- $||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$

eftersom $|\mathbf{x}| = |(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y}|$

alltså $|\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$

Byt $\mathbf{x}$ mot $\mathbf{y}$ och $\mathbf{y}$ mot $\mathbf{x}$

Vi får

$$\pm(|\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|) \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

dvs $||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $\quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Det gäller

$$\underbrace{\boxed{\max_{k \in \{1,2,\ldots,n\}} |x_k| \leq |\mathbf{x}|}}_{(*)} \overbrace{\boxed{\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|}}^{(**)}$$

eftersom

$$|x_k| = \sqrt{x_k^2} \leq \sqrt{\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell^2} = |\mathbf{x}| \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

$\therefore$ $(*)$ visad

$$|\mathbf{x}| = |x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots +$$

$$+ x_n(0, \ldots, 0, 1)| \leq |x_1||(1, 0, \ldots, 0)| + \ldots +$$

$$+ |x_n||(0, \ldots, 0, 1)| = |x_1| + \ldots + |x_n|$$

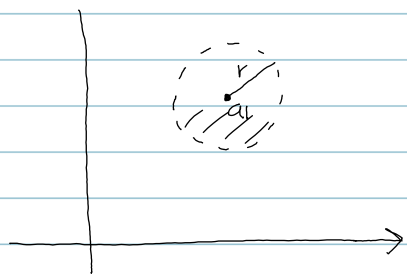
(* *) visad

$\mathbb{R}^n = \{ \mathbf{x} \in (x_1, \dots, x_n) : x_k \in \mathbb{R} \text{ alla } k \}$

Fixera $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

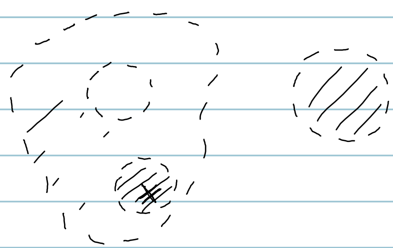
Sätt för $r > 0$

$$B(\mathbf{a}, r) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r \}$$



Kallas öppen boll kring $\mathbf{a}$ med radien r

O delmängd av $\mathbb{R}^n$ kallas öppen om



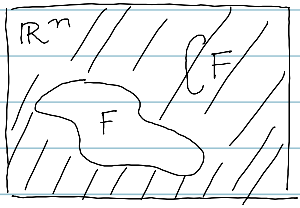
$\forall \mathbf{x} \in O$ finns

$r = r(x) > 0$ sådant att

$B(\mathbf{x}, r) \subset O$

F delmängd av $\mathbb{R}^n$ kallas sluten om

$\complement F$ är en öppen mängd $\quad \complement F = \{ x \in \mathbb{R}^n : x \notin F \}$



B delmängd av $\mathbb{R}^n$ kallas begränsad om

$\exists M > 0$ s.a. $|x| < M \quad \forall x \in B$

dvs $\exists M > 0$ s.a $B \subset B(\mathbb{0}, M)$

K delmängd av $\mathbb{R}^n$ kallas kompakt om K är både sluten och begränsad

Antag att $D \subset \mathbb{R}^n$

Betrakta för positiva heltal n och p

$$\mathbb{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

Vi har

$$\mathbb{f}(\mathbb{x}) = \mathbb{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$$

där $f_k : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, p$

Oftast har vi

$$n = 2, \quad p = 1$$

dvs. $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ där $(x, y) \in D$

Ex. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$$

Gränsvärdesdefinitionen:

$n = 1$ $\qquad \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ $\qquad , a, A \in \mathbb{R}$

$p = 1$

betyder att $\left(B(a,\eta) \cap D_f \neq \emptyset \quad \forall \eta > 0\right)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta$ och

$x \in D_f \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

---

n, p positiva hela tal

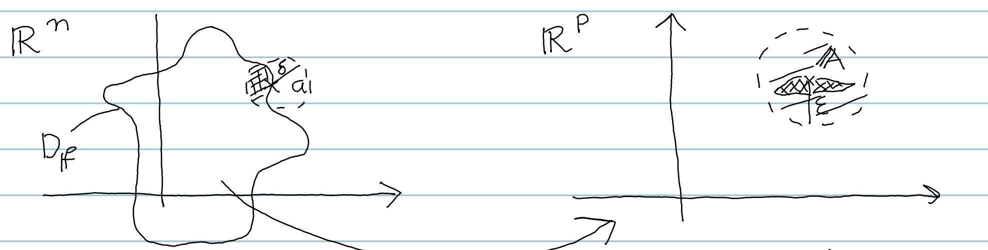
$D_{\mathbf{f}} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^p$

$\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$

innebär definitionsmässigt att $\left(B(\mathbf{a},\eta) \cap D_{\mathbf{f}} \neq \emptyset \quad \forall \eta > 0\right)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ och $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{f}}$

$\Longrightarrow |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}| < \varepsilon$



$\mathbf{f}(B(\mathbf{a},\delta) \cap D_{\mathbf{f}}) \subset B(\mathbf{A},\varepsilon)$