Storgruppsövning 12/12-13

TENTA 2012-08-22

1. Lös

$$y''' + \sqrt{3}\,y'' + 2y' + 2\sqrt{3}\,y = e^{-\sqrt{3}x} \qquad (*)$$

Bonusinfo: $\sqrt{2}\,i$ är en rot till motsvarande karakteristiska ekvation

Lösning:
3:e ordningens diff.ekv. med konstanta koefficienter

Steg 1: Bestämma den allmänna homogenlösningen $y_h(x)$

Karakteristiska ekv.

$$0 = r^3 + \sqrt{3}\,r^2 + 2r + 2\sqrt{3} =$$
$$= (r^2+2)(r+\sqrt{3})$$

Vi har

$$\begin{cases} r_{1,2} = \pm\sqrt{2}\,i \\ r_3 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Alltså

$$y_h(x) = A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x) + Ce^{-\sqrt{3}x}$$

$\longrightarrow$

Steg 2 Bestäm en partikulärlösning $y_p(x)$

Ansätt $y_p(x) = e^{-\sqrt{3}x} z(x)$

Förskjutningsregeln ger:

$$(D^2+2)(D+\sqrt{3})\left[e^{-\sqrt{3}x} z(x)\right] = e^{-\sqrt{3}x}$$

$$e^{-\sqrt{3}x}\left((D-\sqrt{3})^2+2\right)\left((D-\sqrt{3})+\sqrt{3}\right)\left[z(x)\right] = e^{-\sqrt{3}x}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{(D^2-2\sqrt{3}+5)D}_{D^3-2\sqrt{3}D+5D}\left[z(x)\right] = 1$$

Ansätt $z(x) = ax$

$$\Longrightarrow 5a = 1 \iff a = \frac{1}{5}$$

$$\Longrightarrow y_p(x) = \frac{x}{5} e^{-\sqrt{3}x}$$

Steg 3 Den allmänna lösningen till (*) ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x) + $$
$$+ \left(C + \frac{x}{5}\right)e^{-\sqrt{3}x}$$

Svar: $y(x) = A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x) + \left(C + \frac{x}{5}\right)e^{-\sqrt{3}x}$

② Lös för $x>0$

$$xy'' - 2y' + \frac{y}{x} = 1$$

Lösning: Linjär av 2:a ordningen
med ej konstanta koefficienter

$$x^2y'' - 2xy' + y = x \qquad \text{Eulers diff. ekv.}$$

Gör ett variabelbyte $t = \ln x$, $x>0$

Sätt $y(x) = \tilde{y}(t(x))$

Vi får

$$y'(x) = \tilde{y}'(t(x)) \cdot t'(x) = \tilde{y}'(t(x)) \cdot \frac{1}{x}$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(\tilde{y}' \cdot \frac{1}{x}\right) = \tilde{y}''\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \tilde{y}'\frac{1}{x^2}$$

Insättning i diff. ekv.

$$x^2\left(\tilde{y}''\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \tilde{y}'\frac{1}{x^2}\right) - 2x\left(\tilde{y} \cdot \frac{1}{x}\right) + \tilde{y} = e^t$$

$$\tilde{y}''(t) - \tilde{y}'(t) - 2\tilde{y}'(t) + \tilde{y}(t) = e^t \iff$$

$$\tilde{y}''(t) - 3\tilde{y}'(t) + \tilde{y}(t) = e^t \qquad (*)$$

Bestäm $\tilde{y}_h(t)$

$\longrightarrow$

Karakteristiska ekv. $0 = r^2 - 3r + 1 =$

$$= \left(r - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \left(r - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(r - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \tilde{y}_h(t) = Ae^{\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)t} + Be^{\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)t}$$

Bestäm $\tilde{y}_p(t)$: Ansätt $y_p(t) = ae^t$

Insättning i diff.ekv. ger $a = -1$

$$\Longrightarrow \tilde{y}_p(t) = -e^t$$

Den allmänna lösningen till (*) ges av

$$\tilde{y}(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ae^{\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)t} + Be^{\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)t} - e^t$$

$x = e^t$

$$\Longrightarrow y(x) = Ax^{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} + Bx^{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} - x$$

③ a) Taylorutveckla

$$\ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right) \text{ kring } 0$$

med restterm på formen $O(x^7)$

Lösning:

Standardutveckling

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4), \quad t \to 0$$

Sätt $t = \frac{x^2}{2}$

$$\Longrightarrow \ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^3}{3} + O(x^8) =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{24} + O(x^8) =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{24} + O(x^7)$$

b) Beräkna

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$$

Lösning:

$$x^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{x-1}\ln x} = \left\{\begin{array}{l} x = 1+t \\ x\to 1 \Leftrightarrow t\to 0 \end{array}\right\} =$$

$$= e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)} = \left\{ \ln(1+t) = t + O(t^2) \right\} =$$

$$= e^{\frac{1}{t}(t+O(t^2))} = e^{1+O(t)} \longrightarrow e, \quad t\to 0$$

Svar: e

④ a) För vilka x är serien $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(x+1)^{2k}}{k\ln k}$ $(**)$

absolutkonvergent, betingat konvergent resp. divergent?

Lösning: Sätt $t = (x+1)^2$

$\Longrightarrow$ potenssumman $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k} t^k$ $(*)$

Bestäm konvergensradien R

(Rotformeln)

$$\sqrt[k]{\frac{1}{k\ln k}} = \left(\frac{1}{k\ln k}\right)^{\frac{1}{k}} = e^{\frac{1}{k}\ln\left(\frac{1}{k\ln k}\right)} =$$

$$= e^{-\frac{k\ln k}{k}} \longrightarrow e^0 = 1, \quad k \to \infty$$

$$\Longrightarrow R = \frac{1}{1} = 1$$

Konvergensen i $t = \pm 1$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}(1)^k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k} \quad \text{divergent}$$

Vi behöver inte studera $t = -1$ då $t = (x+1)^2 \geq 0$

För $t \geq 0$ gäller att $(*)$ absolutkonvergent för $t \in [0, 1)$ och divergent för $t \in [1, \infty)$

$\longrightarrow$

Alltså är $(**)$ absolutkonvergent för

$(x+1)^2 \in [0,1)$ och divergent för $(x+1)^2 \in [1,\infty)$

dvs $(**)$ är absolutkonvergent för $x \in (-2,0)$

och divergent för $x \in (-\infty,-2] \cup [0,\infty)$

b) Beräkna $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

Lösning

Sätt $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^n$

Potensserien är en geometrisk serie och konvergerar för $|x|<1$

Vidare $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$

För $|x|<1$ kan vi derivera termvis

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$(x f'(x))' = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n^2 x^n = x(x f'(x))'$$

och

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n = x(x f'(x))' \Big|_{x=\frac{1}{3}} \longrightarrow$$

Vi har

$$f'(x) = \frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$$

$$x \cdot f'(x) = \frac{2x^2-x^3}{(1-x)^2}$$

$$(x \cdot f'(x))' = \frac{(4x-3x^2)(1-x)^2+2(2x^2-x^3)(1-x)}{(1-x)^4}$$

Alltså

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} = x \cdot \left.\frac{(4x-3x^2)(1-x)^2+2(2x^2-x^3)(1-x)}{(1-x)^4}\right|_{x=\frac{1}{3}} =$$

$$= \ldots = \frac{3}{2}$$

Svar: $\frac{3}{2}$

(5) Avgör om $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, där $a_1 > 0$ och

$a_{n+1} = \arctan a_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ konvergerar

och om följden konvergerar beräkna

gränsvärdet

Lösning

Följden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är positiv då $\arctan x > 0$
för $x > 0$

och dessutom är $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ begränsad då

$\arctan x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ för $x \in [0, \infty)$

Fråga: Är $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en monoton följd

Bilda $f(x) = x - \arctan x$, $x \geq 0$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} > 0$ för $x > 0$

$f(0) = 0$

Alltså $f(x)$ är strängt växande för $x \in [0, \infty)$
och $f(x) \geq 0$ för $x \in [0, \infty)$

Vi har
positiva tal
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en avtagande följd av

Eftersom $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en monoton, begränsad talföljd så konvergerar den.

Alltså

$$a \underset{n\to\infty}{\longleftarrow} a_{n+1} = \arctan a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \arctan a$$

dvs $a = \arctan a$ $\quad (f(a)=0, a \geq 0$

Detta ger $a=0$

Svar: Konvergent talföljd med gränsvärdet 0

⑥ Visa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(1+\frac{x}{n}\right) \qquad (*)$$

konvergerar likformigt på varje kompakt delmängd av $\mathbb{R}$

Lösning

Räcker att visa att $(*)$ konvergerar likformigt på $[-R, R]$ för varje $R>0$

Notera

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(1) \quad \text{konvergerar}$$

enligt Leibniz konv. krit,

Notera att

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\underbrace{\sin(1+\frac{x}{n}) - \sin(1)}_{\cos(1)\cdot \frac{x}{n} + O((\frac{x}{n})^2)} \right)$$

Weierstrass majorantsats

$$\left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sin(1+\frac{x}{n}) - \sin(1) \right) \right| \leq$$

$\leq \frac{M}{n\sqrt{n}}$ $\quad n = 1, 2, \ldots$ för något $M > 0$ tillräckligt stort

$\forall x \in [-R, R]$

och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ konvergent

alltså

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sin(1+\frac{x}{n}) - \sin(1) \right) \qquad (*)$$

är likformigt konvergent på $[-R, R]$

Addera den konvergenta serien

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(1)$ till $(*)$. Vi får en

likformigt konvergent serie