Föreläsning 3/12-13

POTENSSERIER

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

$M = \{ x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ konvergerar} \}$

M är en av följande typer av mängder

1. $\exists$ $R \in (0, \infty)$ s.a. $M = (-R, R)$ eller

   $M = [-R, R)$ eller $M = (-R, R]$ eller $M = [-R, R]$

2. $M = \mathbb{R}$ (svarar mot $R = \infty$)

3. $M = \{0\}$ (svarar mot $R = 0$)

M kallas konvergensområdet
R kallas konvergensradien

Hur beräknar man M?

1. Beräkna R

(*) Om $\sqrt[k]{|a_k|} \longrightarrow H$, $k \to \infty$ så gäller $R = \frac{1}{H}$

(**) Om $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \longrightarrow K$, $k \to \infty$ så gäller $R = \frac{1}{K}$

(2) Om $R \in (0,\infty)$ så studera $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ för $x = \pm R$

Vad gör man om (*) / (**) inte tillämpbara?

Ex: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{5^k \cdot k}$

Här är

$$a_{2k-1} = 0, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{5^k \cdot k} \quad k = 1,2,3,\ldots$$

Sätt $t = x^2$

Vi får potensserie i t: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{5^k \cdot k} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k t^k$

Studera denna potensserie

$$\sqrt[k]{|\tilde{a}_k|} = \left(\frac{1}{5^k \cdot k}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{k^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\ln k}{k}}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{5}$$

Slutsatsen: Potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k t^k$ är

absolutkonvergent för $|t| < \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$

divergent för $|t| > 5$

$\longrightarrow$

För $t=5$ gäller: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{5^k \cdot k} 5^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

konvergent enl. Leibniz konvergenskriterium

För potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{5^k \cdot k}$ gäller att

den är absolutkonvergent för $|x^2| < 5$ och

divergent för $|x^2| > 5$. Alltså: den

ursprungliga potensserien har konvergensradie

$R = \sqrt{5}$

Eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{5^k \cdot k}$ konvergerar för $t=5$

gäller att konvergensområdet för den

ursprungliga potensserien är

$[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$

Limes superior

Antag att $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ är en begränsad talföljd

Sätt $s_n = \sup\{t_k : k \geq n\}$, $n = 1, 2, \ldots$

Det gäller $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_n \geq s_{n+1} \geq \ldots$
dvs. $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en avtagande, begränsad talföljd.

Enligt sats (tidigare i kursen) så konvergerar $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ dvs $s_n \to s$, $n \to \infty$

annan beteckning

Definiera $s = \limsup_{k\to\infty} t_k$ $\left(\overline{\lim_{k\to\infty}}\, t_k\right)$

Ex: $\{\underbrace{(-1)^k}_{t_k}\}_{k=1}^{\infty}$ har $\limsup_{k\to\infty} t_k = 1$

Definition innebär att $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ har $\limsup_{k\to\infty} t_k = s$ om

1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : t_k < s + \varepsilon \quad \forall k \geq N$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n \geq N : t_n > s - \varepsilon$

Åter till rotkriteriet för positiva serier

Rotkriteriet   Positiv serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \geq 0 \quad \forall k$

Antag att $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = A \in \mathbb{R}$

Då gäller: $A<1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar

$A>1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar

Notera: För konvergens för $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gäller att $a_k \to 0$, $k \to \infty$

Rotkriteriet gäller även då $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = A$

är ersatt av $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = A$

SATS: Antag $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ har konvergensradie

$R>0$ och summan $f(x)$

Då gäller $\forall x \in (-R, R)$

1) $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$

2) $\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$

Dessutom har

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k \cdot x^{k-1} \quad \text{och} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

konvergensradien $= R$

BEVIS: bygger på likformig konvergens och Weierstrass M-sats. Visas 5/12

Ex (Lösning av diff. ekv. m.h.a. potensserie)

$$(*) \begin{cases} (4-x^2)y'' + y = 0 \ldots\ldots (1) \\ y(0) = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ y'(0) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Sökt: Lösning till $(*)$ på formen

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Antag att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ har konvergensradie $R > 0$!

För $|x| < R$ gäller att

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$$ potensserie med konv. radie R

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) x^{k-2}$$

$$x^2 y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cdot k(k-1) x^k$$

(1) ger
$$\sum_{k=2}^{\infty} 4a_k \cdot k \cdot (k-1) x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) x^k +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0 \qquad \text{för } |x| < R$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 4 a_{k+2} (k+2)(k+1) x^k - \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) x^k +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0 \qquad |x| < R$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left[4a_{k+2} (k+2)(k+1) - a_k k(k-1) + a_k \right] x^k +$$
$$+ 4a_2 \cdot 2 + 4a_3 6x + a_0 + a_1 x = 0$$

$\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ har konvergensradie > 0

och $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = 0$ för x i en omgivning (av 0)

$\Longrightarrow \quad b_k = 0 \quad \forall k$

$k=0$: $\quad a_2 = -\frac{1}{8} a_0 \qquad (+)$

$k=1$: $\quad a_3 = -\frac{1}{24} a_1$

$k \geq 2$: $\quad a_{k+2} = \frac{k(k-1)-1}{4(k+2)(k+1)} a_k \qquad (++)$

(2) medför $1 = y(0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \Big|_{x=0} = a_0$

(3) medför $0 = y'(0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} \Big|_{x=0} = a_1$

Detta ger

$$0 = a_1 = a_3 = a_5 = \ldots$$

Vi har

$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$ där a_{2k} bestäms av (+) och (++)

Avgör vad $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$ har för konvergensradie

Sätt $t = x^2$

Betrakta $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} t^k$ och studera konvergensradien för denna

$$\left| \frac{a_{k+2}}{a_k} \right| = \frac{k^2 - k - 1}{4k^2 \left(1 + \frac{2}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}}{4\left(1 + \frac{2}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \xrightarrow[k \to \infty]{} \frac{1}{4}$$

Alltså: $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} t^k$ har konvergensradien $\frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

$x^2 = t$ ger

$\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$ har konvergensradien $\sqrt{4} = 2$