end{cases}$$

Momentjämvikt kring punkten A ger

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{M}_A &= \mathbf{r}_{AB} \times (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j}) + \mathbf{r}_{AG} \times (-mg\mathbf{k}) \\ &= (-b\mathbf{i} - a\mathbf{j} + h\mathbf{k}) \times (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j}) + \\ &+ \left(-\frac{b}{2}\mathbf{i} - \frac{a}{2}\mathbf{j} + \frac{h}{2}\mathbf{k}\right) \times (-mg\mathbf{k}) = \\ &-bB_y\mathbf{k} + aB_x\mathbf{k} + hB_x\mathbf{j} - hB_y\mathbf{i} - mg\frac{b}{2}\mathbf{j} + mg\frac{a}{2}\mathbf{i} = \\ &\left(mg\frac{a}{2} - bB_y\right)\mathbf{i} + \left(hB_x - mg\frac{b}{2}\right)\mathbf{j} + (-bB_y + aB_x)\mathbf{k} \end{aligned}$$

dvs

$$\begin{cases} \frac{mga}{2} - hB_y = 0 \\ -\frac{mgb}{2} + hB_x = 0 \\ -bB_y + aB_x = 0 \end{cases}$$

tre. ekv

två obek

B_x, B_y

$\Longleftrightarrow$

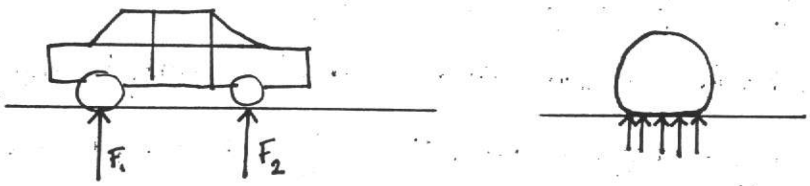
$$\begin{cases} B_x = \frac{mgb}{2h} \\ B_y = \frac{mga}{2h} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_x = -\frac{mgb}{2h} \\ A_y = \frac{-mga}{2h} \\ A_z = mg \end{cases}$$

5 Kraftfördelningar

5.1 Introduktion

Hittills har vi behandlat punktkrafter som angriper i en viss punkt. Verkliga krafter är i allmänhet kraftfördelningar som angriper över ett ändligt område. Om detta område är litet (i förhållande till andra relevanta dimensioner) så kan vi ofta approximera med en punktkraft.



Ibland är det istället praktiskt att approximera ett antal punktkrafter med en kraftfördelning

Precis som för ett kraftsystem med punktkrafter så kan en kraftfördelning som verkar på en stel kropp ersättas med en resulterande kraft med en viss verkningslinje.
(eller en kraftskruv i tre dimensioner).

Vi kommer att ge exempel på kraftfördelningar i en, två och tre dimensioner:

<u>En dimension</u>: T.ex. en balk som belastas med ett visst antal N/m

<u>Två dimensioner</u>: Tryck i fluider (vätskor och gaser) mäts i $N/m^2 = Pa$

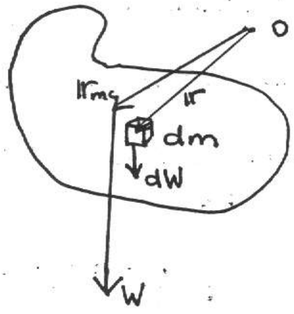
<u>Tre dimensioner</u>: Tyngdkraften verkar över hela kroppen.

5.2. Masscentrum

En stel kropp kan tänkas uppbyggd av små masselement dm.

Tyngdkraften på ett sådant element är

$dW = dm\, g$ ← tyngdaccelerationen



Total tyngdkraft på kroppen är

$$W = \int dW = \int dm g = g \int dm = g m$$ ← kroppens tot. massa.

Vi vill ersätta tyngdkraftsfördelningen med en punktkraft W med en viss angreppspunkt. Denna skall väljas så att vridmomentet med avseende på någon punkt O är oförändrat.

Vi inför ortsvektorn $\mathbb{r}$ för masselementet dm.

Tyngdpunktens ortsvektor $\mathbb{r}_{mc}$ är ett viktat medelvärde av masselementens ortvektorer.

$$\mathbb{r}_{mc} = \frac{1}{m}\int dm\,\mathbb{r} = \frac{1}{m}\int dV\,\underbrace{\rho(x,y,z)}_{\text{densitet}}(x\mathbb{i} + y\mathbb{j} + z\mathbb{k})$$

För en stel kropp kan man ersätta tyngdkraftsfördelningen med en punktkraft i tyngdpunkten.

Avsnitten 5.3, 5.4, 5.5 behandlas i flervariabelanalysen.

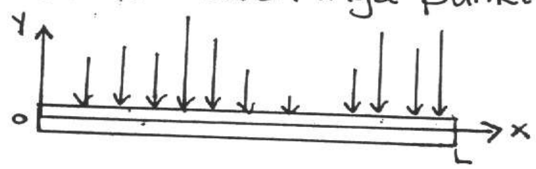
Några speciella tillämpningar

Principerna är viktigare än specifika exempel.

5.6 Balkar - extrema effekter

Det finns många olika typer av balkar (fig 5.18)

I allmänhet beskrivs lasten av en kraftfördelning, men det kan även ingå punktkrafter.



För enkelhetens skull har vi antagit en balk längs x-axeln. Denna beskrivs av en funktion w(x) med enhet N/m.

Totala lasten på balken är

$$R = \int_0^L dx\, W(x)$$ (Obs att detta egentligen är y-komponenten av vektorer $\mathbb{R}$ och $\mathbb{W}(x)$)

Vi vill ersätta lasten med en ekvivalent punktkraft R som angriper i punkten med x-koordinat $\bar{x}$ ("medelvärde"). Vridmomentet m a p O skall vara det samma, dvs

$$R\bar{x} = \int_0^L \underset{\text{hävarm}}{x}\, \underbrace{W(x)dx}_{\text{kraft på balkelement mellan } x \text{ och } x+dx}$$

dvs

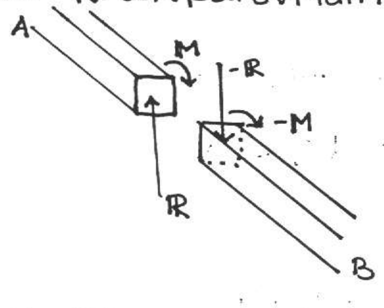
$$\bar{x} = \frac{1}{R}\int_0^L dx\, x\, W(x)$$

5.7. Balkar - interna effekter:

Betrakta en balk

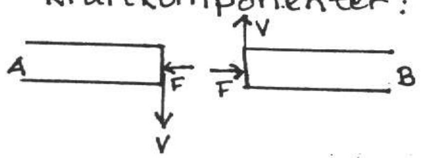
och gör ett (tänkt) snitt någonstans.

De två delarna påverkar varandra med krafter och kraftparsvridmoment.



Komponenterna av $\mathbb{R}$ och vridmoment $\mathbb{M}$ har olika namn.

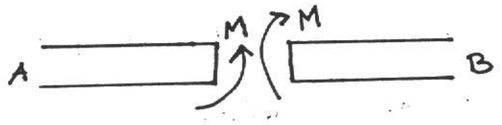
Kraftkomponenter:



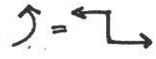
F = tryck eller dragkraft

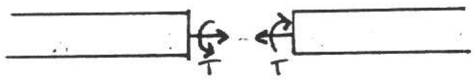
V = skjuvkraft

Vridmomentskomponenter



M = böjmoment

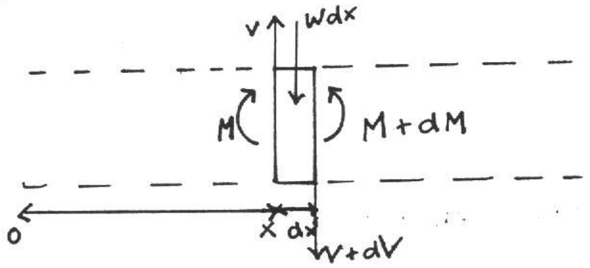




T = torsionsmoment

V, F, M och T är i allmänhet funktioner av lägeskoordinaten x längs balken.

För att bestämma dem frilägger vi en del av balken.



(Vi bortser från drag/tryckkrafter och torsionsmoment)

Kraftjämvikt ger

$\uparrow$: $V - wdx - (V + dV) = 0$

dvs $w = -\dfrac{dV}{dx}$

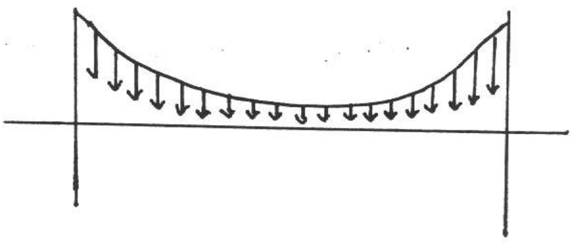
Momentjämvikt kring vänstra snittytan ger

$\curvearrowleft$: $\cancel{M} - (\cancel{M} + dM) + \underbrace{\cancel{w\,dx\,\tfrac{dx}{2}}}_{\text{pyttelitet}} + (V + \cancel{dV})dx = 0$

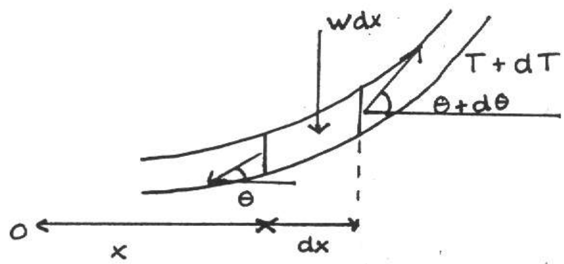
dvs $-dM + Vdx = 0$ eller $V = \dfrac{dM}{dx}$

Givet $w(x)$ och $V(0)$ och $M(0)$ kan vi alltså bestämma först $V(x)$ och sedan $M(x)$

5.8 Böjliga kablar



Man frilägger en del av en kabel.



Obs att kraften T alltid är i kabelns riktning och att vridmomentet är noll.

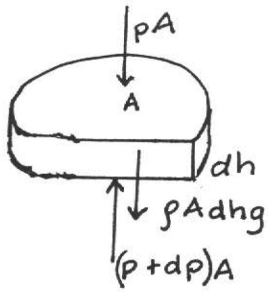
Obs att T är en dragkraft (ej torsionsmoment)

5.9 Fluidstatik

En fluid (vätska eller gas) kan bara ta upp tryckkrafter (vinkelrät mot begränsningsytan)

För att bestämma trycket ($N/m^2 = Pa$)

som funktion av läget frilägger vi ett fluidelement.



ρ densitet

Vi får alltså kraftjämvikt då

$$(p + dp)A - pA - \rho A dh g = 0 \quad \text{eller} \quad \frac{dp}{dh} = \rho g$$

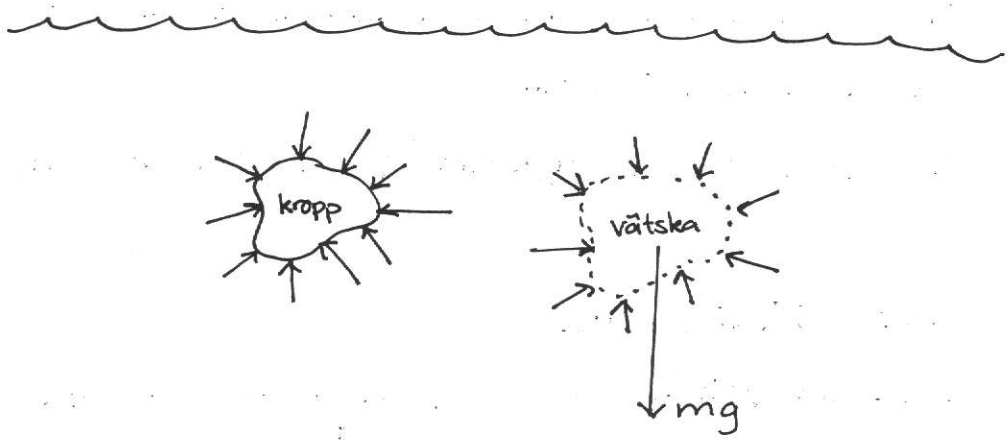
Densiteten ρ är i allmänhet en funktion av trycket p. För en (inkompressibel) vätska har vi dock ρ = konstant så att

$$p = p_0 + \rho g h$$

trycket då $h = 0$

Slutligen: Arkimedes princip:

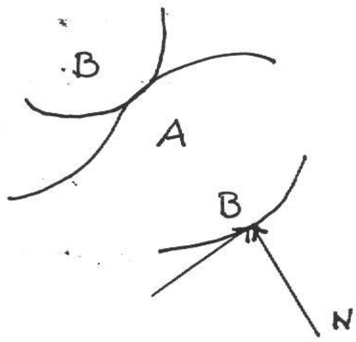
En i vätska nedsänkt kropp påverkas av en lyftkraft som är lika med den undanträngda vätskans tyngd. (Heureka!)



6. Friktion

6.1 Introduktion

En kropp som är i kontakt med en annan påverkas i allmänhet inte bara av en normalkraft N utan även av en tangentiell friktionskraf F. Denna är riktad så att den motverkar rörelsen eller tendensen till rörelse.

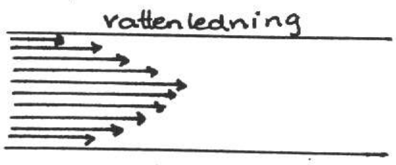


Friktion kan ibland försummas men spelar ibland en avgörande roll. Friktion leder till energiförluster och slitage, men är ibland önskvärd (bromsar, kopplingar, skosulor...)

6.2 Typer av friktion

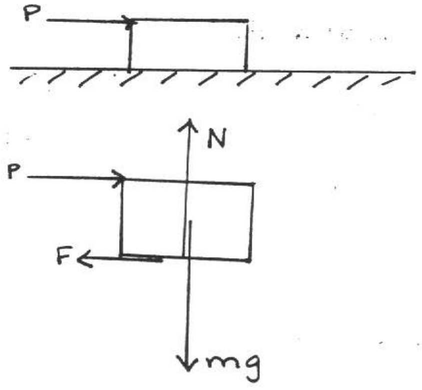
1) Torr friktion uppstår mellan två torra eller delvis smorda ytor. Beror (bland annat) på ojämnheter i ytorna, molekylära krafter... Detta är svårt (omöjligt) att beskriva exakt, men det finns en approximativ teori som ofta fungerar bra.

2) Friktion i fluider beror på fluidens viskositet, dvs förmåga att uppta skjuvkrafter.



3) Inre friktion uppstår vid plastisk deformation av en kropp.

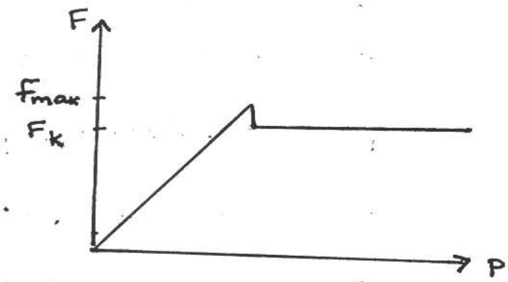
6.3 Torr friktion



Frilägg en kropp på ett horisontellt plan.

Vi börjar med den yttre kraften $P = 0$ och ökar sedan P succesivt. Vad händer med friktionskraften F?

Kroppen ligger först stilla. Det måste då gälla att $F = P$. Så småningom har vi att $F = F_{max}$. Kroppen börjar att glida. Friktionen minskar då något till $F = F_k$ (kinetisk friktion) och förblir sedan konstant om vi ökar P ytterligare. (Kroppen är då inte i jämvikt).



Det är som sagt inte lätt att ge en exakt beskrivning av F_{max} och F_k. Vi kommer att använda följande modell (Coulomb friktion):

- Den maximala statiska friktionen F_{max} ges av $F_{max} = \mu_s N$ ← normalkraften

μ_s ← statisk friktionskoefficient beror (i stort sett) bara på ytornas material och struktur, (och inte t.ex på arean).

OBS att för en kropp i jämvikt gäller att friktionskraften F uppfyller

$F < F_{max}$

– Den kinetiska friktionen F_k ges av

$F_k = \mu_k N$ ← normalkraft

↑ kinetisk friktionskoefficient

beroende som för μ_s.

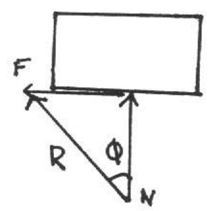
beror inte heller på hastigheten.

I allmänhet gäller alltså att $\mu_k < \mu_s$

men ofta sätter vi $\mu_k \approx \mu_s = \mu$ ← friktionskoefficient.

Ibland inför man friktionsvinkeln ϕ definierad genom

$\tan \phi = \mu$



Vid problemlösning uppstår ett av följande fall:

1) Vi är intresserade av att undersöka precis när en kropp börjar röra sig. Vi kan då ansätta att $F = F_{max} = \mu_s N$

2) Vi vet att kroppen rör sig. Sätt då $F = F_k = \mu_k N$

3) Vi vet inte om kroppen rör sig eller ej. Börja då med att anta att kroppen inte rör sig.

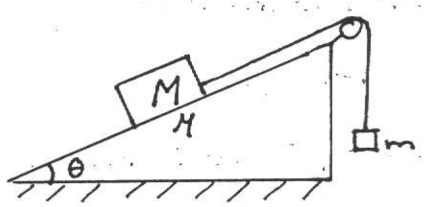
Lös jämviktsekvationerna och bestäm normal och friktionskraft N och F.

Om $F < F_{max}$ så var antagandet korrekt.

Om $F > F_{max}$ så var antagandet felaktigt. Kroppen rör sig alltså. Sätt $F = F_k$ och följ 3).

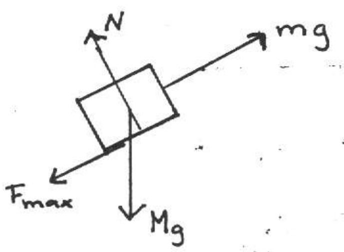
Exempel 6.2

M, θ, m är givna. Det



gäller att $\mu < \tan\theta$. Mellan vilka gränser måste m ligga för att jämvikt ska råda?

Vi ökar m tills systemet precis börjar röra sig. Då har vi



Normalkraften är egentligen en kraftfördelning. Den har dock en resultant vars angreppspunkt är sådan att momentjämvikt är uppfylld.

Återstår kraftjämvikt:

$$\begin{aligned} \nearrow&: \\ \nwarrow&: \end{aligned} \begin{cases} mg - F_{max} - Mg\sin\theta = 0 \\ N - Mg\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_{max} = -Mg\sin\theta + mg \\ N = Mg\cos\theta \end{cases}$$

Vi har även att

$$F_{max} = \mu_s N$$

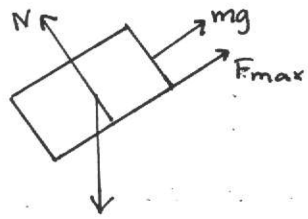
Insättning av detta och (2) i (1):

$$\mu_s Mg\cos\theta = -Mg\sin\theta + mg$$

dvs

$$m = M(\mu_s \cos\theta + \sin\theta)$$

Minska m tills glidning neråt inträffar:



$$\begin{aligned} \nearrow: \quad & \begin{cases} mg + F_{max} - Mg\sin\theta = 0 \\ N - Mg\cos\theta = 0 \end{cases} \\ \nwarrow: \quad & \end{aligned}$$

På liknande sätt som tidigare

$$\begin{cases} F_{max} = \\ N = \ldots \end{cases}$$

Sätt $F_{max} = \mu_s N$

Lös ut m:

$$m = M(-\mu_s \cos\theta + \sin\theta)$$
$$= M\cos\theta(\tan\theta - \mu_s) > 0$$

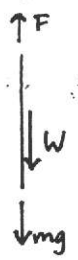
./.

Bestäm kraften från snöret på taket.

tyngdlöst snöre.

$F = mg$

Frilägg tungt snöre



$F = mg + W$

2 Partikelkinematik

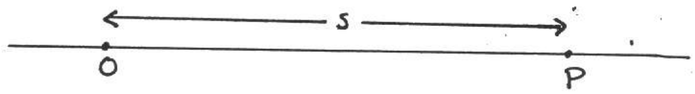
2.1 Introduktion

Kinematik = "rörelsegeometri"

Beskrivning av en given rörelse (men ingen analys av dess "orsaker").

2.2 Rätlinjig rörelse

För att beskriva läget för en partikel som rör sig längs en rät linje anger vi avståndet s till någon fix punkt O.



Variabeln s är en funktion av tiden t. Partikelns hastighet v är

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

och dess acceleration a är

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \dot{v} = \ddot{s}$$

Dessa differentialekvationer behandlas med metoder från analysen. (T.ex är kanske a känt som funktion av s. Bestäm s som funktion av t!)

Om a är känd som funktion av tiden kan vi bestämma v som funktion av t.

$$v(t) = \int_0^t a(t)\,dt + v_0 \qquad v_0 = v(0)$$

Vidare är

$$s(t) = \int_0^t v(t)\,dt + s_0 \qquad s_0 = s(0)$$

Viktigt specialfall : a = konstant

Vi får då

$$v = v_0 + at$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

2.3 Plan rörelse

Vi beskriver läget för en partikel P i ett plan genom att ge vektorn $\mathbf{r}$ från en fix punkt O till P. Denna ortsvektor är en funktion av tiden t.

Partikelns hastighetvektor $\mathbf{v}$ är

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$$

och dess accelerationsvektor $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$$

Hastighetsvektorns storlek $v = |\mathbf{v}| = |\dot{\mathbf{r}}| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|$ kallas för partikelns fart.

Obs att

$$v \neq \frac{d}{dt}|\mathbf{r}| = \frac{d}{dt} r = \dot{r}$$

Fig 2.5

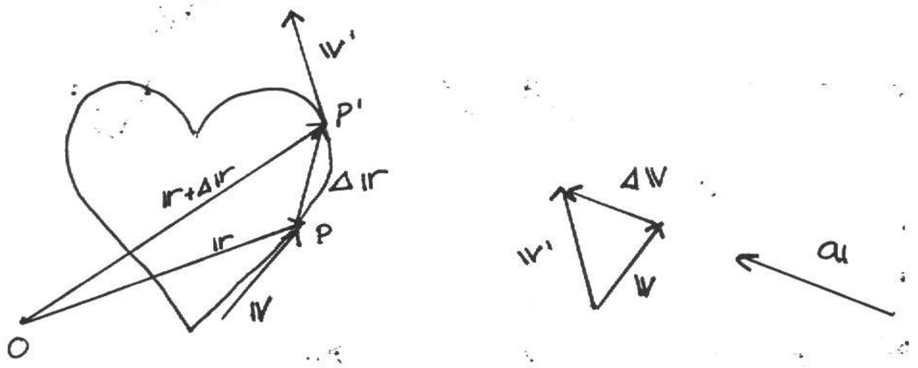
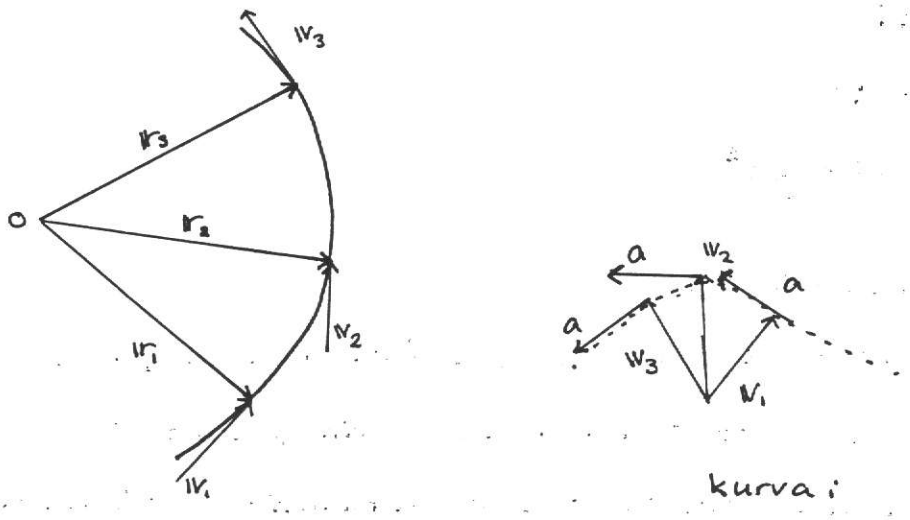


Fig 2.6

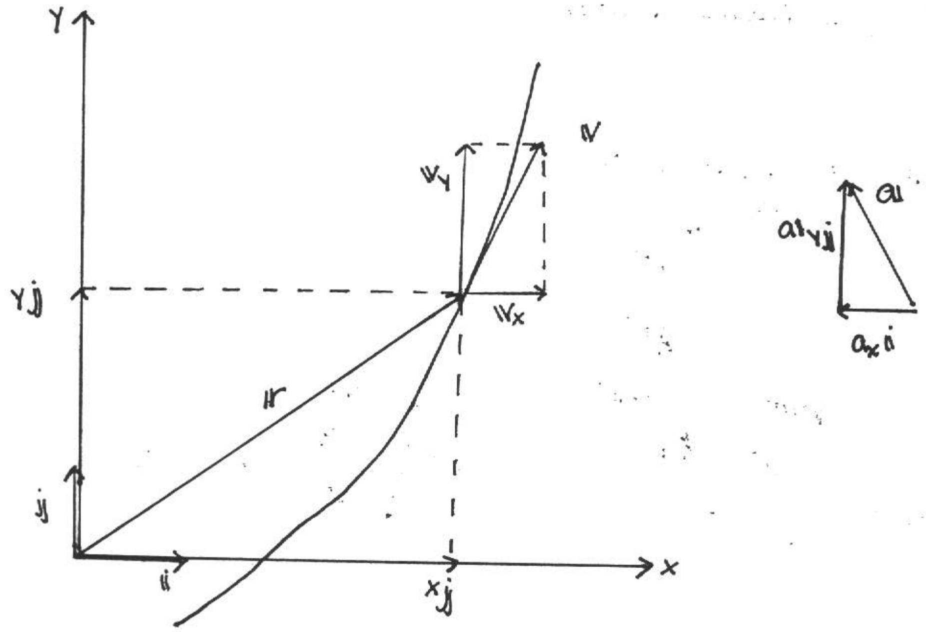


kurva i "lägesplanet"

kurva i "hastighetsplanet"

2.4. Cartesiska koordinater

Om vi inför vårt vanliga Cartesiska koordinat-system kan vi uttrycka vektorerna $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{a}$ som linjärkombination av enhetsvektorerna $\mathbf{i}$ och $\mathbf{j}$:



$$\begin{cases} \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} & (1) \\ \mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} & (2) \\ \mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} & (3) \end{cases}$$

Tag tidsderivatan av (1) och jämför med (2)

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \end{cases}$$

och på samma sätt

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \ddot{x} = a_x \\ \dot{v}_y = \ddot{y} = a_y \end{cases}$$

∴ Rörelsen kan tänkas som separata rätlinjiga rörelser längs x och y-axlarna.

T.ex en kastparabel, där

$\mathbf{a} = -g\mathbf{j}$

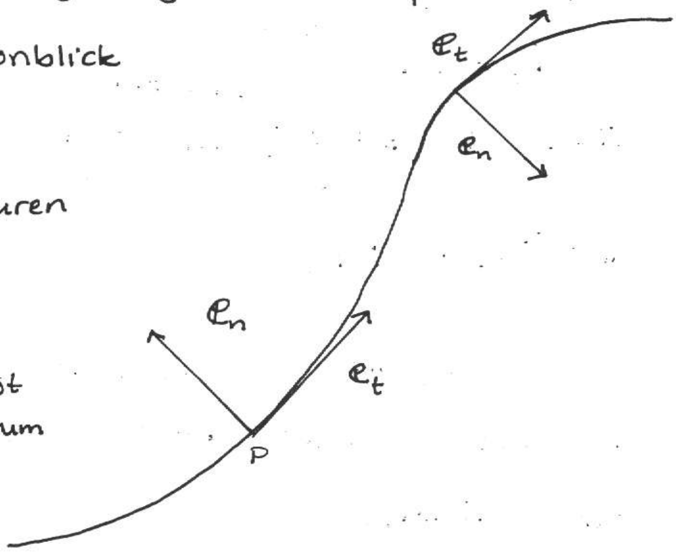
2.5 Koordinater i normal och tangentriktningen

En partikel rör sig längs någon kurva i planet. Vi kan i ett givet ögonblick införa enhetsrektorer

$\mathbf{e}_t$ och $\mathbf{e}_n$ enligt figuren

$\mathbf{e}_t$: i rörelsens riktning

$\mathbf{e}_n$: vinkelrät mot kurvan och riktad mot krökningscentrum



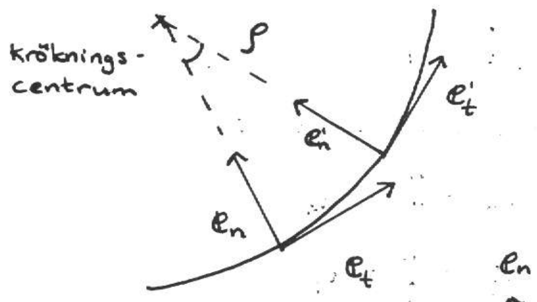
Partikelns hastighetsvektor är nu

$\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_t$

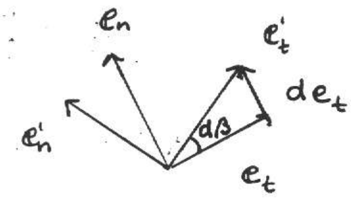
Vi vill nu derivera med avseende på t för att bestämma accelerationen $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\,\mathbf{e}_t + v\,\dot{\mathbf{e}}_t$$

Vad är $\dot{\mathbf{e}}_t$?



ρ = krökningsradie



Vi ser att

$$d\mathbf{e}_t = d\beta\,\mathbf{e}_n$$

och att

$$d\mathbf{e}_n = -d\beta\,\mathbf{e}_t$$

Vad är $\dot{\mathbf{e}}_t$?

Jo, $\dot{\mathbf{e}}_t = \dot{\beta}\,\mathbf{e}_n$

Vidare är $\dot{\beta} = \frac{v}{\rho}$. farten Alltså är

$$\mathbf{a} = \dot{v}\,\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\,\mathbf{e}_n.$$

Obs att $\mathbf{e}_t$-komponenten av $\mathbf{a}$ kan vara riktad framåt eller bakåt beroende på om farten ökar eller minskar.

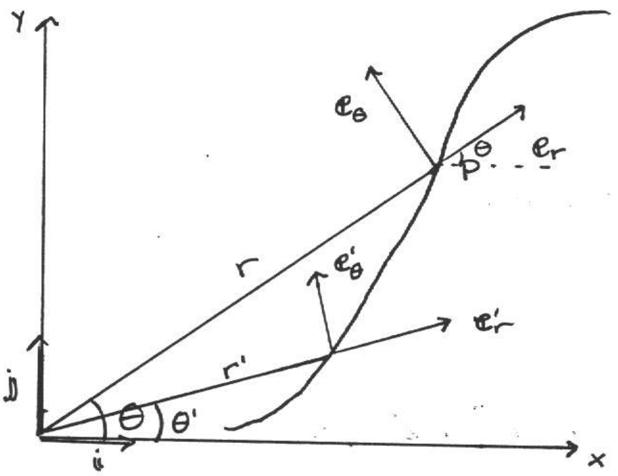
$\mathbf{e}_n$-komponenten är dock alltid riktad mot krökningscentrum.

Ett viktigt specialfall av dessa koordinater är när banan är en cirkelbana.

Läs detta själva!

2.6 (Plan)polära koordinater

Vi kan beskriva läget P för en partikel genom att ge avståndet r till en fix punkt O och vinkeln θ mellan ortsvektorn $\mathbf{r} = \overline{OP}$ och en fix riktning (positiva x-axeln).



Vi inför ortonormerade enhetsvektorer e_r och e_θ enl. fig. (ökar r och håll θ konstant

" θ " r ")

Partikelns ortsvektor $\mathbf{r}$ är alltså

$\mathbf{r} = r\,e_r$

Vi vill sedan bestämma $\mathbf{v}$ och $\mathbf{a}$ genom derivering

$\mathbf{v} = \dot{r}\,e_r + r\,\dot{e}_r$

På samma sätt som tidigare får man

$$\begin{cases} d e_r = d\theta \cdot e_\theta \\ d e_\theta = -d\theta \cdot e_r \end{cases}$$

Alternativt kan man visa detta såhär:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \cos\theta\, \mathbf{i} + \sin\theta\, \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\, \mathbf{i} + \cos\theta\, \mathbf{j} \end{cases}$$

Alltså

$$\begin{cases} d\mathbf{e}_r = -\sin\theta\, d\theta\, \mathbf{i} + \cos\theta\, d\theta\, \mathbf{j} = d\theta . \mathbf{e}_\theta \\ d\mathbf{e}_\theta = \dots \end{cases}$$

Kedjeregeln ger nu

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_r = \frac{d}{dt} \mathbf{e}_r = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} \mathbf{e}_r = \dot{\theta}\, \mathbf{e}_\theta \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\, \mathbf{e}_r \end{cases}$$

Vi får nu hastighetsvektorn

$$\mathbf{v} = \dot{r}\, \mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\, \mathbf{e}_\theta$$

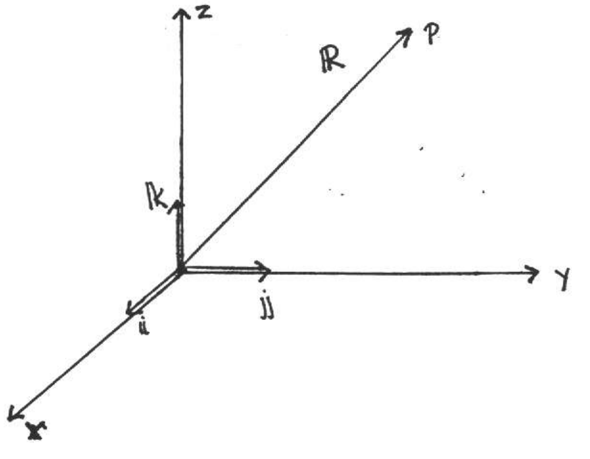
och accelerationen

$$\mathbf{a} = \dots = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\, \mathbf{e}_\theta$$

2.7. Rörelse i rummet

För att beskriva en rörelse i det tredimentionella rummet använder vi oftast något av följande tre koordinatsystem:

- Cartesiska koordinater enl. fig.



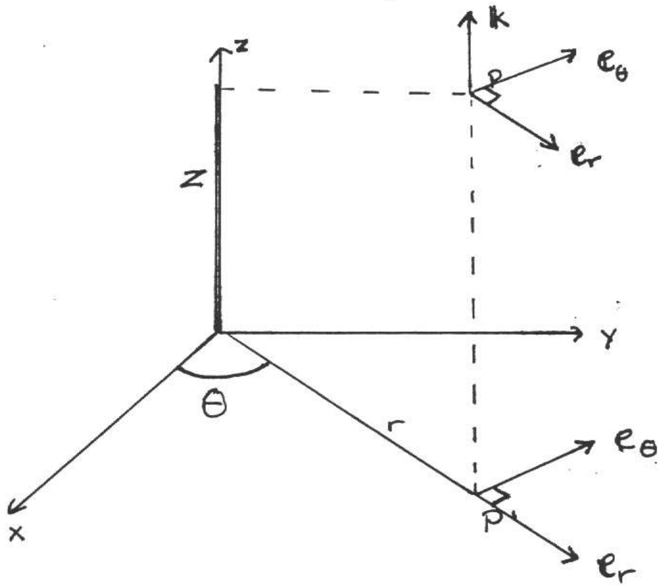
En partikel P med ortsvektor $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ har hastigheten

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

och accelerationen:

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{R}} = \ddot{x}\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j}\ \cancel{+\ddot{z}\mathbf{k}}$$

• <u>Cylindriska</u> koordinater kan ses som polära koordinater r och θ i xy-planet (med enhetsvektorer $\mathbf{e}_r$ och $\mathbf{e}_\theta$) samt en z-koordinat (med enhetsvektor $\mathbf{k}$).



Partikelns ortsvektor är

$$\mathbf{R} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{k}$$

Dess hastighet är

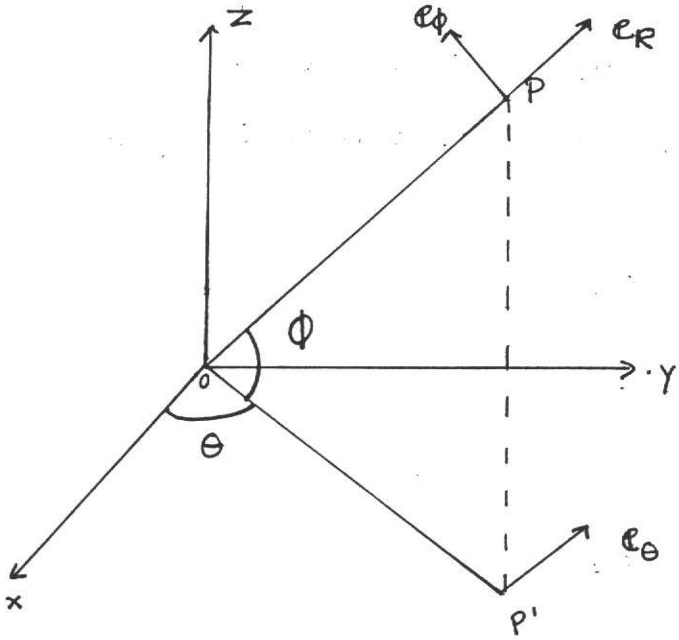
$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{z}\mathbf{k}$$ ty $\mathbf{e}_r$ är ej konstant!

$$= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{k}$$

Accelerationen är

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k}$$

• Sfäriska koordinater utgörs av avståndet R till origo O och två vinklar θ och ϕ enl. fig (ganska ovanliga konventioner)



Enhetsvektorer (ortogonala) e_r, e_ϕ, e_θ enl. fig.

En partikel med ortsvektor

$$\mathbf{R} = R\,\mathbf{e}_R$$

har hastigheten

$$\mathbf{v} = \dot{R}\,\mathbf{e}_R + R\dot{\theta}\cos\phi\,\mathbf{e}_\theta + R\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi$$

och accelerationen

$$\mathbf{a} = a_R\,\mathbf{e}_R + a_\theta\,\mathbf{e}_\theta + a_\phi\,\mathbf{e}_\phi$$

med

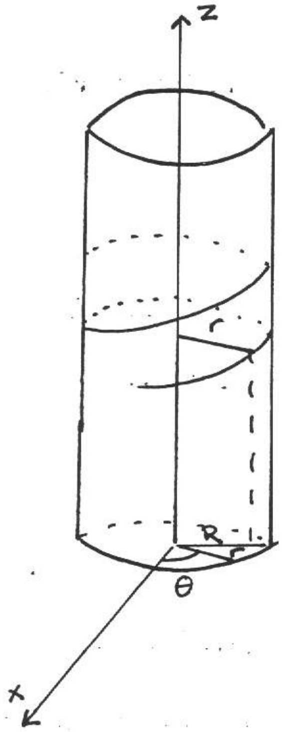
$$\begin{cases} a_R = \ldots \\ a_\theta = \ldots \\ a_\phi = \ldots \end{cases}$$

Slår man upp!

2/174

Cylinder med radie R

Spiral med stigning h per halvt varv. Givet farten v och $\dot{v}$ i ett visst ögonblick, bestäm accelerationen $\mathbf{a}$.



Vi använder cylindriska koordinater r, θ, z enligt figur.

Det gäller att

$$\begin{cases} r = R = \text{konstant} \\ z = \frac{h}{\pi} \cdot \theta + \text{konstant} \end{cases}$$

pga spiralens form.

Insättning i formlerna för hastighet och acceleration i cylindriska koordinater ger

$$\mathbf{v} = \underbrace{\dot{r}\mathbf{e}_r}_{=0} + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{k}$$

$$= R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{h}{\pi}\dot{\theta}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = (\cancel{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + \cancel{2\dot{r}\dot{\theta}})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k}$$

$$= -R\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + R\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{h}{\pi}\ddot{\theta}\mathbf{k}$$

Farten är

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{(R\dot{\theta})^2 + \left(\frac{h}{\pi}\dot{\theta}\right)^2}$$

$$= \dot{\theta}\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{\pi}\right)^2}$$

och dess ändring per tidsenhet

$$\dot{v} = \ddot{\theta}\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{\pi}\right)^2}$$

härav får vi $\dot{\theta} = \dfrac{v}{\sqrt{\ldots}}$

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{v}}{\sqrt{\ldots}}$$

och alltså

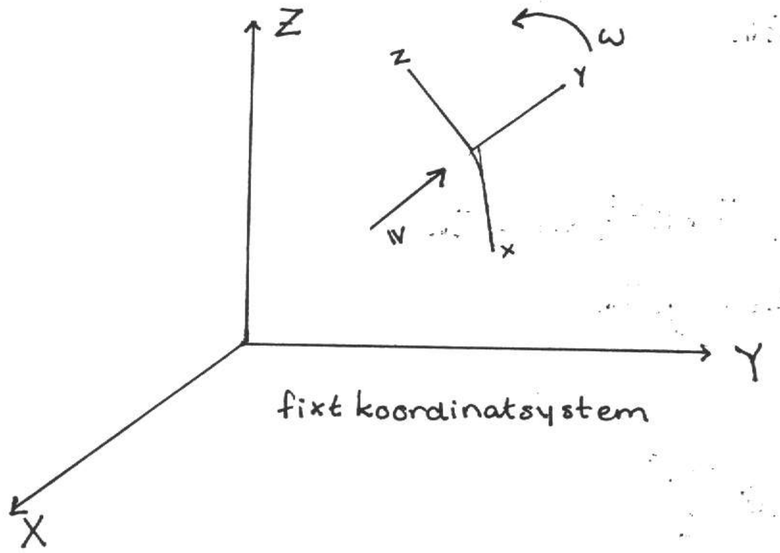
$a_l = \ldots$

2.8 Relativ rörelse

Hittills har vi diskuterat absolut rörelse i förhållande till ett "fixt" koordinatsystem.

Ibland är det dock lämpligt att använda rörliga koordinatsystem och diskutera en partikels rörelse relativt detta.

I allmänhet rör sig origo i ett sådant koordinatsystem relativt ett annat "fixt" origo, och dessutom kan det rotera.

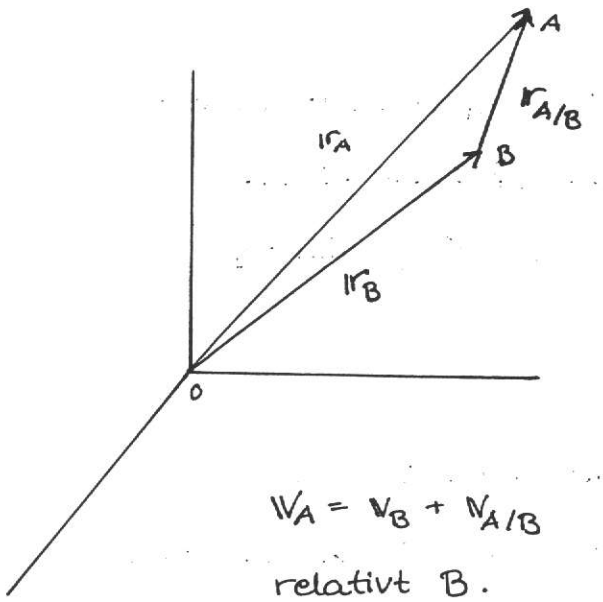


(Vi behandlar roterande koordinatsystem i Mekanik F del B)

Vi inför först ett fixt koordinatsystem med origo O.

Dess ortsvektor är $\mathbb{r}_B$.

En annan partikel A har ortsvektor $\mathbb{r}_A$ m a p origo O.



Vi kan nu skriva

$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B}$ ← vektor från B till A

$\mathbf{r}_{A/B}$ kallas för A's ortsvektor relativt B. Derivering ger

$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$ där $\mathbf{v}_{A/B} = \dot{\mathbf{r}}_{A/B}$ = A's hastighet relativt B.

$\mathbf{a} = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}$ $\mathbf{a}_{A/B}$ = A's acceleration relativt B.

2.9 Trångsvillkor

Def Antal frihetsgrader för ett mekaniskt system

=

antalet variabler som behövs för att fullständigt specificera läget för alla i systemet ingående kroppar i ett givet ögonblick. (# DOF = number of degrees of freedom)

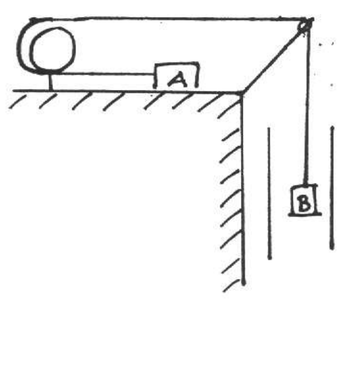
Ex Partikel i rummet: #DOF = 3

" på given yta: #DOF = 2

" på given kurva: #DOF = 1

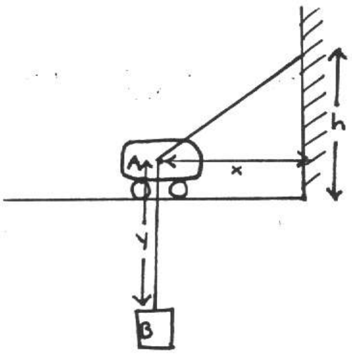
Ibland har vi flera partiklar vars rörelse är relaterade genom att de t. ex. är förbundna med linor, stänger, etc.

Detta minskar antalet frihetsgrader.



Men vi vill kanske ändå införa separata variabler för att beskriva de olika delkroppamas lägen. Dessa är då relaterade genom tvångsvillkor.

Ex 2/222



Rörelsen är sådan att B alltid är rakt under A. Givet A's fart V_A bestäm B's fart V_B

Systemet har en frihetsgrad.

x och y är relaterade genom tvångsvillkoret

$$L = y + \sqrt{x^2 + h^2} \qquad (*)$$

$\uparrow$ linans längd.

Vidare har vi att

$$\begin{cases} V_A = \dot{x} \\ V_B = |\mathbb{V}_B| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \end{cases}$$

Enklast är nog att ta tidsderivatan av (*)

$$0 = \dot{y} + \frac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2 + h^2}} \qquad \text{Alltså är } \dot{y} = -\frac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

och vi får

$$V_B = \sqrt{\dot{x}^2 + \frac{(x\dot{x})^2}{x^2 + h^2}} = \dot{x}\sqrt{\frac{2x^2 + h^2}{x^2 + h^2}}$$

3. Partikelkinetik

3.1 Introduktion

Vi skall nu kombinera kraftbegreppet och kinematiken för att förstå dynamiken för ett mekaniskt system. I den här delkursen behandlar vi bara system som består av partiklar.

Det finns i stort sett tre metoder för att göra detta:

1. "Newtons andra lag" beskriver sambandet mellan krafter som verkar på en kropp och dennas acceleration.

2. "Energiprincipen" säger att det arbete som en på en kropp verkande kraft uträttar är lika med ändringen i kroppens kinetiska energi.

3. "Bevarande av rörelsemängd" är en "djup" fysikalisk princip.

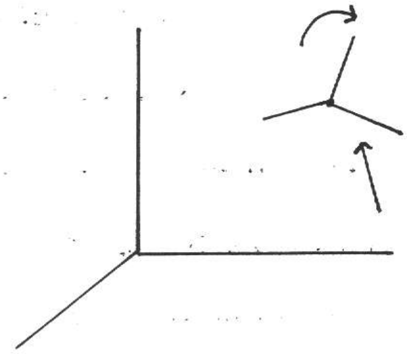
Pedagogiskt har vi 1. $\Rightarrow$ 2 och 3. men i principen är det nog 2 och 3 $\Rightarrow$ 1.

Valet av metod (er) beror i praktiken mest på problemet.

3.2 Newtons andra lag

Man kan införa (oändligt) många olika koordinatsystem i rummet. (Utgångspunkt och val av riktningar.)

I allmänhet translaterar och roterar dessa i förhållande till varandra.



En viktig klass är <u>inertialsystem</u>:

Ett inertialsystem är ett koordinatsystem relativt vilket en isolerad partikel (som inte påverkas av några yttre krafter) rör sig likformigt (dvs utan acceleration).

Empiriskt resultat: Det finns inertialsystem.

Obs att ett koordinatsystem som rör sig likformigt relativt ett inertialsystem också är ett inertialsystem.

Betrakta nu en partikel med massa m. Den påverkas av ett kraftsystem med resultanten $\mathbb{F}$. Den rör sig med accelerationen $\mathbb{a}$ relativt något inertialsystem. Då gäller alltid Newtons andra lag:

$$\boxed{\mathbb{F} = m \cdot \mathbb{a}}$$

(kallas ibland för partikelns rörelseekvation).

3.3. Problemlösning

Vanligtvis inför man ett lämpligt koordinatsystem och delar upp $\mathbb{F}$ och $\mathbb{a}$ i motsvarande komponenter. Newtons andra lag ger då två eller tre (i planet eller

rummet) ekvationer för dessa komponenter.
Viktigaste steget är en korrekt friläggning.
Rita en separat figur för varje delkropp A och markera alla krafter som verkar på denna pga dess växelverkan med andra kroppar (B, C, ...)
Tänk på Newtons tredje lag.
Ibland är rörelsen fri men ibland finns det tvång som begränsar den till en viss yta eller kurva.
Då påverkas partikeln av tvångskrafter (normalkrafter) från denna yta eller kurva.
Dessa steg är precis likadana som i statiken.
Därefter ställer man upp Newtons andra lag (som alltså ersätter statikens jämviktsekvationer.)

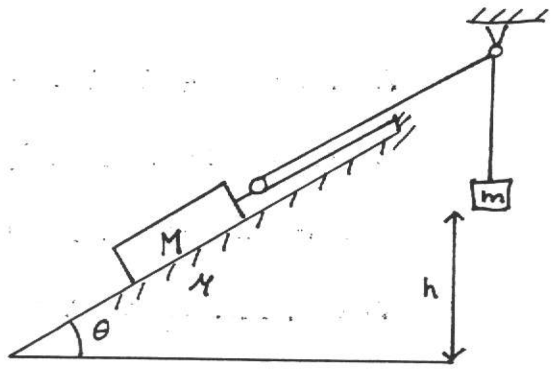
3.4 Rätlinjig rörelse

Om möjligt väljer man koordinatsystem så att t.ex x-axeln är i rörelseriktningen. Ofta räcker det då att använda x-komponenten av Newtons andra lag:

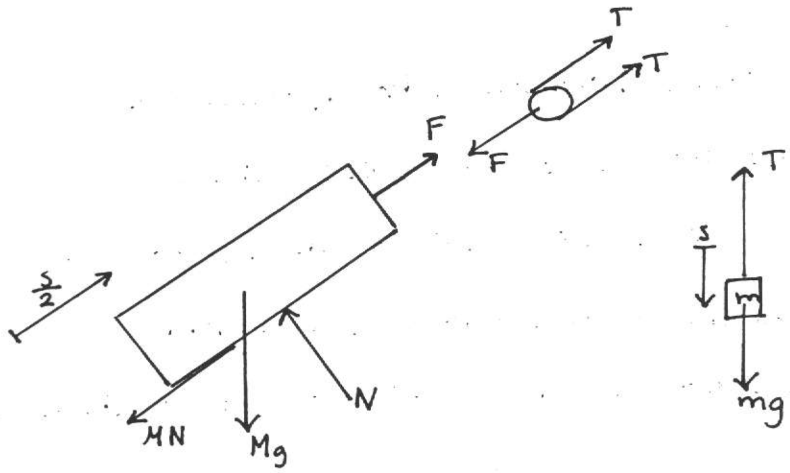
$$F_x = m a_x$$

Ex 3.3

Start i vila. Bestäm tyngdens hastighet vid nedslag.



Frilägg klossen, blocket och tyngden separat.



Ställ upp Newtons andra lag för varje delkropp.

$$\begin{cases} \text{klossen} \nearrow : & F - \mu N - Mg\sin\theta = M\frac{1}{2}\ddot{s} \\ \text{klossen} \nwarrow : & N - Mg\cos\theta = 0 \\ \text{blocket} \nearrow : & 2T - F = 0 \quad \text{(masslöst block)} \\ \text{tyngden} \downarrow : & mg - T = m \cdot \ddot{s} \end{cases}$$

Linjärt ekvationssystem med fyra ekvationer och fyra obekanta. $(F, T, N, \ddot{s})$

Lösning

$$\begin{cases} N = \ldots \\ F = \ldots \\ T = \ldots \\ \ddot{s} = \ldots \; g\,\dfrac{4m - 2M(\mu\cos\theta + \sin\theta)}{4m + M} = a = \text{konstant} \end{cases}$$

Vi har alltså likformig accelererad rörelse med acceleration a. Farten är då $v = at$ t = tid från start och fallsträckan $s = \frac{1}{2}at^2$.

Vid nedslaget är $s = h \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}}$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2ah} = \sqrt{gh\,\frac{8m - 4M(\mu\cos\theta + \sin\theta)}{4m + M}}$$

= farten vid nedslaget.

3.5 Kroklinjig rörelse

Välj lämpligt koordinatsystem och ställ upp Newtons andra lag i komponentform.

Boken behandlar bara plan rörelse:

- Cartesiska koordinater: $F_x = ma_x$, $F_y = ma_y$

  med $a_x = \ddot{x}$ och $a_y = \ddot{y}$

- Med koordinater i normal och tangentriktningen:

  $F_n = ma_n$, $F_t = ma_t$ med $a = \frac{v^2}{\rho}$ v = farten, ρ = krökningsradien

  $a_t = \dot{v}$

- Polära koordinater

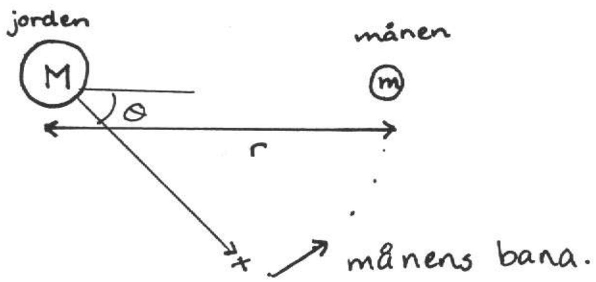
  $F_r = ma_r$, $F_\theta = ma_\theta$

  med $\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases}$

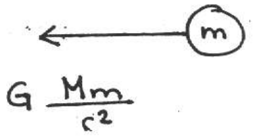
Kroklinjig rörelse i rummet behandlas i princip på samma sätt. (Accelerationens komponenter i sfäriska koordinater är ganska komplicerade)

<u>Exempel</u> Månen rör sig på en nästan cirkulär bana kring jorden med omloppstiden 27,3 dygn. Tyngdaccelerationen vid jordens yta är $9{,}82\ m/s^2$. Jordens radie är 6370 km.

Bestäm härur avståndet till månen!



Frilägg månen: Endast gravitationskraften fr. jorden!



Nu ställer vi upp Newtons andra lag i polära koordinater med jorden i origo.

$F_r = m a_r$

$$-G\frac{Mm}{r^2} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

men $\ddot{r} = 0$ (r = konstant)

och $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$ T = omloppstid

och $g = \frac{MG}{R^2}$ g = tyngdaccelerationen på jordytan

R = jordradie

Varav följer att avståndet jorden - månen är

$$r = \left(\frac{gR^2T^2}{(2\pi)^2}\right)^{1/3} = 3,83 \cdot 10^5 \text{ km}$$

($3,84 \cdot 10^5$ km enl. tabell)

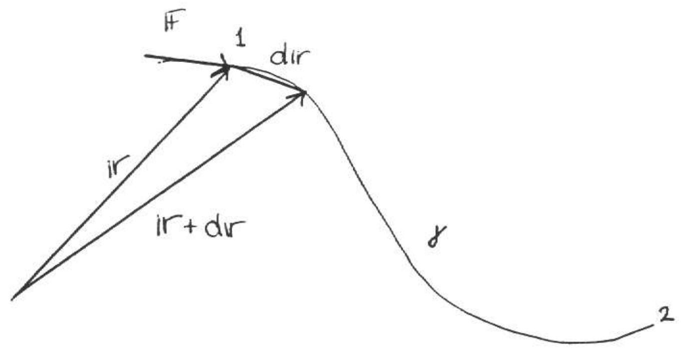
3.6 Arbete och kinetisk energi

Newtons andra lag $\mathbb{F} = m \cdot \mathbb{a}$ gäller i ett <u>givet ögonblick.</u> För att analysera ett förlopp under ett ändligt tidsintervall måste man integrera denna diff. ekv.

Integration m.a.p läget $\Rightarrow$ arbete och energibegreppet

" tiden $\Rightarrow$ impuls och rörelsemängd

Partikel P som angrips av en kraft $\mathbb{F}$ och förflyttas sträckan $d\mathbb{r}$



Vi säger att kraften då uträttar det infinitesimala arbetet dU på partikeln där

$dU = \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$

Obs att tvångskrafter (normalkrafter) har $dU = 0$

Vid en ändlig förflyttning från 1 till 2 längs kurvan γ uträttas arbetet

$U = \int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$ (skalär!) SI-enhet $Nm = J$ (Joule)

Antag nu att partikeln har massan m och sätt in $\mathbb{F} = m\mathbb{a}$ och $d\mathbb{r} = \mathbb{v}\,dt$ i uttrycket för U:

$$U = \int_\gamma m\mathbb{a} \cdot \mathbb{v}\, dt = \int m \frac{d\mathbb{v}}{dt} \cdot \mathbb{v}\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathbb{v}\cdot\mathbb{v}\right) dt = \left[m\frac{1}{2}\,\mathbb{v}\cdot\mathbb{v}\right]_{t=t_1}^{t_2} = \frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2$$

partikelns hastighet vid $t=t_1$ resp $t=t_2$

Vi definierar nu den <u>kinetiska energin</u> T för en partikel med massa m och fart v:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

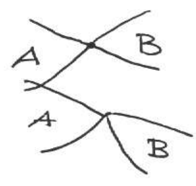
Vi har funnit att

"Det arbete som det yttre krafterna uträttar på en partikel under ett tidsintervall är lika med ändringen i partikelns kinetiska energi."

$$U = T_2 - T_1$$

Mycket användbart vid problemlösning.

<u>NB</u> Antag att vi har två kroppar A och B förenade med t.ex ett friktionsfritt gångjärn



A påverkas av B med en kraft $\mathbb{F}$

B " A " $-\mathbb{F}$

Totalt uträttar dessa krafter inget arbete. De behöver alltså inte beaktas.

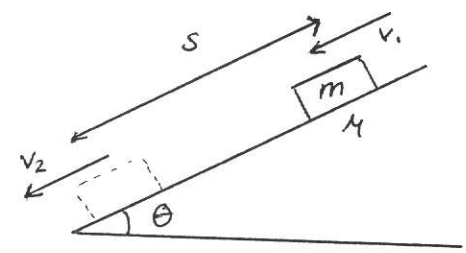
Def Uträttat arbete per tidsenhet kallas för effekt P.

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}}{dt} = \mathbb{F} \cdot d\mathbb{v}$$

partikelns hastighet.

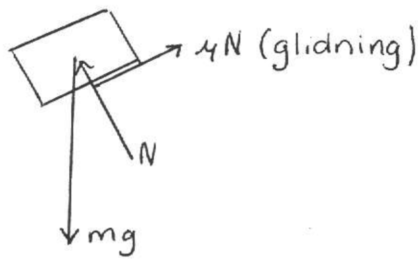
Def $\dfrac{\text{Nyttigt arbete}}{\text{tillfört arbete}} = \dfrac{\text{Nyttig effekt}}{\text{tillförd effekt}} = e =$ verkningsgrad

Exempel



Givet θ, s, m, μ och v_1. Bestäm v_2

Vi börjar med att frilägga klossen



Newtons andra lag

Vinkelrät mot planet:

$\nwarrow$: $N - mg\cos\theta = 0$

så $N = mg\cos\theta$

Uträttat arbete = ändring i kinetisk energi.

$$U = \frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2$$

Men vad är U?

$$U = (\underbrace{mg\sin\theta}_{\substack{\text{tyngdkraftens}\\ \text{komponent i}\\ \text{rörelseriktningen}}} - \underbrace{\mu mg\cos\theta}_{\substack{\text{friktions-}\\ \text{kraft}}})s$$

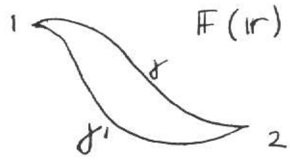
så $mgs(\sin\theta - \mu\cos\theta) = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2)$

Varur vi får

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gs(\sin\theta - \mu\cos\theta)}$$

3.7 Potentiell energi

Givet ett kraftfält dvs en kraf $\mathbb{F}$ som beror av läget i rummet $\mathbb{F} = \mathbb{F}(\mathbb{r})$ och en kurva γ : rummet från 1 till 2 så har vi definierat ett arbete



$$U = \int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$

Ett konservativt kraftfält är ett kraftfält sådant att U bara beror på punkterna 1 och 2 och inte på kurvan γ

$$U_\gamma = U_{\gamma'}$$

Antag nu att vi har ett konservativt kraftfält $\mathbb{F}(\mathbb{r})$.

Vi definierar nu dess <u>potentiella energi</u>

$V = V(\mathbb{r})$ (skalär funktion av läget).

$V(\mathbb{r})$ = Det arbete som uträttas vid förflyttning från punkten med ortsvektor $\mathbb{r}$ till en given referenspunkt O.

Obs att om vi byter referenspunkt så ändras V med en additiv konstant.

$\therefore$ Bara skillnader mellan potentiella energier är fysikaliska.

Vi definierar nu den <u>totala mekaniska energin</u> E för en partikel

$$E = T + V$$

Antag nu att en partikel påverkas av konservativa krafter med potentiell energi V samt av ytterligare en kraft $\mathbb{F}'$. Vid förflyttning längs en kurva γ har vi

$$U = \underbrace{T_2 - T_1}$$

Totala arbetet som uträttas på partikeln

ändring i kinetisk energi.

$$\text{Men } U = U' + \overbrace{(V_1 - V_2)}^{\text{arbete som uträttas av de konservativa krafterna.}}$$

arbete som uträttas av $\mathbb{F}'$

Så

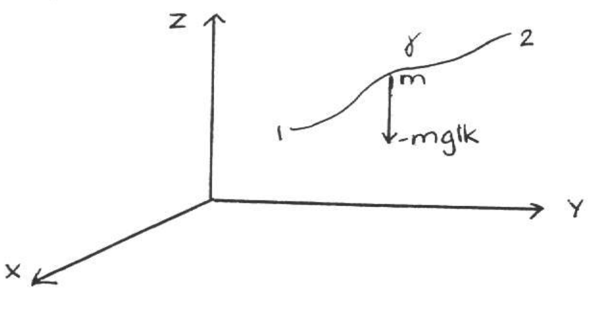
$$U' = T_2 + V_2 - (T_1 + V_1) = E_2 - E_1$$

dvs det av $\mathbb{F}'$ uträttade arbete är lika med ändring i partikelns totala mekaniska energi.

Många krafter i mekaniken är konservativa.

Exempel på konservativa kraftfält

1) Homogent tyngdkraftsfält



Vid förflyttning av partikel med massa m från (x_1, y_1, z_1) till (x_2, y_2, z_2) uträttar tyngdkraften arbetet

$$U = \int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int (-mg\mathbb{k}) \cdot (\mathbb{i}dx + \mathbb{j}dy + \mathbb{k}dz) = \int_\gamma (-mg)\,dz$$

$$= -mg(z_2 - z_1)$$

U är oberoende av γ och beror bara på z-koordinaterna för punkterna 1 och 2.

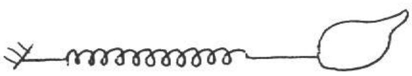
$\therefore$ konservativ kraft.

Potentiell energi $V = mgh$

höjd över någon referensnivå

2) Linjär fjäder $F = kx$

fjäderns förlängning

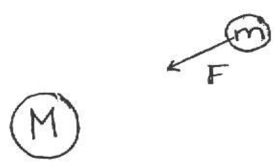


Detta är en konservativ kraft med potentiella energin

$V = \frac{1}{2} k x^2$ (+ konstant)

Obs att V har minimum då $x = 0$

3)

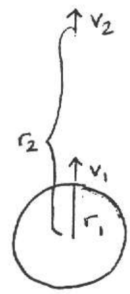


Gravitationskraften på en massa m från en massa M är konservativ med potentiella energin

$V = -G \frac{mM}{r}$ (+ konstant)

Exempel

En projektil med massa m skjuts vertikalt från jordytan med utgångshastighet v_1. Bestäm dess hastighet när den befinner sig på avståndet r_2 från jordens centrum. (Luftmotstånd etc försummas)



Partikeln påverkas endast av gravitationskraften. Denna är konservativ och beskrivs av potentiella energin $V = -G\dfrac{mM}{r}$

"Övriga krafter" är alltså noll och och uträttar arbetet $U' = 0$

Så $0 = U' = T_2 + V_2 - (T_1 + V_1) = E_2 - E_1$ = änring i total mekanisk energi

$E_1 = E_2$

$$\frac{m}{2} v_1^2 - G\frac{mM}{r_1} = \frac{m}{2} v_2^2 - G\frac{mM}{r_2}$$

varav vi kan bestämma v_2

3.9 Impuls och rörelsemängd

Som vanligt $\mathbb{F} = m\,\mathbb{a}$

total yttre kraft — partikelns massa — dess acceleration relativt ett inertialsystem

Förra gången: $\displaystyle\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_\gamma m\,\mathbb{a}\cdot d\mathbb{r}$

$\Rightarrow$ kinetisk energi, arbete, potentiell energi

Idag: $\int_{t_1}^{t_2} \mathbb{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} m\,\mathbb{a}\,dt$

Vi inför begreppet rörelsemängd $\mathbb{G}$ (oftast $\mathbb{P}$) för en partikel med massan m och hastighet $\mathbb{V}$.

$$\mathbb{G} = m\mathbb{V}$$

Newtons andra lag kan nu skrivas

$$\mathbb{F} = \dot{\mathbb{G}}$$

Integration map tiden t från t_1 till t_2 ger

$$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \mathbb{F}\,dt}_{\text{Kraftens impuls under tidsintervallet}} = \mathbb{G}_2 - \mathbb{G}_1$$

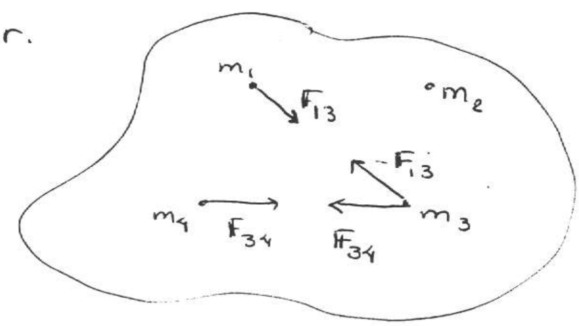
"Den yttre kraftens impuls är lika med ändringen i partikelns rörelsemängd."

Glöm inte att frilägga ordentligt så att man inte glömmer någon yttre kraft...

Viktigt specialfall:

Om en partikel inte påverkas av någon yttre kraft under ett tidsintervall så är rörelsemängden <u>bevarad</u> under intervallet (dvs oförändrad).

Betrakta nu ett mekaniskt system som består av många partiklar.

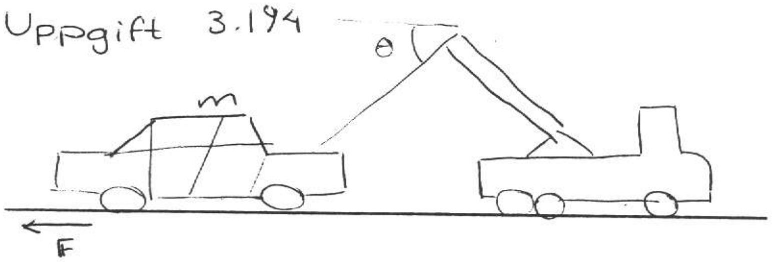


Antag nu att systemet är isolerat dvs att systemets partiklar inte påverkas av några krafter som härör från kroppar utanför systemet. Däremot påverkas partiklarna i systemet varandra med krafter. Dessa uppfyller Newtons tredje lag.

En enskild partikel påverkas av en total yttre kraft och dess rörelsemängd kommer att ändras under ett tidsintervall.

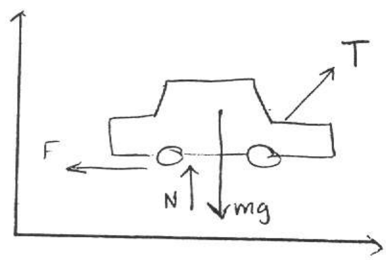
Men eftersom krafterna parvis tar ut varandra kommer ett isolerat systems totala rörelsemängd att vara bevarad.

Uppgift 3.194



Friktionskraften på bilen är F. På tiden t accelererar bilen från farten v_1 till v_2. Bestäm den genomsnittliga spänningen i kabeln

Lösning Frilägg personbilen



Vi betraktar x-komponenten G_x av personbilens (G) rörelsemängd.

Ursprungligen har vi $G_x = (G_x)_1 = mv_1$

Slutligen har vi $G_x = (G_x)_2 = mv_2$

Tillförd impuls under tidsintervallet är (x-komponenten)

$$\int dt\,(T\cos\theta - F) = (T\cos\theta - F)t$$

Detta ska vara lika med ändringen i bilens rörelse-mängd $(G_x)_2 - (G_x)_1$

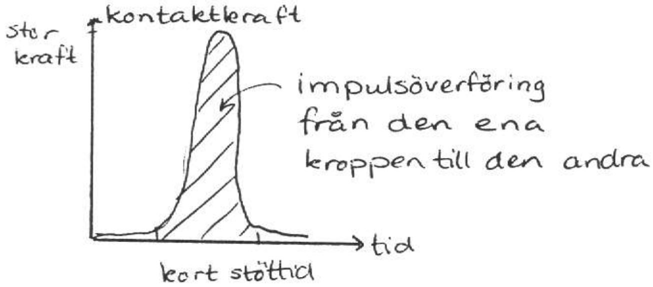
Så $(T\cos\theta - F)t = mv_2 - mv_1$

varur vi får spänningen

$$T = \left(\frac{m(v_2 - v_1)}{t} + F\right)\Big/\cos\theta$$

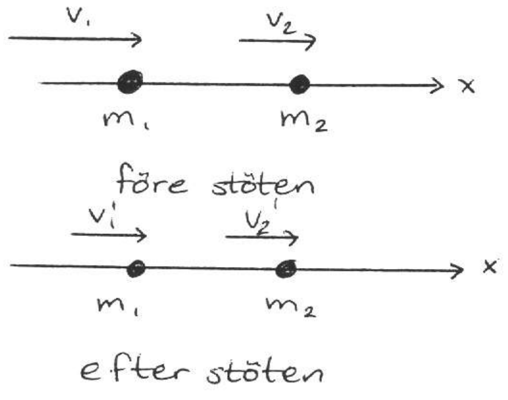
3.12 Stötförlopp

En stöt är en kollision mellan två kroppar. Väldigt stora krafter utvecklas under en kort tid. Kropparna deformeras av dessa kontaktkrafter antingen elastiskt (dvs deformationen går tillbaka) eller inelastiskt (plastiskt)



Kropparna påverkas i allmänhet även av andra (rimligt stora) krafter. Dessa hinner dock bara utveckla en försumbar impuls under själva stöten. De två kropparna kan alltså betraktas som ett isolerat system under stöten vars rörelsemängd bevaras.

Vid en rak central stöt sker all rörelse längs en given linje (x-axeln).



total Rörelsemängd före = total rörelsemängd efter

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

Ibland inför man stötkoefficienten (?) (coefficient of restitu

$$e = \frac{|v_2' - v_1'|}{|v_2 - v_1|}$$ (inget särskillt fundamentalt begrepp)

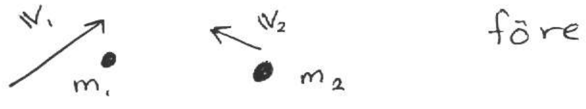
Vid en fullständigt elastisk stöt är $e = 1$
och systemets totala kinetiska energi är oförändrad
Vid en fullständigt inelastisk stöt är $e = 0$
och partiklarna fastnar i varandra. Maximal förlust av rörelseenergi.
I allmänhet är $0 < e < 1$
(I princip kan man ha en superelastisk stöt med $e > 1$.)

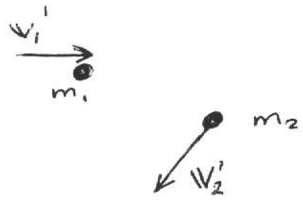
Antag att vi känner m_1 och m_2 och dessutom v_1 och v_2.
Kan man då bestämma v_1' och v_2' (två obekanta)?
Rörelsemängdens bevarande (en ekvation) måste

då kompletteras med ytterligare en ekvation.

T.ex kanske vi känner stötkoefficienten.

Vid en sned central stöt sker all rörelse i ett plan (t.ex. xy-planet)





$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

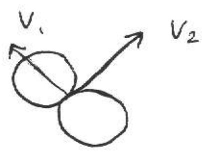
Utskrivet i t.ex Cartesiska komponenter ger detta två ekvationer (i planet).

Med m_1, m_2, v_1 och v_2 kända kan vi bestämma v_1' och v_2' (fyra obekanta). Vi behöver då ytterligare två ekvationer.

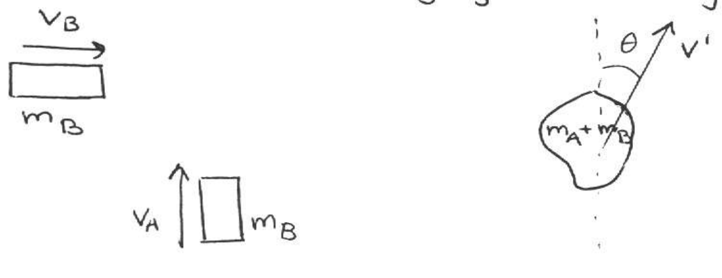
Ibland inför man

$$e = \frac{|(v_2')_n - (v_1')_n|}{|(v_2)_n - (v_1)_n|}$$

Index n står för normalkomponenter av hastigheter (relativt kontaktytan)



Uppgift 3/256 Fullständigt inelastisk kollision i isig gatukorsning



före efter

Kan man givet m_A, m_B, v_A och θ bestämma v_B?

Rörelsemängdens bevarande ger

$$m_B v_B \mathbf{i} + m_A v_A \mathbf{j} = (m_A + m_B) v' (\sin\theta\, \mathbf{i} + \cos\theta\, \mathbf{j})$$

I komponenter får vi

$$\begin{cases} m_B v_B = (m_A + m_B) v' \sin\theta \\ m_A v_A = (m_A + m_B) v' \cos\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{m_B v_B}{m_A v_A} = \tan\theta \Leftrightarrow v_B = v_A \frac{m_A}{m_B} \tan\theta$$

3.10 Impuls och rörelsemängdsmoment

Vi betraktar en partikel med massa m och ortsvektor $\mathbf{r}$ map O.

Partikelns hastighet är $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$

" rörelsemängd är $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$

" rörelsemängdsmoment map O är $\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$

(vanligare $\mathbf{L}_O$)

Låt oss beräkna tidsderivatan av $\mathbf{H}_O$:

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \cancel{\dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v}} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Newtons andra lag & $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$ $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$

part. tot. kraft

Men $\mathbb{r} \times \mathbb{F} = \mathbb{M}_o$

Totala vridmomentet m.a.p O

Vi får alltså att

$$\mathbb{M}_o = \dot{\mathbb{H}}_o$$

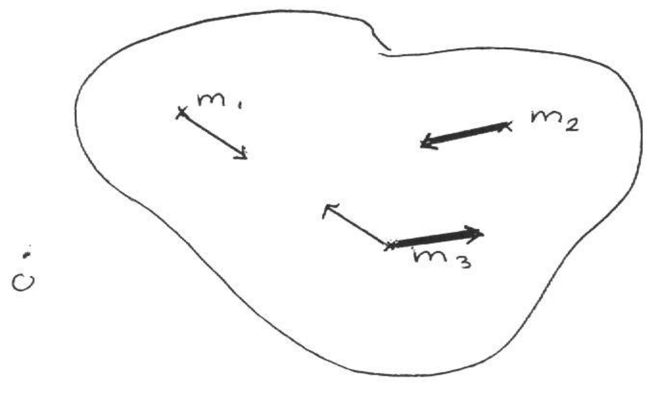
Integration map tiden t från t_1 till t_2

ger

$$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathbb{M}_o}_{\text{Impulsmoment}} = (\mathbb{H}_o)_2 - (\mathbb{H}_o)_2$$

"Det impulsmoment som tillförs en partikel under ett tidsintervall är lika med ändringen i partikelns rörelsemängdsmoment."

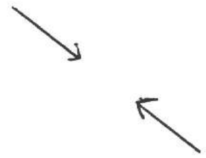
Betrakta ett isolerat system av flera partiklar som påverkar varandra med krafter.



Gäller det då att systemets totala rörelsemängdsmoment är konstant.

Vi minns att den totala rörelsemängden bevarades pga Newtons tredje lag.

Även rörelsemängdsmomentet kommer att bevaras om alla krafter mellan partiklar är riktade från en partikel till en annan!



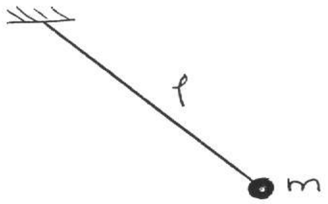
men inte om det finns krafter av typen

Detta verkar dock inte inträffa i naturen.

∴ Rörelsemängdsmomentet för ett isolerat system är alltså bevarat i tiden.

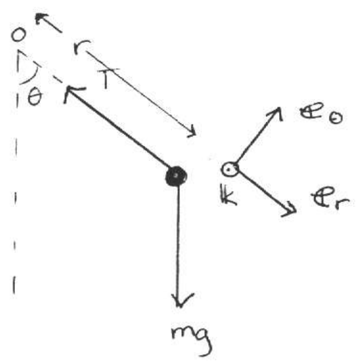
Rörelsemängdsmoment spelar en stor roll i stela kroppars dynamik, men kan även vara användbart då man studerar en enda partikel.

Exempel Plan pendel (matematisk pendel)



Ställ upp rörelseekvationen!

Friläggning:



Cylindriska koord.

Partikelns rörelsemängdsmoment m a p O:

$\mathbb{H}_o = \mathbb{r} \times \mathbb{v}m = \ell \mathbb{e}_r \times m\ell\dot{\theta}\,\mathbb{e}_\theta = m\ell^2\dot{\theta}\,\mathbb{k}$

Vridmomentet m a p O som verkar på

partikeln är

$\mathbb{M}_o = \mathbb{r} \times \mathbb{F} = \ell \mathbb{e}_r \times (-T\mathbb{e}_r + mg\cos\theta\,\mathbb{e}_r - mg\sin\theta\,\mathbb{e}_\theta)$

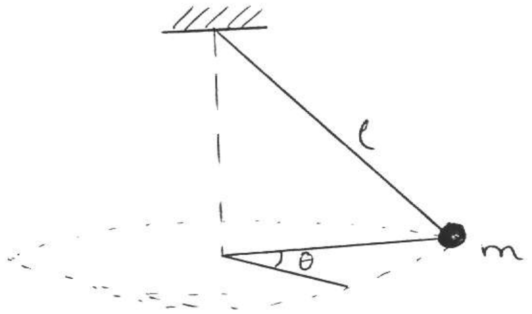
$= -mg\ell\sin\theta\,\mathbb{k}$

Från $\mathbb{M}_o = \dot{\mathbb{H}}_o$ följer att

$-mg\ell\sin\theta = m\ell^2\ddot{\theta}$ dvs

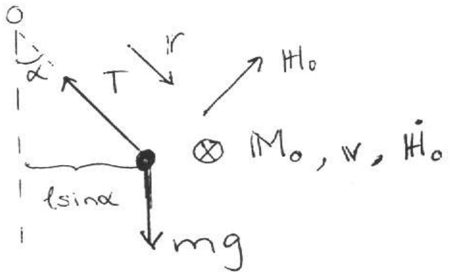
$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$ rörelseekvation

Exempel Konisk pendel



Bestäm omloppstiden

Friläggning (från sidan)



Vi markerar olika vektorers riktning direkt i figuren.

$|\mathbb{M}_o| = |\mathbb{r} \times \mathbb{F}| = |\mathbb{r}||mg|\sin\alpha = mg\ell\sin\alpha$

(vridmoment m a p O)

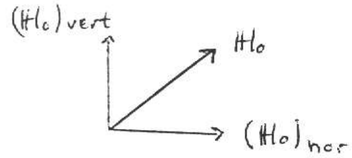
$|\mathbb{V}| = l \sin\alpha \, \dot{\theta}$

$|\mathbb{H}_o| = |\mathbb{r}||m\mathbb{v}| = m l^2 \sin\alpha \, \dot{\theta}$

Vi behöver känna $\dot{\mathbb{H}}_o$.

För att bestämma detta delar vi upp

$\mathbb{H}_o = (\mathbb{H}_o)_{vert} + (\mathbb{H}_o)_{hor}$

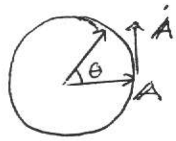


$\frac{d}{dt} (\mathbb{H}_o)_{vert} = 0$

$\frac{d}{dt} \mathbb{H}_o = \frac{d}{dt} (\mathbb{H}_o)_{hor}$

Allmänt gäller att om en vektor $\mathbb{A}$ har konstant längd och roterar med vinkelhastighet $\dot{\theta}$ så är $\dot{\mathbb{A}}$ vinkelrät mot $\mathbb{A}$ och

$|\dot{\mathbb{A}}| = |\mathbb{A}| \, \dot{\theta}$



Vi tillämpar detta resonemang på $(\mathbb{H}_o)_{hor}$:

$|(\mathbb{H}_o)_{hor}| = |\mathbb{H}_o| \cos\alpha = m l^2 \sin\alpha \, \dot{\theta} \cos\alpha$

Alltså är $|(\dot{\mathbb{H}})_{hor}| = m l^2 \sin\alpha \cos\alpha \, \dot{\theta}^2$

$\dot{\mathbb{H}}_o = (\dot{\mathbb{H}}_o)_{hor}$ har riktning enligt figuren

$\mathbb{M}_o$ och $\dot{\mathbb{H}}_o$ har alltså samma riktning, som de måste ha enligt

$\mathbb{M}_o = \dot{\mathbb{H}}_o$

Vidare ger denna ekvation att

$mgl \sin\alpha = m l^2 \sin\alpha \cos\alpha \, \dot{\theta}^2$

$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{l \cos\alpha}}$ $\qquad T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos\alpha}{g}}$

Två avsnitt av överkurskaraktär:

3.14 Relativ rörelse

Vi har hittills betraktat rörelse relativt ett inertialsystem.

Obs att ett annat koord. system som rör sig likformigt rel ett annat inert. system också är ett inert. system.

Alla inertialsystem är likvärdiga dvs t.ex Newtons andra lag gäller relativt alla inertialsystem.

Ibland är det praktiskt att räkna relativt ett icke inertialsystem. Gör inte detta! (Man måste införa fiktiva tröghetskrafter i Newtons andra lag)

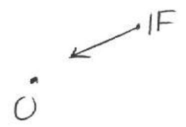
I ett inertialsystem beror alla krafter på en kropp A på att den växelverkar med en annan kropp B.

3.13 Centralkraftrörelse

En centralkraft på en partikel är en kraft av formen

$$\mathbb{F} = F(r)\, \mathbb{e}_r$$

$\uparrow$ avståndet från partikeln till O.



En sådan kraft utövar inte något vrid moment map O.

$\Rightarrow$ Partikelns rörelsemängdsmoment map O = konstant.

För att säga mer behöver vi känna $F(r)$.

Mest kända exempel

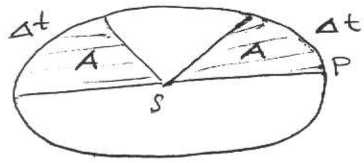
$$F(r) \sim \frac{1}{r^2}$$ (gravitationskraften, elektrostatisk kraft...

Johannes Kepler (1571 – 1630) analyserade Tycho Brahes astronomiska observationsdata och uppställde följande tre lagar:

1. Planeterna rör sig på elliptiska banor med solen i brännpunkten.
2. Vektorn från solen till en planet översveper lika stor yta per tidsenhet under hela rörelsen
3. $T^2 = k a^3$

omloppstiden

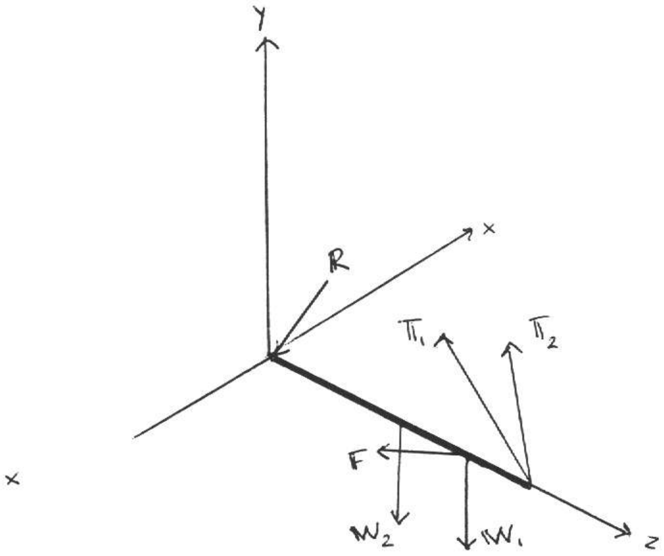
storaxelns längd



Dessa lagar följer från Newtons mekanik, men matematiken blir lite komplicerad.

Statikuppgift 3.74

Vi frilägger bommen



Här är

$$\begin{cases} \mathbb{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k} & \text{reaktionskraften i A} \\ \mathbb{T}_1 = T_1 \frac{1}{11}(-2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 9\mathbf{k}) & \text{spännokraften i CE} \\ \mathbb{T}_2 = T_2 \frac{1}{11}(6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 9\mathbf{k}) & \text{" i CD} \\ \mathbb{F} = Mg \frac{1}{\sqrt{34}}(-3\mathbf{i} - 5\mathbf{k}) & \text{" i BF} \\ \mathbb{W}_1 = Mg(-\mathbf{j}) & \text{lastens tyngd} \\ \mathbb{W}_2 = mg(-\mathbf{j}) & \text{bommens tyngd} \end{cases}$$

med $M = 2000$ kg, $m = 600$ kg, $g = 9{,}81$ m/s^2

Dessa krafter utövar följande vridmoment m a p punkten A.

$$\begin{cases} \overline{AA} \times \mathbb{R} = 0 \\ \overline{AC} \times \mathbb{T}_1 = T_1 \frac{9}{11}(-2\mathbb{j} - 6\mathbb{i}) \\ \overline{AC} \times \mathbb{T}_2 = T_2 \frac{9}{11}(6\mathbb{j} - 2\mathbb{i}) \\ \overline{AB} \times \mathbb{F} = Mg \frac{5}{\sqrt{34}}(-3\mathbb{j}) \\ \overline{AB} \times \mathbb{W}_1 = Mg\, 5\mathbb{i} \\ \frac{\overline{AC}}{2} \times \mathbb{W}_2 = mg \frac{9}{2}\mathbb{i} \end{cases}$$

Momentjämvikt för bommen ger nu:

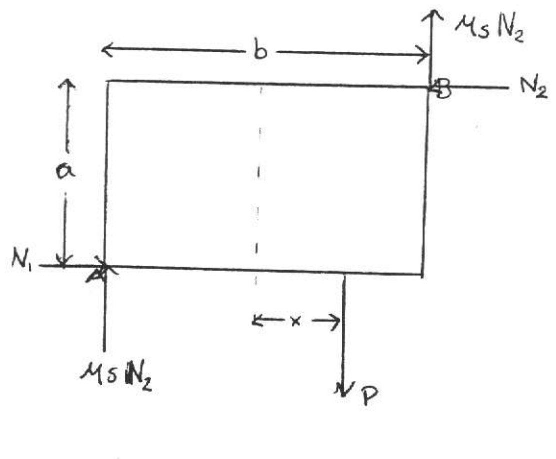
$$\begin{cases} -\frac{54}{11}T_1 - \frac{18}{11}T_2 + 5Mg + \frac{9}{2}mg = 0 & x\text{-led} \\ -\frac{18}{11}T_1 + \frac{54}{11}T_2 - \frac{15}{\sqrt{34}}Mg = 0 & y\text{-led} \end{cases}$$

varur fås

$$T_1 = \frac{11}{60}\left(\left(5 - \frac{5}{\sqrt{34}}\right)Mg + \frac{9}{2}mg\right) \approx 19{,}8 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Statikuppgift 6.22

Vi frilägger lådan (som bara vidrör facket i punkterna A och B) i gränsfallet där glidning just inträder.



Kraftjämvikt och momentjämvikt kring A ger nu

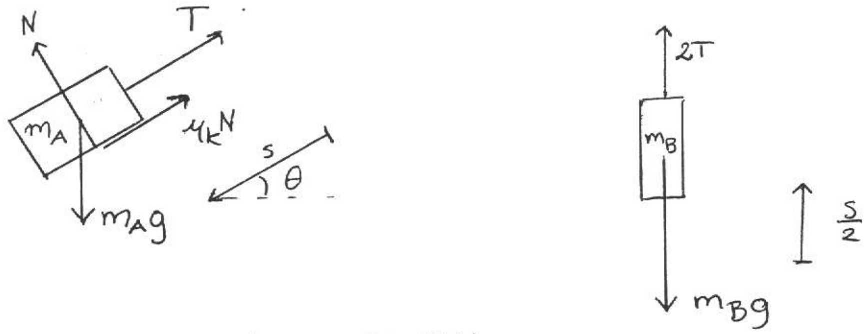
$$\begin{cases} N_1 - N_2 = 0 & \rightarrow \\ \mu N_1 + \mu N_2 - P = 0 & \uparrow \\ a N_2 + b + \mu N_2 - \left(\frac{b}{2} + x\right) P = 0 & \circlearrowleft \end{cases}$$

varur fås att $N_1 = N_2 = \dfrac{P}{2\mu_s}$

och att $x = \dfrac{a}{2\mu_s}$

Dynamikuppgift 3.26

Vi frilägger de båda kropparna under antagandet att A glider neråt:



Newtons andra lag ger nu ekvationssystemet

$$\begin{array}{ll} A \swarrow & \begin{cases} m_A g \sin\theta - T - \mu_k N = m_A \ddot{s} \\ N - m_A g \cos\theta = 0 \\ 2T - m_B g = m_B \frac{1}{2} \ddot{s} \end{cases} \\ \nwarrow & \\ B \uparrow & \end{array}$$

varur vi får att

$$T = \frac{m_A m_B g}{4m_A + m_B}\left(\sin\theta \overset{?}{\mp} \mu_k \cos\theta + 2\right)$$

$$\ddot{s} = g\,\frac{4m_A(\sin\theta \overset{?}{\mp} \mu_k \cos\theta) - 2m_B}{4m_A + m_B}$$

Med $m_A = 60\text{ kg}$, $m_B = 20\text{ kg}$, $g = 9{,}81\text{ m/s}^2$

$\mu_k = 0{,}2$, $\theta = 30°$ så får vi

$$\begin{cases} T = 120\text{ N} \\ \ddot{s} = 4{,}6\text{ m/s}^2 \end{cases}$$

$\ddot{s}$ är positivt, så vårt antagande om rörelseriktningen var korrekt.

<u>Svar</u>: Spänningen i kabeln är 120 N

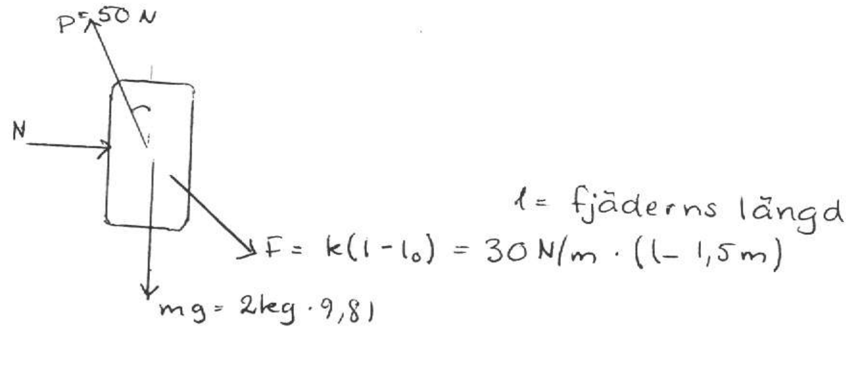
kropp A glider neråt längs planet

med accelerationen $4{,}6\text{ m/s}^2$

och kropp B stiger med acc $2{,}3\text{ m/s}^2$.

<u>Dynamikuppg 3.158</u>

Vi frilägger hylsan i en godtycklig punkt under rörelsen:



Normalkraften N uträttar inget arbete.

Av P uträttat arbete på hylsan

=

Ändringen i hylsans totala mekaniska energi

(kinetisk energi + fjäderns potentiella energi

+ tyngdkraftens potentiella energi)

Start i vila i A. Då hylsan har stigit höjden $h = 1{,}5\,m$

till B ges dess hastighet v alltså av ekvationen

$$Ph\cos\theta = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(l_B - l_0)^2 - \frac{1}{2}k(l_A - l_0)^2 + mgh$$

Med $l_A = 2{,}0\,m$ (fjäderns längd i A) och

$l_B = \sqrt{2^2 + 1{,}5^2}\,m = 2{,}5\,m$ (fjäderns längd i B)

får vi

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(Ph\cos\theta - mgh - \frac{1}{2}k(l_B - l_0)^2 + \frac{1}{2}k(l_A - l_0)^2\right.}$$

$\approx 5{,}0\,m/s$

Yttre krafter = konservativa krafter + övriga krafter

Av yttre krafter uträttat arbete = ändring i kinetisk energi

Av konservativa krafter uträttat arbete +

av övriga – " – = ändring i kinetisk energi.

Av övriga krafter uträttat arbete = ändring i

kinetisk energi – av konservativa krafter uträttat arbete.

" = " + ändring i de konservativa krafternas

potentiella energi.