Föreläsning 2/12-13

POTENSSERIER

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad , \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad \text{variabeln } x \in \mathbb{R}$$

Taylorserier:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (\text{ofta } a=0)$$

$a=0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x) - R_{n+1}(x) = f(x) - \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \theta = \theta(x,n) \in [0,1]$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ konvergerar exakt då $R_{n+1}(x) \to 0, \ n \to \infty$

Ex. $f(x) = e^x$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x - \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Vi vet $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0, \ n \to \infty$ för varje $x \in \mathbb{R}$

n beroende

$$0 \le e^{\theta x} \le e^{|x|}$$

$\nrightarrow 0,\ n \to \infty$
för $x \in (1, \infty)$

Alltså $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergerar $\forall\, x \in \mathbb{R}$ och har summan e^x

$\to 0,\ n \to \infty$
för $x \in [-1, 1]$

Ex: $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x) - (-1)^{(n-1)+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\Theta x)}$$

$$1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^{n-1} t^{n-1} = \frac{1 + (-1)^{n-1} t^n}{1+t}$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \int_0^x \Big(1 - t + t^2 - t^3 + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1} t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\Big)\, dt =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} +$$

$$+ (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt$$

medelvärdessatsen för integraler

$$\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt = \frac{1}{1+\Theta x} \int_0^x t^n\, dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\Theta x)}$$

SATS (potensseriers konvergens)

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ uppfyller exakt ett av följande tre påståenden:

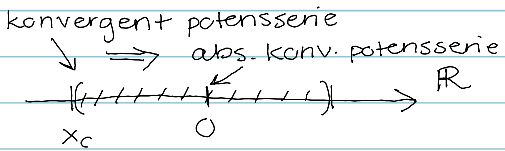
① $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar endast för $x = 0$

② $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ är absolutkonvergent $\forall\, x \in \mathbb{R}$

③ $\exists\, R \in (0, \infty)$ s.a. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ är absolutkonvergent för $|x| < R$ och divergent för $|x| > R$

BEVIS

Hjälplemma: Om $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar för $x_0 \neq 0$ så $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar absolut för alla $|x| < |x_0|$



Bevis av Lemma

Det gäller $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ konvergerar

$\Longrightarrow$ $a_k x_0^k \longrightarrow 0$, $k \longrightarrow \infty$

Speciellt finns N så att $|a_k x_0^k| < 1$

för alla $k \geq N$

För $|x| < |x_0|$ gäller

$$|a_k x^k| = \left|a_k x^k \left(\frac{x}{x_0}\right)^k\right| = |a_k x^k| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^k <$$

$$< \left|\frac{x}{x_0}\right|^k \quad \forall k \geq N$$

Jämförelsekriteriet gäller

$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$ konvergerar då

$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left|\frac{x}{x_0}\right|}_{<1}{}^k$ konvergerar

$\square$

$\longrightarrow$

BEVIS av satsen

Sätt $M = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ konvergerar} \right\}$

(Ska visa: $M = \{0\}$ eller $M = \mathbb{R}$ eller
$(-R, R)$ / $(-R, R]$ / $[-R, R)$ / $[-R, R]$
för något $R > 0$)

Vi ser $0 \in M$

Fall 1: M är obegränsad

Fixera $x \in \mathbb{R}$

$\exists\, x_0 \in M$ s.a. $|\tilde{x}| < |x_0|$

Lemmat medför $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ absolutkonvergent

för $x = \tilde{x}$

Detta svarar mot 2 i satsen

Fall 2: M är begränsad

Sätt $b = \sup M$

Det gäller $b \geq 0$

Fallet $b=0$

Påstående: $M = \{0\}$

eftersom om $\tilde{x} \in M \setminus \{0\}$ så gäller att

$\underbrace{\frac{|\tilde{x}|}{2}}_{>0} \in M$ enligt Lemmat

Motsägelse! Alltså $M = \{0\}$ då $b=0$

Återstår fallet $b > 0$

Påstående: $b = R$ i fall 3 i satsen

Fixera x med $|x| > R$

Ska visa $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ divergerar

Antag att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar

Lemmat medför att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar

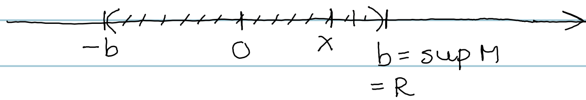
för $\frac{|x| + R}{2} > b$ Motsägelse!

Alltså: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ divergerar

Fixera x med $|x| < R$

Ska visa att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ absolutkonvergent

Men Lemmat ger påståendet



eftersom från definitionen av b följer att

$$\exists\ \tilde{x} \in M \text{ med } |x| < |\tilde{x}|$$

$\square$

Hur bestäms R?

SATS: (rotformeln)

Antag $\sqrt[k]{|a_k|} \longrightarrow H$, $k \to \infty$

Då gäller att:

① $M = \{0\}$ om $H = \infty$ $\left(R = \frac{1}{H}\right)$

② $M = \mathbb{R}$ om $H = 0$ $\left(\text{"} R = \frac{1}{H} \text{"}\right)$

③ R i satsen ovan ges av $R = \frac{1}{H}$ för $H \in (0, \infty)$

SATS: (Kvotformeln)

Antag $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \longrightarrow K$, $k \to \infty$

Då gäller

① $M = \{0\}$ om $K = \infty$

② $M = \mathbb{R}$ om $K = 0$

③ R i satsen ovan ges av $R = \frac{1}{K}$

Ex. $\sum_{k=1}^{\infty} k!\, x^k$

Sätt $a_k = k!$

Rotformeln: $\sqrt[k]{|a_k|} = (k!)^{\frac{1}{k}} =$

$= \{\text{Stirlings formel}\} = \left(\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k} \cdot (1+\varepsilon_k)\right)^{\frac{1}{k}} =$

$= \frac{k}{e} \cdot \underbrace{(2\pi k)^{\frac{1}{2k}}}_{\substack{\longrightarrow 1 \\ k\to\infty}} \underbrace{(1+\varepsilon_k)^{\frac{1}{k}}}_{\substack{\longrightarrow 1 \\ k\to\infty}} \longrightarrow \infty, \ k \to \infty$

Rotformelsatsen ger

$M = \{0\}$

Kvotformeln:

$\frac{a_{k+1}}{a_k} = k+1 \longrightarrow \infty, \ k \to \infty$

BEVIS av rotformeln

Betrakta för fallet $0 < H < \infty$

$$\sqrt[k]{|a_k x^k|} = \sqrt[k]{|a_k| \cdot |x|^k} = \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |x| \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H \cdot |x| \quad , k \to \infty$$

Rotkriteriet ger att $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| |x|^k$ konvergerar

för $|x| < \frac{1}{H}$ och divergerar för $|x| > \frac{1}{H}$

Alltså $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ absolutkonvergent för $|x| < \frac{1}{H}$

För $|x| > \frac{1}{H}$ gäller $a_k x^k \not\to 0, k \to \infty$

Alltsa $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ divergerar

Fall $H = 0$: För varje $x \in \mathbb{R}$ gäller

$$\sqrt[k]{|a_k x^k|} \longrightarrow 0 \quad , k \to \infty$$

Rotkriteriet ger $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ absolutkonv. för x

Fall $H = \infty$: För varje $x \neq 0$ gäller

$\sqrt[k]{|a_k x^k|} \to \infty, \ k \to \infty$ och alltså

$$a_k x^k \not\to 0 \quad , k \to \infty$$

Alltså $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ divergerar

$\square$

SATS:

Antag att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ har konvergensradie $R>0$

och kallas potensseriens summa $f(x)$

Då gäller för $x \in (-R, R)$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k x^{k-1}$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

Potensserierna i HL har konvergensradie $= R$