Föreläsning 9/12-13

Veckans program:
- Funktionsföljder / funktionsserier
- Rummet $\mathbb{R}^n$
- öppna / slutna / kompakta / begränsade mängder i $\mathbb{R}^n$
- Gränsvärde för vektorvärda funktioner av flera variabler
- Kontinuitet + 3 satser

---

repetition + lösning av gammal tenta

FUNKTIONSFÖLJD: $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$, ~~$x \in I$~~ $x \in I \subset \mathbb{R}$

FUNKTIONSSERIE: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, $x \in I \subset \mathbb{R}$

Kopplingen mellan $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ och $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$

Givet $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ Sätt $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, $n = 1, 2, \ldots$

Givet $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ Sätt $f_1(x) = s_1(x)$,

$f_k(x) = s_k(x)$, $k = 2, 3, \ldots$

Bilda $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$

Denna har partialsummorna lika med funktionerna i funktionsföljden $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$

FUNKTIONSFÖLJDER

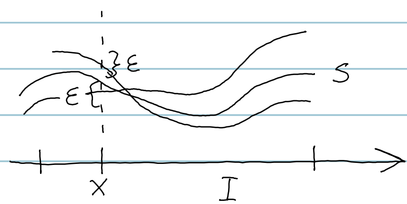
Två konvergensbegrepp:

① $s_n \to s$ punktvis på I om

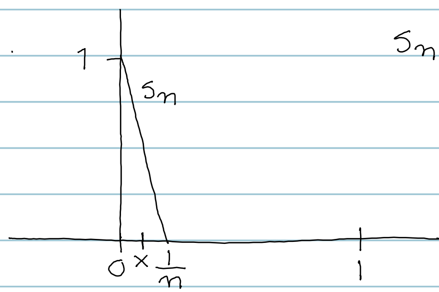
$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in I \ \exists N = N(x, \varepsilon) : n \geq N$
$\Longrightarrow |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$

② $s_n \to s$ likformigt på I om

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ \forall x \in I : n \geq N$
$\Longrightarrow |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$ *



Ex.



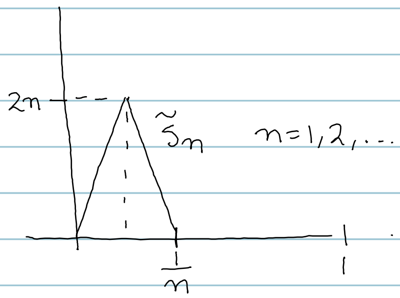
$s_n \to s$ punktvis på $[0,1]$

$$s(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

($s_n \not\to s$ likf. på $[0,1]$)

* Alt. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : n \geq N \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \sup_{x \in I} |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$

Ex.



$\tilde{s}_n \to \tilde{s}$ pktvis på $[0,1]$

där $\tilde{s}(x) = 0, \quad x \in [0,1]$

$(\tilde{s}_n \not\to \tilde{s}$ likf. på $[0,1]$

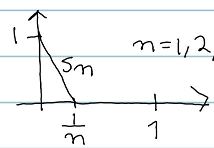
Ex

SATS 1: $\quad s_n \to s$ likformigt på I

s_n kontinuerlig på I för $n = 1, 2, \dots$

$\Longrightarrow \quad s$ kontinuerlig på I

Jämför:



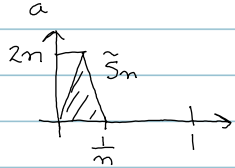
$n = 1, 2, \dots$ ovan

SATS 2: $\quad s_n \to s$ likformigt på $I = [a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$

s_n kontinuerlig på I $\forall n$

$$\Longrightarrow \int_a^b s_n(x)\,dx \longrightarrow \int_a^b s(x)\,dx, \quad n \to \infty$$

Jämför



$$\int_0^1 \tilde{s}_n(x)\,dx = 1 \not\to \int_0^1 \tilde{s}(x)\,dx, \quad n \to \infty$$

Ex. $s_n(x) = \frac{n}{n^2+x^2}$ $\quad x \in I = \mathbb{R}$

$n = 1, 2, \ldots$

$s_n \to s$ punktvis på $\mathbb{R}$

där $s(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

$s_n \to s$ likformigt på $\mathbb{R}$

eftersom $\sup_{x \in \mathbb{R}} |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$

$$\left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |s_n(x) - s(x)| = \frac{1}{n} \to 0,\ n \to \infty \right)$$

$$\int_{\mathbb{R}} s(x)\,dx = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} s_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{n^2+x^2}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}\,d\left(\frac{x}{n}\right) = \pi$$

$$\left(= \left\{ t = \frac{x}{n} \right\} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan t \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

Alltså $\int_{\mathbb{R}} s_n(x)\,dx \not\to \int_{\mathbb{R}} s(x)\,dx$, $n \to \infty$

SATS 2' Antag att $I=[0,\infty)$ och
s_n kontinuerlig på I $\forall n$ och
$s_n \to s$ likformigt på $[0,a]$ $\forall\, a>0$ och
finns en majorerande funktion $g(x)$, $x\in I$
dvs

1) $|s_n(x)| \le g(x)$ $\forall n$, $\forall x \in I$

2) $\int_I g(x)\,dx < \infty$

Då gäller

$$\int_I s_n(x)\,dx \longrightarrow \int_I s(x)\,dx \,, \quad n\to\infty$$

SATS 2'' Antag att

1) $s_n \longrightarrow s$ punktvis på I (begränsat eller obegränsat intervall)

2) $\int_I s_n\,dx$ existerar $\forall n$

3) $\int_I s(x)\,dx$ existerar

OCH $\exists$ en majorerande funktion

Då gäller

$$\int_I s_n(x)\,dx \longrightarrow \int_I s(x)\,dx \ , \ n\to\infty$$

SATS 3 Antag att

$s_n \to s$ punktvis på I

s_n kontinuerliga, deriverbara på I $\forall n$

$s_n' \longrightarrow g$ likformigt på I

$\Longrightarrow$ s kontinuerlig, deriverbar på I

$s'(x) = g(x) \ , x\in I$

ty: fixera $a \in I$

$$s(x) - s(a) \longleftarrow s_n(x) - s_n(a) = \int_a^x s_n'(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^x g(t)\,dt$$

(Sats 1)

dvs. $s(x) - s(a) = \int_a^x g(t)\,dt$

$$s(x) = \underbrace{s(a) + \int_a^x g(t)\,dt}_{\text{kont, deriv.}}$$

$s'(x) = g(x)$

Ex: $s_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$

$x \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$

$s_n'(x) = \cos nx$

$s_n'(0) = 1 \quad \forall n$

$s_n \to s$ likformigt på $\mathbb{R}$

där $s(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

FUNKTIONSSERIER

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, $x \subset I \subset \mathbb{R}$

Weierstrass majorantsats

Antag $|f_k(x)| \leq a_k \quad \forall x \in I$ och $\forall k$

och $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar

Då gäller: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergerar likformigt på I.

Ex. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$, $x \in I = [0, \infty)$

Konvergerar funktionsserien likformigt på I ?

Sätt $f_k(x) = \frac{1}{(k+x)^2}$, $x \in I$, $k = 1, 2, \ldots$

$|f_k(x)| \leq \frac{1}{k^2}$ $\forall x \in I$, $k = 1, 2, \ldots$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergerar

Weierstrass majorantsats ger att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$ konvergerar likformigt

Ex. Antag att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ har konvergensradien $R > 0$

$\Longrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar likformigt på

$I = [-r, r]$ $\forall r \in (0, R)$

ty: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ är absolutkonvergent $\forall r \in (0, R)$

Fixera $r \in (0, R)$

Vi har $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k$ konvergent

Sätt $f_k(x) = a_k x^k$ $k = 0, 1, 2, \ldots$

För $x \in [-r, r]$ gäller $\longrightarrow$

$$|f_k(x)| \leq |a_k| r^k \qquad k=0,1,2,\dots$$

Weierstrass majorantsats medför att

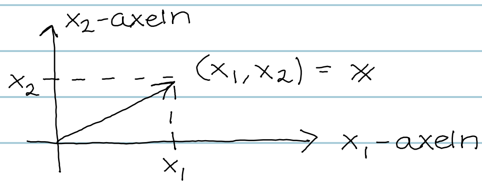
$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar likformigt på $[-r,r]$

Rummet $\mathbb{R}^n$

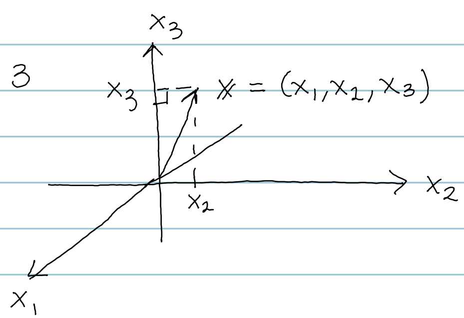
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$

$n = 1$

$n = 2$



$n = 3$



$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$
$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ vektoraddition

$\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$ multiplikation med skalär

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) =$

$= x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n$ skalärprodukt

längden av vektorn $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

avståndet mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)}$$

Räkneregler för absolutbelopp:

1) $|x| \geq 0$ och $= 0$ omm $x = 0 = (0, 0, \dots, 0)$

2) $|\lambda x| = |\lambda| \, |x|$ alla $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$

3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ alla $x, y \in \mathbb{R}^n$

ty

Lemma: (Cauchy-Schwarz)

$x, y \in \mathbb{R}^n$

Det gäller $|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$

eftersom

- kan utan inskränkning anta att både x och $y \neq 0$

$0 \leq$

- $(x + ty) \cdot (x + ty) =$

$$x \cdot x + t x y + t y x + y \cdot y =$$

$$= |x|^2 + 2t x y + t^2 |y|^2 \quad (*)$$

Minimera HL m.a.p. t

Sätt $t = -\cancel{2}\,\frac{x \cdot y}{|y|^2}$

Insättning i $(*)$

$$0 \leq |x|^2 - 2\frac{(x \cdot y)^2}{|y|^2} + \frac{(x \cdot y)^2}{|y|^2}$$

$$(x \cdot y)^2 \leq |x|^2 \cdot |y|^2$$

Alltså

$$|x \cdot y|^2 \leq |x| \cdot |y|$$

$$|x+y|^2 = \left(\sqrt{(x+y)\cdot(x+y)}\right)^2 =$$

$$= x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y = |x|^2 + 2xy + |y|^2$$

$$\leq |x|^2 + \underbrace{2|x \cdot y|^2}_{\leq 2|x||y|} + |y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$$

Alltså

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

$\square$

Det gäller också

- $|x - y| = |x + (-1)y| \leq$

  $\leq |x| + |-1\,y| = |x| + |y$

- $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$ $\longrightarrow$